Equação de autovalores para o spin

$$\begin{cases} \hat{S}_z\,\psi = m_s\,\hbar\,\psi \\ \hat{S}^2\,\psi = s\,(s+1)\,\hbar^2\,\psi \end{cases}$$

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

Autoestados de S_z

$$\begin{cases} |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\hat{S}_z\,|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|\uparrow\rangle \qquad \hat{S}_z\,|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}\,|\downarrow\rangle$$

Equação de autovalores para o spin

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Autoestados de S_x e S_y ?

$$|\, x_+ \rangle \qquad |\, y_+ \rangle$$

$$|\, x_- \rangle \qquad |\, y_- \rangle$$

Comutadores e operadores compatíveis

$$[\,S_x\,,\,S_y\,] = i\,\hbar\,S_z \qquad\qquad [\,S^2\,,\,S_x\,] = 0$$

$$[\,S_y\,,\,S_z\,] = i\,\hbar\,S_x \qquad\qquad [\,S^2\,,\,S_y\,] = 0$$

$$[\,S_z\,,\,S_x\,] = i\,\hbar\,S_y \qquad\qquad [\,S^2\,,\,S_z\,] = 0$$

Não têm autoestados comuns !

Não ser conhecidos ao mesmo tempo !

Aula 6

Autoestados, espaços, álgebra linear

Autovalores e autoestados de S_x

Medidas SG sequenciais

Autoestados de S^2 e S_z

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Com estes estados vamos definir um espaço vetorial

espaço[1]

substantivo masculino

1. extensão ideal, sem limites, que contém todas as extensões finitas e todos os corpos ou objetos existentes ou possíveis.

Aline Paliga
UFPel

9.1 ESPAÇO VETORIAL

Seja um conjunto V, não-vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é:

$$\forall u, v \in V \ , u + v \in V$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall u \in V, \ \alpha \mathrm{u} \in V$$

O conjunto V com essas duas operações é chamado de espaço vetorial real (ou espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$) se forem verificados os seguintes axiomas:

A) Em relação à adição:

A1) $u+(v+w)=(u+v)+w,\ \forall u,v,w\in V$

A2) $u+v=v+u,\ \forall u,v\in V$

A3) $\exists 0\in V, \forall u\in V, u+0=u$

A4) $\forall u\in V, \exists(-u)\in V, u+(-u)=0$

B) Em relação à multiplicação por escalar:

M1) $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$

M2) $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

M3) $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$

M4) $1(u)=u$

para $\forall u,v\in V\ e\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

OBSERVAÇÕES:

1)Os elementos do espaço vetorial V são chamados de vetores, independente de sua natureza. Pode parecer estranho, o fato de se chamar de vetores os *polinômios*, (quando V for constituído de polinômios), as *matrizes* (quando V for constituído de matrizes), os *números* (quando V for constituído for um conjunto numérico), e assim por diante. Podemos fazer isso, pois esses elementos de natureza tão distinta se comportam de forma idêntica nas operações de adição e multiplicação de escalar, como se estivéssemos trabalhando com os próprios vetores do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

2) Se tivéssemos tomado para escalares o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, V seria um *espaço vetorial complexo*.

3 Espaços com Produto Interno

Algebra linear
UFRJ

3.1 Produtos Internos em Espaços Vetoriais

Definição

Seja V um espaço vetorial. Um *produto interno* em V é uma função

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

que satisfaz

P1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ para todos $u, v \in V$;
P2) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$ para todos $u, v, w \in V$;
P3) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha \langle u, v\rangle$ para todos $u, v \in V$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$;
P4) $\langle u, u\rangle \geqslant 0$ para todo $u \in V$ e $\langle u, u\rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

Exemplo 1 (O Produto Interno Usual em $\mathbb{R}^2$)

$\langle (a, b), (c, d)\rangle = ac + bd$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Este produto interno é facilmente generalizado para $\mathbb{R}^n$.

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = \langle \vec{A}, \vec{B}\rangle = \langle (A_x, A_y), (B_x, B_y)\rangle = A_x\, B_x + A_y\, B_y$$

$$\vec{A}\,.\,\vec{A} = \langle \vec{A}, \vec{A}\rangle = \langle (A_x, A_y), (A_x, A_y)\rangle = A_x\, A_x + A_y\, A_y$$

3.2 Espaços Vetoriais Euclidianos

Definição

Um *espaço vetorial euclidiano* é um espaço vetorial de dimensão finita, munido de um produto interno.

3.3 Norma de um Vetor

Definição

Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Dado $v \in V$ define-se a *norma* de v, indicada por $|v|$, por

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x\, A_x + A_y\, A_y}$$

$|v| = 1$ vetor unitário vetor normalizado

Para normalizar: $u = \dfrac{v}{|v|}$

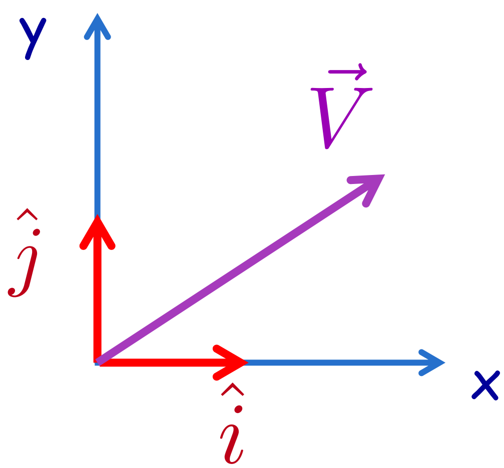
Espaço de Hilbert

David Hilbert
(1862 -1943)

Espaço vetorial com produto interno cuja dimensão pode ser infinita

Os elementos deste espaço são funções, mas são chamados "vetores"

Espaço vetorial de duas dimensões



versores $\begin{cases} \hat{i} = |\,\hat{i}\,\rangle \\ \hat{j} = |\,\hat{j}\,\rangle \end{cases}$

Normalizados : $\hat{i}\,.\,\hat{i} = \langle\,\hat{i}\,|\,\hat{i}\,\rangle = 1 \qquad \hat{j}\,.\,\hat{j} = \langle\,\hat{j}\,|\,\hat{j}\,\rangle = 1$

Ortogonais : $\hat{i}\,.\,\hat{j} = \langle\,\hat{i}\,|\,\hat{j}\,\rangle = 0 \qquad \hat{j}\,.\,\hat{i} = \langle\,\hat{j}\,|\,\hat{i}\,\rangle = 0$

Formam uma base !

Vetor genérico: $\vec{V} = V_x\,\hat{i} + V_y\,\hat{j} = V_x\,|\,\hat{i}\,\rangle + V_y\,|\,\hat{j}\,\rangle$

Autoestados de S^2 e S_z

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Autoestado adjunto = transposto do complexo conjugado

$$(|\uparrow\rangle^*)^T = |\uparrow\rangle^\dagger = \langle\uparrow|$$

$$\langle\uparrow| = (1 \quad 0) \qquad \langle\downarrow| = (0 \quad 1)$$

Produto escalar

$$\langle \uparrow | \downarrow \rangle = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \downarrow | \uparrow \rangle = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

ortogonais

e

$$\langle \uparrow | \uparrow \rangle = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\langle \downarrow | \downarrow \rangle = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

normalizados

ortonormais !

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg\}$$ Formam uma base !

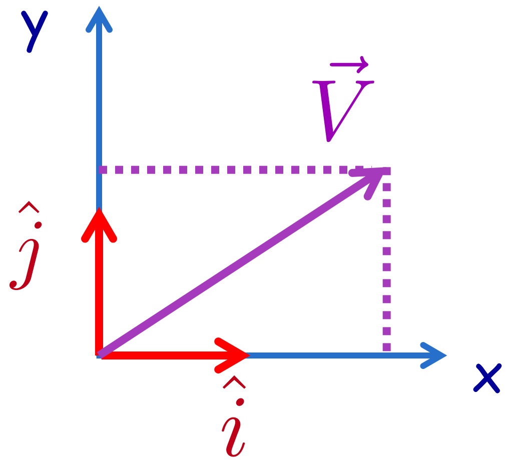
Vetor genérico: $$|s\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$$

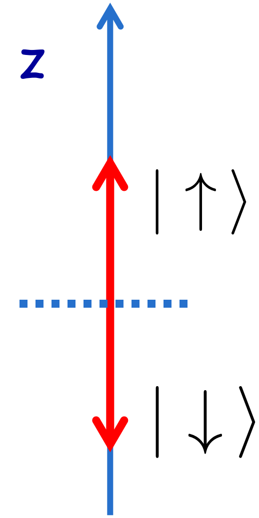
$$\langle s| = a^*\langle\uparrow| + b^*\langle\downarrow|$$

Normalizado: $$\langle s|s\rangle = 1$$

$$[a^*\langle\uparrow| + b^*\langle\downarrow|] \cdot [a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle] =$$

$$a^*a + b^*b = |a|^2 + |b|^2 = 1$$





$$\vec{V} = V_x\,|\,\hat{i}\,\rangle + V_y\,|\,\hat{j}\,\rangle \qquad\qquad |s\,\rangle = a\,|\uparrow\rangle + b\,|\downarrow\rangle$$

Interpretação geométrica

Interpretação probabilística

$$P(\,|\uparrow\rangle\,) = |a|^2$$

Probabilidade de observar o "spin prá cima"

$$P(\,|\downarrow\rangle\,) = |b|^2$$

Probabilidade de observar o "spin prá baixo"

Exemplos

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$$

a b

$$|a|^2 = \frac{1}{2}$$ 50 % prá cima

$$|b|^2 = \frac{1}{2}$$ 50 % prá baixo

$$|s\rangle = i\,\frac{\sqrt{3}}{2}|\uparrow\rangle + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle$$

$$|a|^2 = \frac{3}{4}$$ 75 % prá cima

$$|b|^2 = \frac{1}{4}$$ 25 % prá baixo

Operadores de spin

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Autoestados de S_z

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \hat{S}_z\,|\uparrow\rangle = \dfrac{\hbar}{2}\,|\uparrow\rangle \\ \hat{S}_z\,|\downarrow\rangle = -\dfrac{\hbar}{2}\,|\downarrow\rangle \end{cases}$$

Operador no autoestado "errado" $\quad \hat{S}_x\,|\uparrow\rangle = ?$

$$\hat{S}_x\,|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\,|\downarrow\rangle$$

Não é equação de autovalores !!!

Autoestados de S_x

$$\hat{S}_x \,|x\rangle = a\,|x\rangle \qquad \hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad |x\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\hbar}{2}\beta &= a\,\alpha \\ \frac{\hbar}{2}\alpha &= a\,\beta \end{aligned}\right. \longrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \longrightarrow \alpha = \pm\beta$$

$$\beta = \alpha$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{a = \frac{\hbar}{2}}$$

$$\beta = \alpha$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{a = \frac{\hbar}{2}}$$

$$\beta = -\alpha$$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{a = -\frac{\hbar}{2}}$$

Resumo

$$|\, x_+ \rangle \;=\; \alpha \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right)$$

$$\hat{S}_x \,|\, x_+ \rangle \;=\; \hat{S}_x \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \end{array} \right) \;=\; \frac{\hbar}{2} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \alpha \end{array} \right)$$

$$|\, x_- \rangle \;=\; \alpha \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right)$$

$$\hat{S}_x \,|\, x_- \rangle \;=\; \hat{S}_x \left(\begin{array}{c} \alpha \\ -\alpha \end{array} \right) \;=\; -\,\frac{\hbar}{2} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ -\alpha \end{array} \right)$$

Constante é determinada pela normalização

$$\langle\, x_+ \,|\, x_+ \,\rangle = 1 \qquad \alpha\,(1 \;\; 1)\,\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

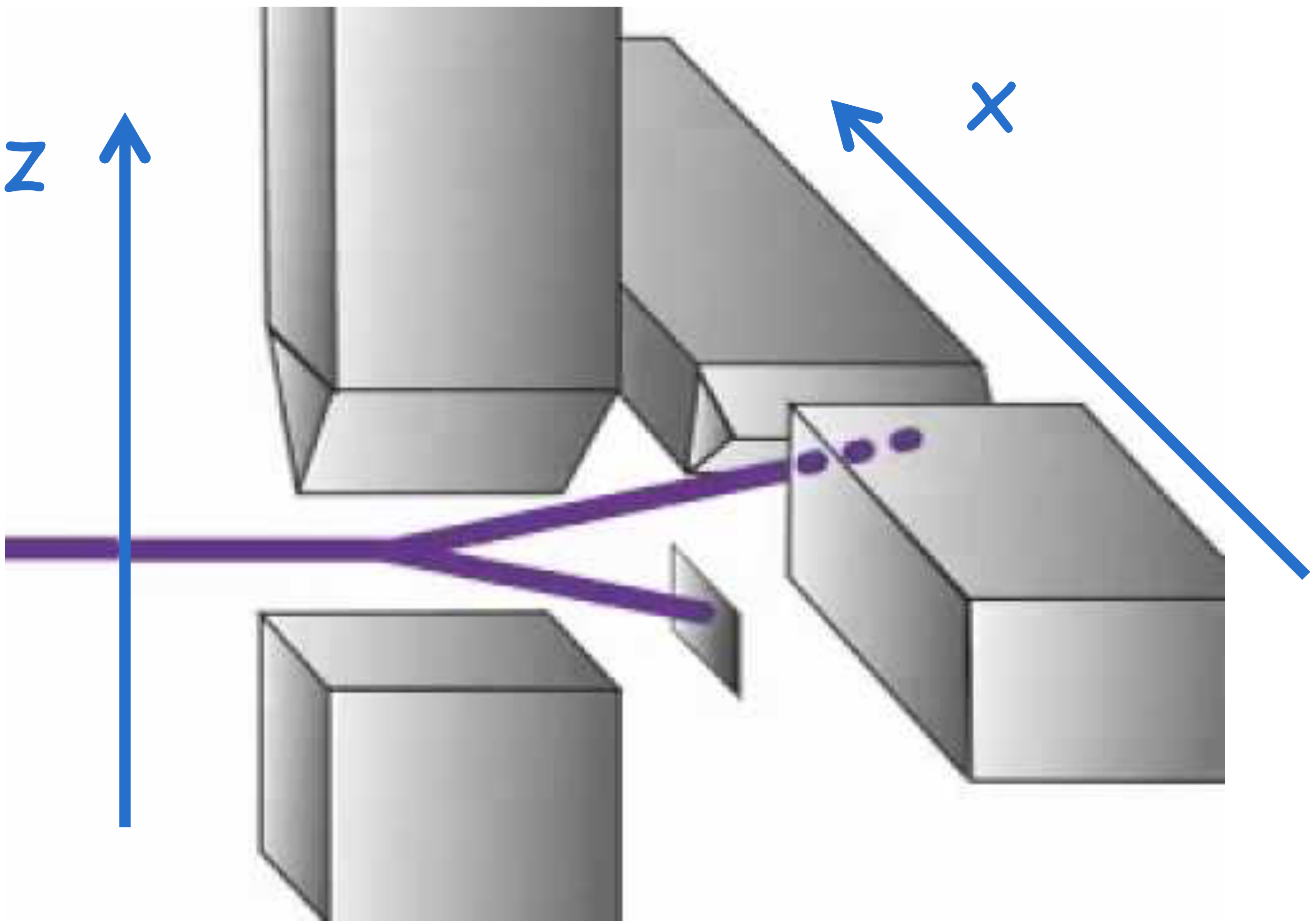
$$\langle\, x_- \,|\, x_- \,\rangle = 1 \qquad \alpha\,(1 \;\; -1)\,\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{|\, x_+ \,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{|\, x_- \,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

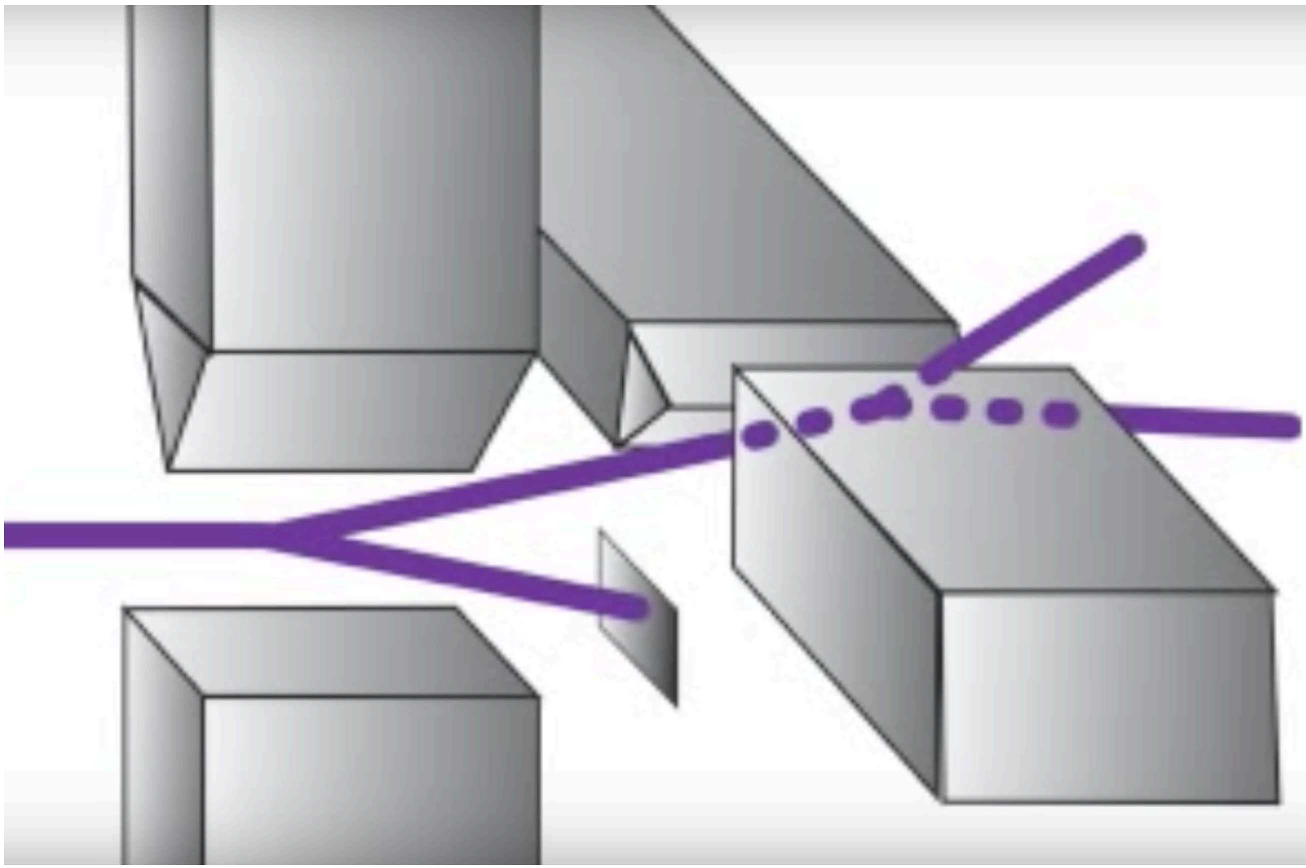
$$\boxed{\langle\, x_+ \,|\, x_- \,\rangle = 0} \qquad \boxed{\langle\, x_- \,|\, x_+ \,\rangle = 0}$$

Ortogonais e normalizados : formam uma base

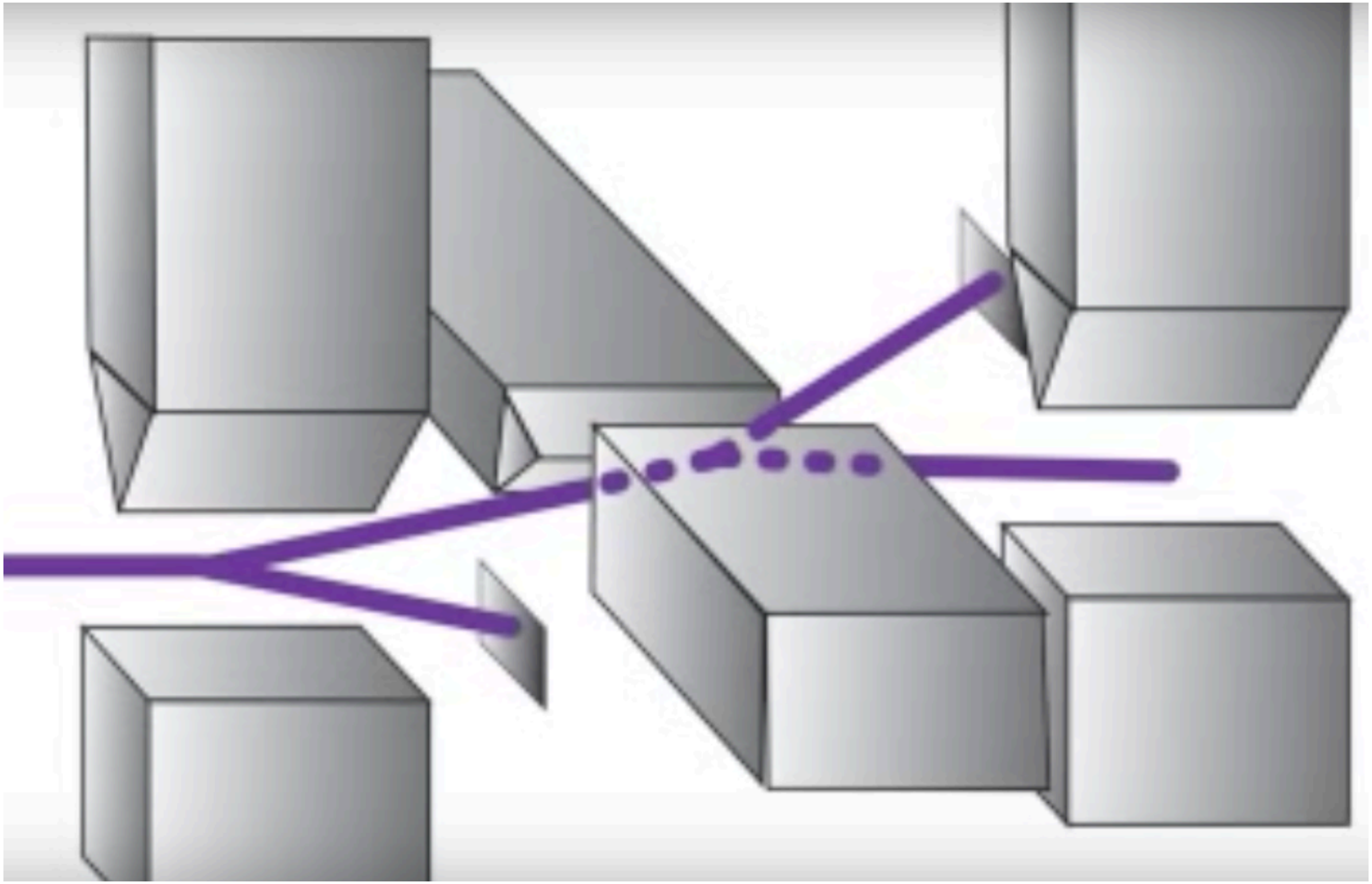
Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



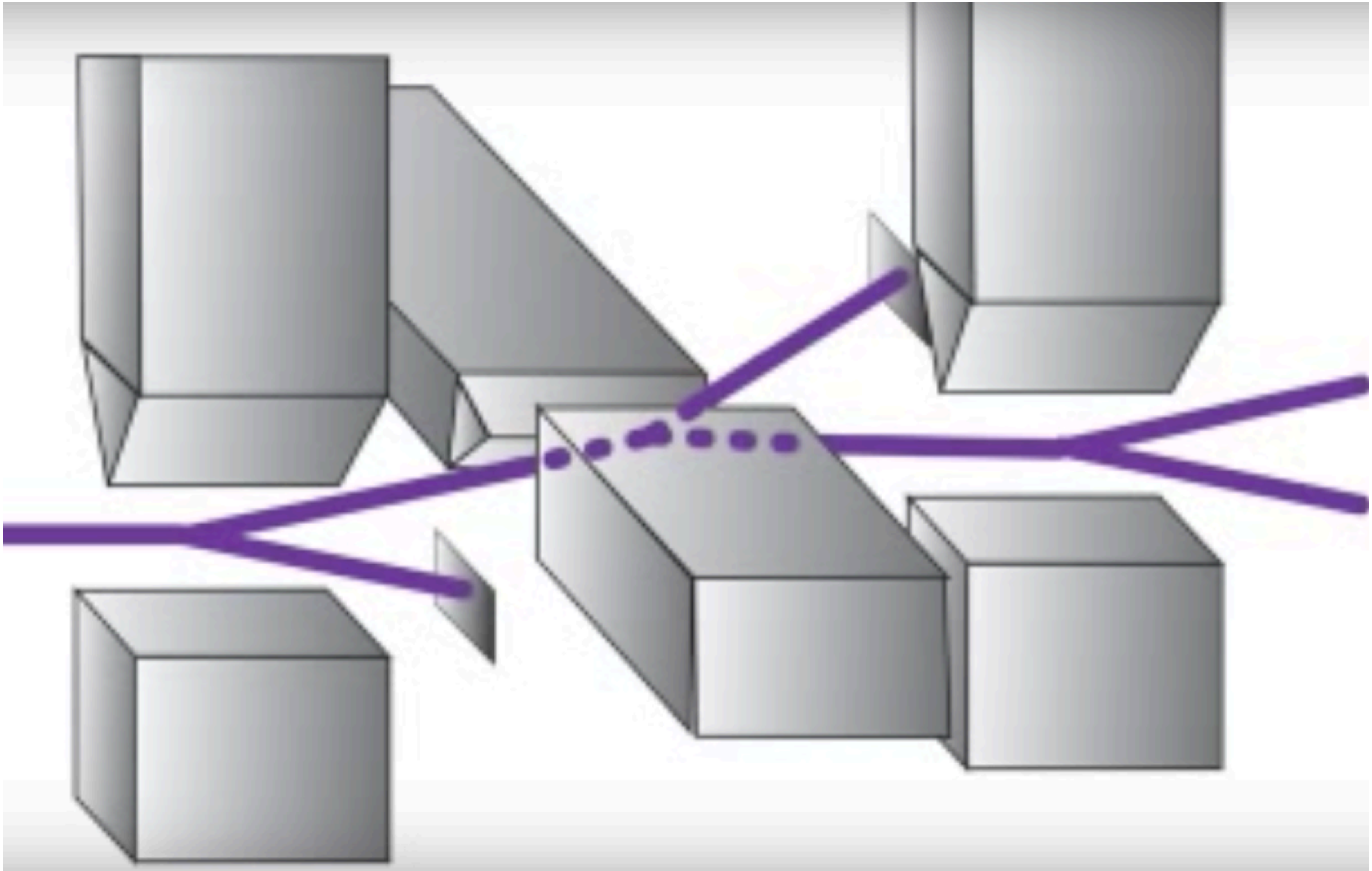
Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



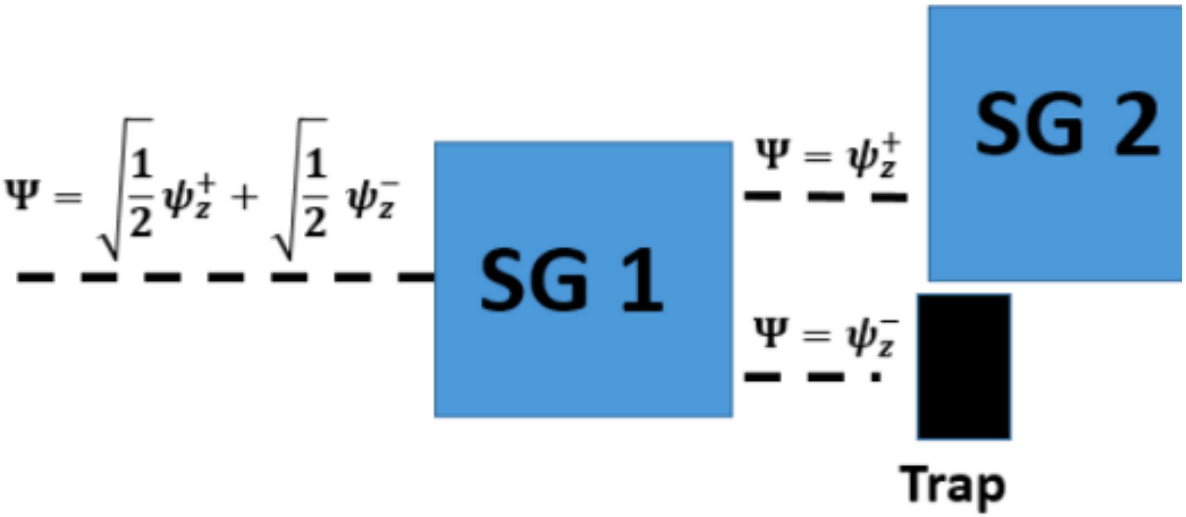
Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



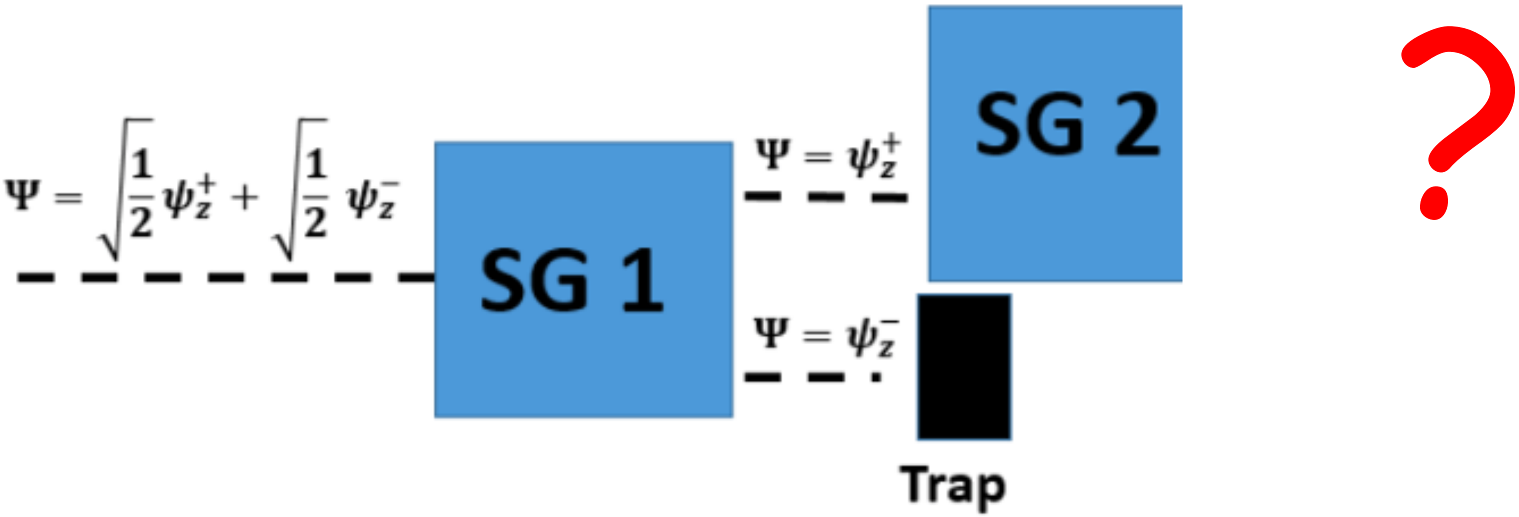
Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



Medidas sequenciais de Stern-Gerlach

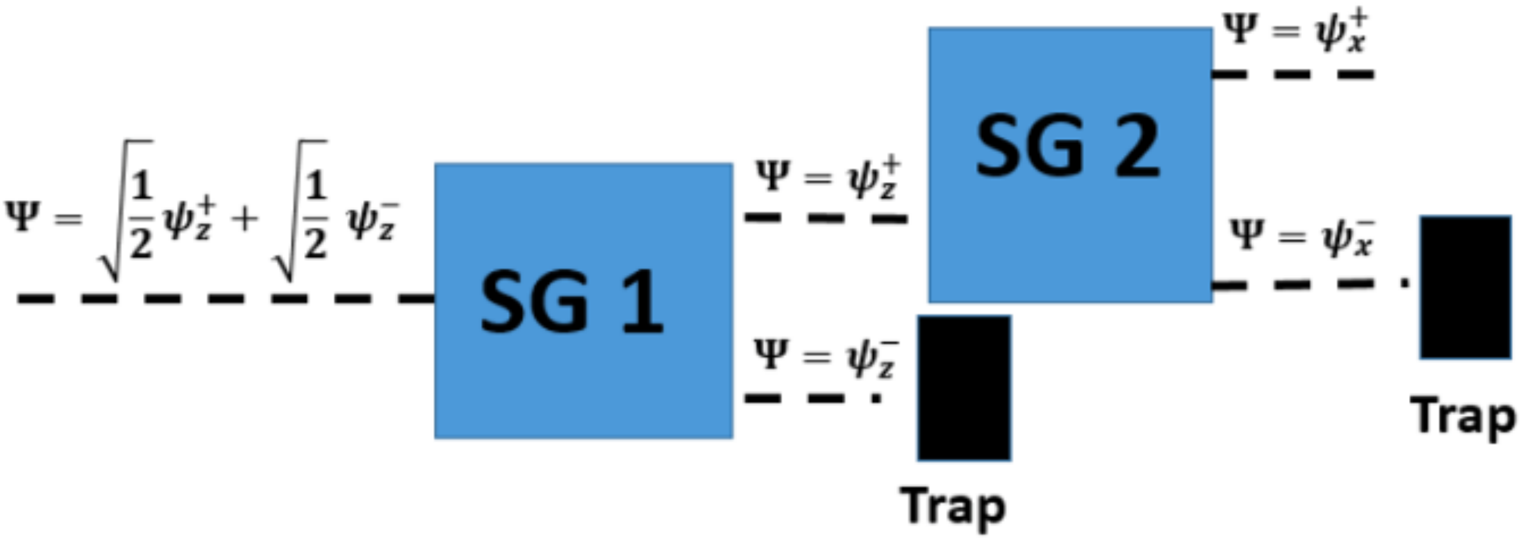


Medidas sequenciais de Stern-Gerlach

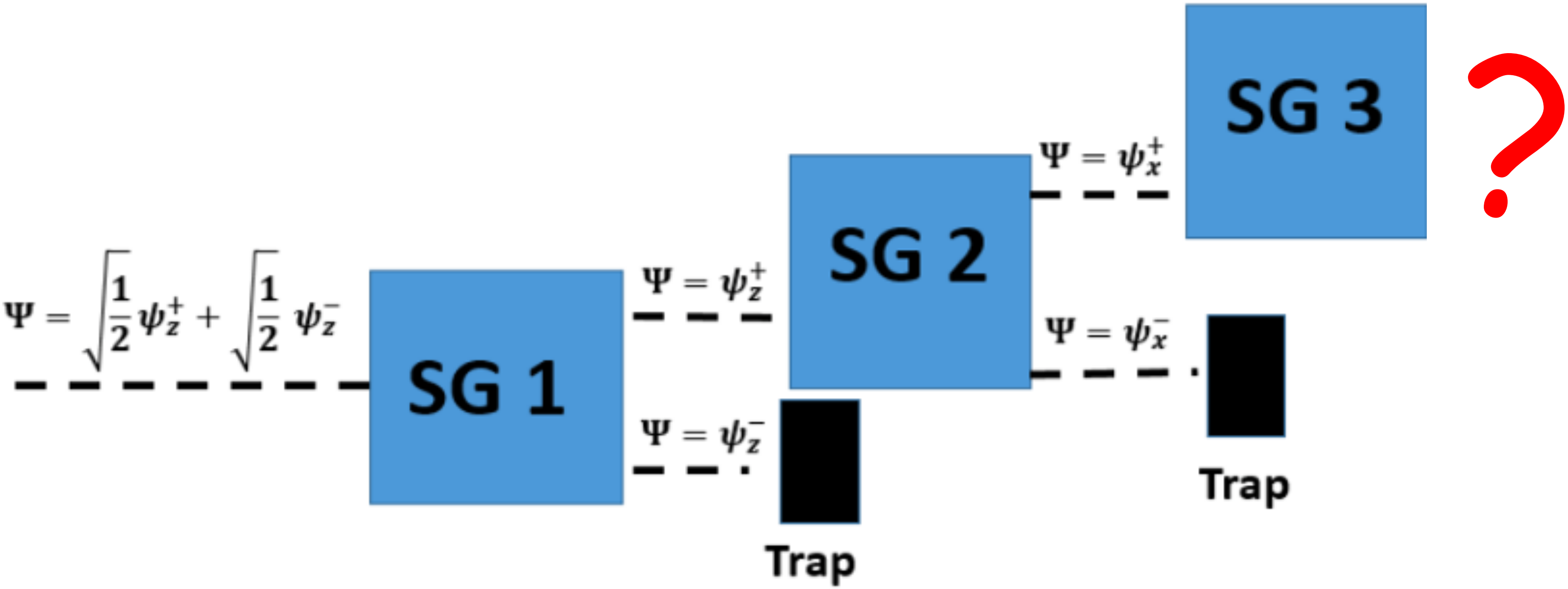


Sabendo que a partícula está no estado $|\uparrow\rangle$,
qual é o resultado da medida na componente x ?

Medidas sequenciais de Stern-Gerlach

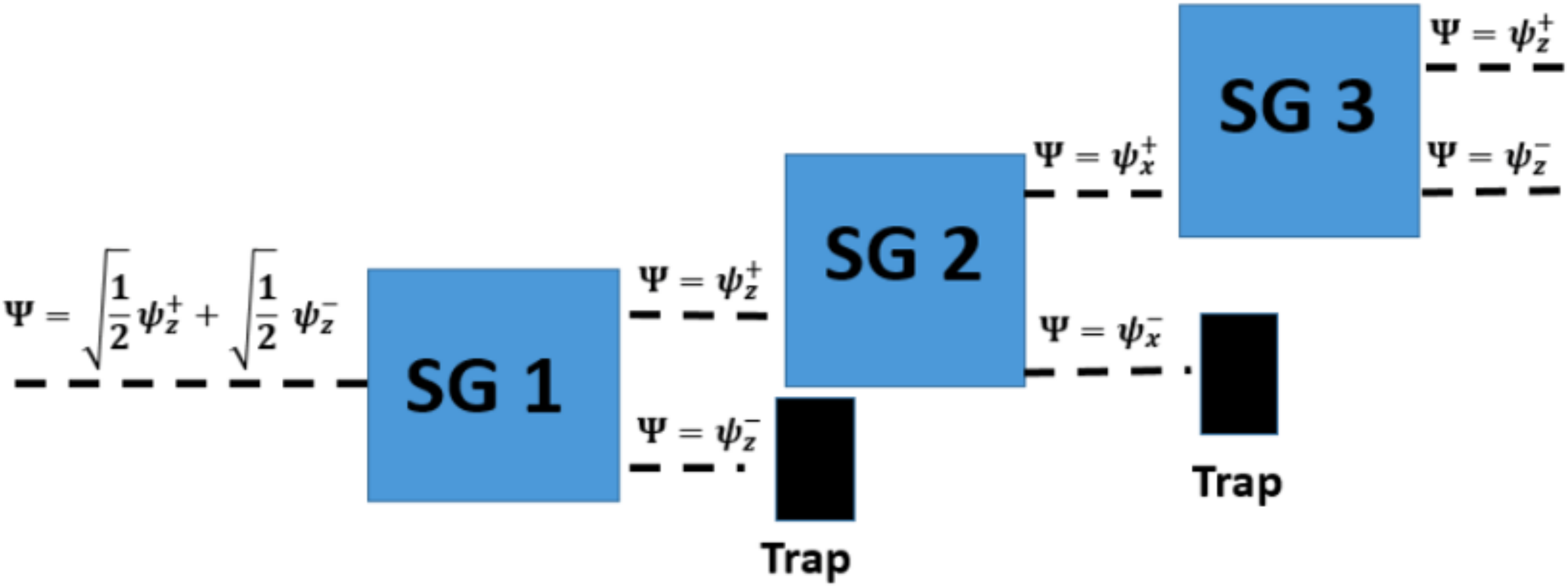


Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



Sabendo que a partícula esteve no estado $|\uparrow\rangle$,
que depois esteve no estado $|x_+\rangle$
qual é o resultado de nova medida da componente z ?

Medidas sequenciais de Stern-Gerlach



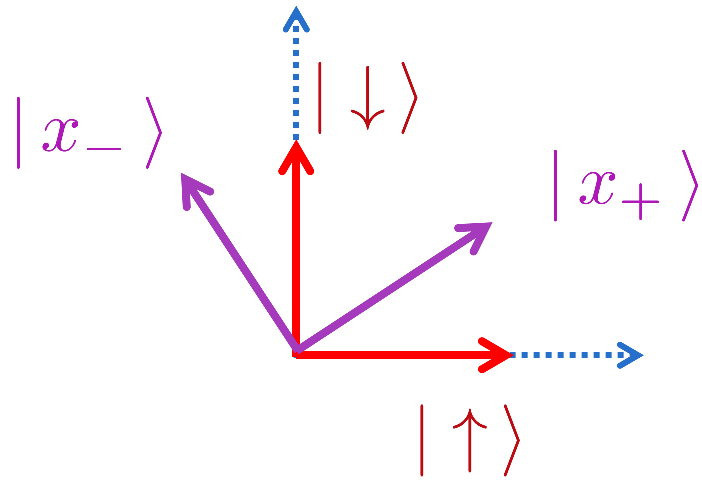
Medidas alteram o estado

Quando um dos observáveis incompatíveis
é completamente determinado
a incerteza no outro é máxima !!!

(Princípio da incerteza)

W. Heisenberg
(1901 -1976)

Duas bases $\left\{ \begin{array}{ll} |\uparrow\rangle & |\downarrow\rangle \\ \\ |x_+\rangle & |x_-\rangle \end{array} \right.$



analogia geométrica

$$|\uparrow\rangle = \alpha\,|x_+\rangle + \beta\,|x_-\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(1\ \ 0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ \ 0)\,\alpha\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1\ \ 0)\,\beta\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \beta \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$0 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} - \dfrac{\beta}{\sqrt{2}} \\ 1 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} + \dfrac{\beta}{\sqrt{2}} \end{cases} \longrightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |x_+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |x_-\rangle}$$

50 % - 50 %

Comutadores e operadores compatíveis

$$[\,S_x\,,\,S_y\,] = i\,\hbar\,S_z \qquad\qquad [\,S^2\,,\,S_x\,] = 0$$

$$[\,S_y\,,\,S_z\,] = i\,\hbar\,S_x \qquad\qquad [\,S^2\,,\,S_y\,] = 0$$

$$[\,S_z\,,\,S_x\,] = i\,\hbar\,S_y \qquad\qquad [\,S^2\,,\,S_z\,] = 0$$

Não têm autoestados comuns !

Não ser conhecidos ao mesmo tempo !

Resumo

Autoestados de spin formam espaços vetoriais

Duas bases: $|\uparrow\rangle \quad |\downarrow\rangle \qquad |x_+\rangle \quad |x_-\rangle$

Operadores, autovalores e autoestados podem ser deduzidos !

A partir dos comutadores

$$\begin{cases} [S_x , S_y] = i\hbar S_z & [S^2 , S_x] = 0 \\ [S_y , S_z] = i\hbar S_x & [S^2 , S_y] = 0 \\ [S_z , S_x] = i\hbar S_y & [S^2 , S_z] = 0 \end{cases}$$

Medidas sequenciais: uma medida "apaga a memória" da outra.
Princípio da incerteza!