MAP2310 - Métodos Numéricos em Equações Diferenciais I

1º Semestre de 2018 - Prof. Nelson Kuhl

1ª Lista de Exercícios

Exercício 1 Faça os exercícios 1–3 e 7–15 da Seção 2.4 do livro *Equações Diferenciais Aplicadas*, de Djairo Guedes de Figueiredo e Aloisio Ferreira Neves.

Exercício 2 Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad y(0) = 1.$$

Obtenha as expressões das aproximações sucessivas de Picard para este problema, começando-se com $\psi_0(x) = 1$.

Exercício 3 Em cada um dos casos abaixo, encontre ou demonstre que não existe uma constante de Lipschitz nos domínios indicados

- $f(x, y) = x|y|$, $|x| < a$, $y \in \mathbb{R}$
- $f(x, y) = y^{1/3}$, $|y| < 1$
- $f(x, y) = 1/y$, $1 \leq y \leq \infty$
- $f(x, y) = (y_1^2 y_2, x + y_3, y_3^2)$, $|x| \leq a$, $\|y\| \leq b$

Exercício 4 Demonstre o Lema de Gronwall: *Sejam u e v funções contínuas não negativas em $[a, b]$ tais que, para $\alpha \geq 0$, satisfazem a desigualdade*

$$u(x) \leq \alpha + \int_a^x v(s)u(s) ds, \quad x \in [a, b].$$

Então,

$$u(x) \leq \alpha e^{\int_a^x v(s) ds}.$$

Em particular, se $\alpha = 0$, então $u \equiv 0$.

Exercício 5 Use o Lema de Gronwall para demonstrar os seguintes teoremas:

- (Solução global). *Suponhamos que Ω seja a faixa $\{(x, y) : a < x < b\}$ e que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função contínua. Suponhamos que a derivada parcial $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua e limitada. Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe uma única função diferenciável $\phi : (a, b) \rightarrow \Omega$ que é solução do problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.*
- (Dependência contínua). *Sob as hipóteses do teorema de existência e unicidade, sejam ϕ_1 e ϕ_2 soluções de $y' = f(x, y)$ definidas em $[x_0, x_1]$. Então, existe $K > 0$ tal que*

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leq |\phi_1(x_0) - \phi_2(x_0)| e^{K(x-x_0)}$$

para todo $x \in [x_0, x_1]$.

Exercício 6 Suponha que $\{x_n\}$, $n \geq 0$, é uma seqüência de números não negativos satisfazendo a desigualdade

$$x_{n+1} \leq (1 + A)x_n + B, \quad n \geq 0$$

onde A e B são constantes positivas. Prove que

$$x_n \leq (1 + A)^n x_0 + \frac{(1 + A)^n - 1}{A} B, \quad n \geq 1.$$

Exercício 7 O problema de valor inicial $x' = -2x + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{6}t^4$, $x(0) = \frac{1}{8}$ tem a solução exata (verifique!) $\varphi(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{12}t^4$. Use o método de Euler com passos $h = 2^{-p}$, $p = 1, 2, \dots, 8$ para aproximar $\varphi(1)$. Verifique que não apenas $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(1,h)}{h}$ existe, mas também $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e(1,h)}{h^2}$ parece existir. Isto contradiz a teoria?

Exercício 8 Responda as seguintes questões relativas ao método de Heun

- Prove que o método tem ordem de consistência 2.
- Mostre que se f é Lipschitziana, então Φ também é. Obtenha a constante de Lipschitz para Φ em termos da constante de f .
- Verifique numericamente a ordem de convergência do método calculando aproximações para a solução do problema $x' = -2tx^2$, $x(0) = 1$ no intervalo $[0, 1]$ usando $h = 0.1, 0.05$ e 0.025 , comparando os erros entre a solução exata e as aproximações nas respectivas malhas.

Exercício 9 Que condições devem satisfazer os parâmetros a , c_1 e c_2 do método Runge-Kutta de dois estágios

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, \eta_j) \\ k_2 &= f(t_j + ah, \eta_j + ahk_1) \\ \eta_{j+1} &= \eta_j + h(c_1k_1 + c_2k_2) \end{aligned}$$

para garantir que ele tenha ordem 2? Verifique que os parâmetros dos métodos do ponto médio e de Heun satisfazem estas condições.

Exercício 10

- Partindo de $\eta_0 = 0.5$ no instante $t_0 = 0$, use o método de Heun com $h = 0.2$ para obter a aproximação em $t_1 = 0.2$ da solução do problema $x' = x - t^2 + 1$, $x(0) = 0.5$.
- Considere o sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + 0.1x^3$$

Partindo de $x(0) = 2$ e $y(0) = 0.5$, use o método do ponto médio para avançar um passo no tempo com $h = 0.02$.