Mecânica dos Fluidos II (PME 3330)
Gabarito Primeira Prova - 2018

1. (5 pontos) Um líquido escoa em regime laminar sob cisalhamento com velocidade U entre uma placa fixa e outra móvel separadas uma distância h, como mostrado na figura. A gravidade é desprezada e o escoamento é completamente desenvolvido (não há variação da velocidade com x). Supondo viscosidade μ conhecida, queremos encontrar o gradiente de pressão $\dfrac{dp}{dx}$ necessário para que a tensão de cisalhamento viscosa seja nula na placa inferior. Neste caso, quanto vale a velocidade média $\overline{u}$ e a vazão volmétrica por unidade de comprimento na direção normal Q. Resolver o exercício seguindo os seguintes passos:

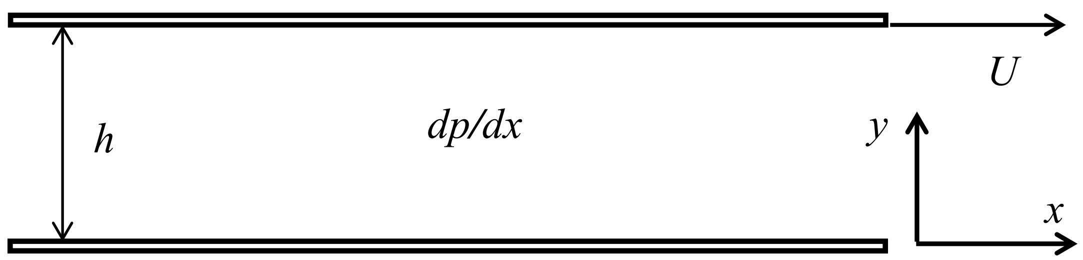
a) Determinar o perfil de velocidade na região $0 \le y \le h$ em função de U, $\dfrac{dp}{dx}$ e do resto dos parâmetros aplicando condições de contorno adequadas de velocidade nas paredes; (2 pontos)

b) Encontrar $\dfrac{dp}{dx}$ em função de U e do resto dos parâmetros aplicando ao perfil de velocidade a condição adequada; (1.5 pontos)

c) Encontrar o perfil de velocidade com a condição do ponto anterior, fazer um gráfico qualitativo e calcular $\overline{u}$ e Q. (1,5 pontos)

Equação de Navier-Stokes direção x: $\rho \dfrac{Du}{Dt} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \rho G_x + \mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$

Tensão de cisalhamento: $\tau = \mu \dfrac{\partial u}{\partial y}$



Solução:

a) O perfil de velocidade para a região $0 \le y \le h$ surge de resolver:

$$-\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2u}{dy^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} y + A \quad ; \quad u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx} y^2 + A\,y + B$$

com condições de contorno:

$$u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$u(h) = U \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx} h^2 + A\,h = U \quad \Rightarrow \quad A = \frac{U}{h} - \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx} h$$

O perfil de velocidade resulta:

$$u(y) = -\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right) + U\frac{y}{h}$$

b) A tensão de cisalhamento resulta:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = -\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}\left(1 - 2\frac{y}{h}\right) + \frac{\mu U}{h}$$

Para que a tensão de cisalhamento viscosa na placa inferior seja nula, deve ser:

$$\tau(0)=0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{h}{2}\frac{dp}{dx}+\frac{\mu U}{h}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx}=2\frac{\mu U}{h^2}$$

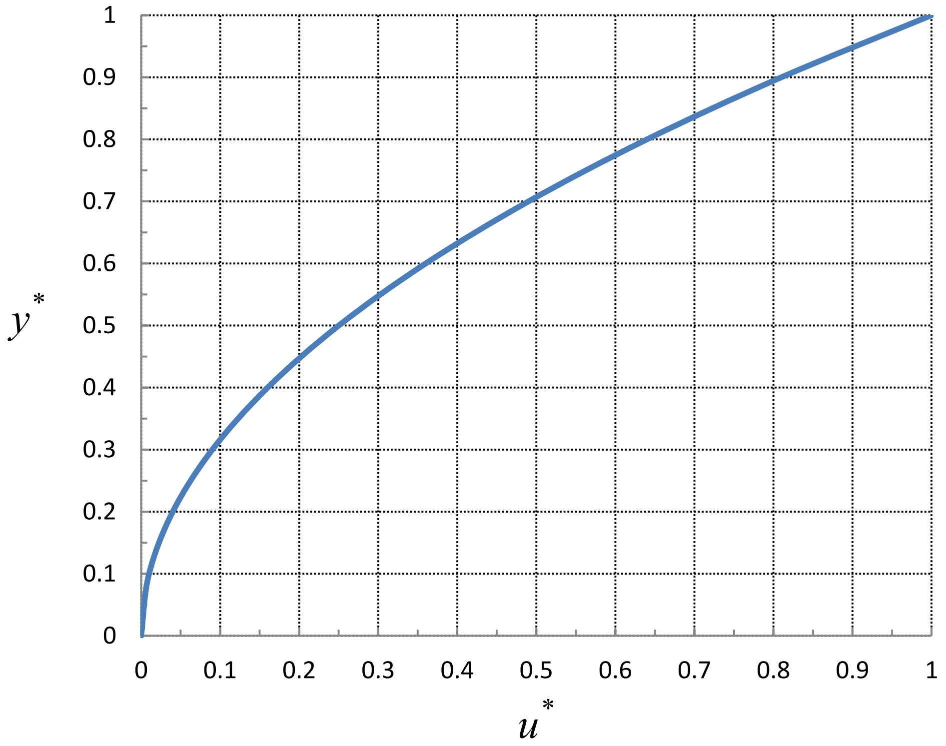
c) Substituindo o gradiente de pressão no perfil de velocidade, resulta:

$$u(y)=-\frac{h^2}{2\mu}\left(2\frac{\mu U}{h^2}\right)\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)+U\frac{y}{h}=-U\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)+U\frac{y}{h}=U\left(\frac{y}{h}\right)^2$$

A velocidade média e a vazão resultam:

$$\bar{u}=\frac{1}{h}\int_0^h u(y)dy=U\int_0^1 y^{*2}\,dy^*=U\left(\frac{1}{3}y^{*3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}U \quad ; \quad Q=\bar{u}\,h=\frac{1}{3}U\,h$$

O gráfico do perfil de velocidade resulta:



2. (5 pontos) Considere o escoamento permanente, incompressível, laminar e completamente desenvolvido de um fluido incompressível de viscosidade μ e massa específica ρ, através de um ducto de raio a inclinado um ângulo θ positivo com a horizontal e em presença da gravidade g, como mostrado na figura. Para elevar uma vazão volumétrica Q é preciso estabelecer um gradiente de perda de pressão $\left(-\frac{dp}{dz}\right)$, que pode ser considerado como a soma das contribuições gravitacionais $\left(-\frac{dp}{dz}\right)_G$ e de atrito $\left(-\frac{dp}{dz}\right)_A$:

$$\left(-\frac{dp}{dz}\right)=\left(-\frac{dp}{dz}\right)_G+\left(-\frac{dp}{dz}\right)_A$$

a) Encontrar as contribuições gravitacional e de atrito, apartir da resolução do campo de velocidade; (4 pontos)

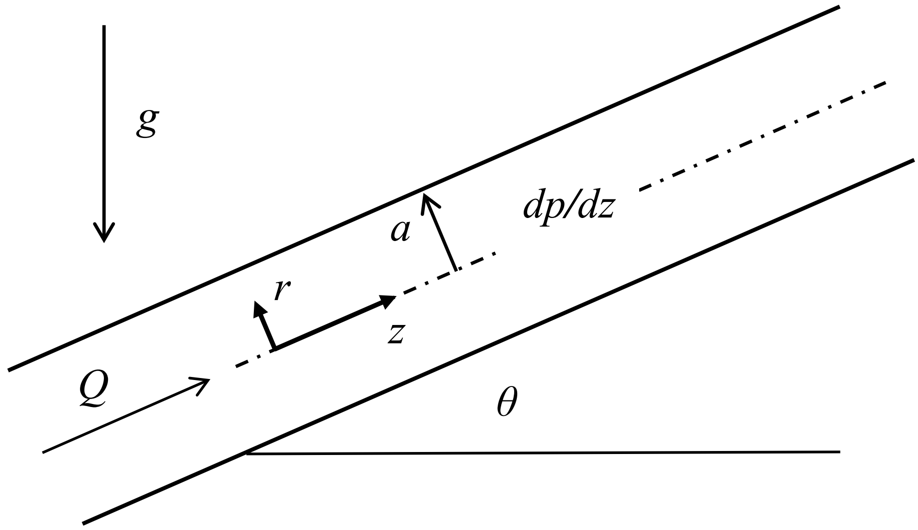
b) Encontrar um parâmetro adimensional Π que represente a razão dos gradientes de perda de pressão por atrito e gravitacional:

$$\Pi=\frac{\left(-\frac{dp}{dz}\right)_A}{\left(-\frac{dp}{dz}\right)_G}$$

e determinar a vazão volumétrica máxima $Q_{\max}$ que pode ser transportada para que a razão seja menor que uma determinada fração α. (1 ponto)

Navier-Stokes, componente z:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+G_z+\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]$$



Solução:

a) Considerando $u_z=u_z(r),\ u_\theta=u_r=0$, $G_z=-g\,\mathrm{sen}\theta$ e $\dfrac{\partial p}{\partial z}=\text{cte}$, a equação de Navier-Stokes na direção z resulta:

$$0=-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho\, g\,\mathrm{sen}\theta+\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial p}{\partial z}+\rho\, g\,\mathrm{sen}\theta=A=\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)$$

Integrando em r obtemos:

$$\frac{A\,r}{\mu}=\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\quad;\quad r\frac{\partial u_z}{\partial r}=\frac{A\,r^2}{2\,\mu}+B\quad;\quad\frac{\partial u_z}{\partial r}=\frac{A\,r}{2\,\mu}+\frac{B}{r}\quad\Rightarrow\quad u_z=\frac{A\,r^2}{4\,\mu}+B\ln r+C$$

Como $u_z(0)$ é finita, $B=0$; da condição de contorno $u_z(a)=0$ resulta $C=-\dfrac{A\,a^2}{4\,\mu}$; finalmente obtemos:

$$u_z=-\frac{A\,a^2}{4\,\mu}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$$

Integrando na área de passagem obtemos a vazão volumétrica:

$$Q=\int_0^a u_z(r)2\,\pi\, r\,dr=-\frac{\pi\,A\,a^4}{2\,\mu}\int_0^1\left(1-r^{*2}\right)r^*\,dr^*=-\frac{\pi\,A}{2\,\mu}\left(\frac{r^{*2}}{2}-\frac{r^{*4}}{4}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{\pi\,A}{8\,\mu}\quad\Rightarrow\quad -A=\frac{8\,\mu\,Q}{\pi\,a^4}$$

Substituindo: $\quad -\dfrac{\partial p}{\partial z}-\rho\,g\,\mathrm{sen}\theta=\dfrac{8\,\mu\,Q}{\pi\,a^4}\quad\Rightarrow\quad-\dfrac{\partial p}{\partial z}=\rho\,g\,\mathrm{sen}\theta+\dfrac{8\,\mu\,Q}{\pi\,a^4}$

Daqui resulta, por inspeção: $\quad\left(-\dfrac{\partial p}{\partial z}\right)_G=\rho\,g\,\mathrm{sen}\theta\quad;\quad\left(-\dfrac{\partial p}{\partial z}\right)_A=\dfrac{8\,\mu\,Q}{\pi\,a^4}$

b) O parâmetro adimensional resulta: $\quad\Pi=\dfrac{\left(-\dfrac{\partial p}{\partial z}\right)_A}{\left(-\dfrac{\partial p}{\partial z}\right)_G}=\dfrac{8\,\mu\,Q}{\pi\,\rho\,g\,a^4\,\mathrm{sen}\theta}$

Para a condição $\Pi=\dfrac{8\,\mu\,Q}{\pi\,\rho\,g\,a^4\,\mathrm{sen}\theta}<\alpha$, deve ser $Q<\dfrac{\alpha\,\pi\,\rho\,g\,a^4\,\mathrm{sen}\theta}{8\,\mu}=Q_{\max}$.