Mecânica Quântica — 7600022

Quarta Lista — para praticar para a prova do dia 24/4/2017

1. Desenvolva o cálculo de todos os coeficientes de Clebsch-Gordan resultantes da soma de um momento angular com $\ell = 3/2$ e um spin $s = 1/2$.
2. Dado um momento angular $\ell \geq 1$, calcule os coeficientes de Clebsch-Gordan

$$\left(\begin{array}{c|c} \ell + \frac{1}{2} & \ell \frac{1}{2} \\ \ell - \frac{1}{2} & \ell - 1 \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

e

$$\left(\begin{array}{c|c} \ell + \frac{1}{2} & \ell \frac{1}{2} \\ \ell - \frac{1}{2} & \ell - \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

3. A partir dos resultados da questão anterior e das propriedades de inversão $z \rightarrow -z$ dos coeficientes de Clebsch-Gordan, expresse os autoestados $|j = \ell \pm 1/2, m_j = -\ell + 1/2\rangle$ na base dos $m_\ell l, m_s$.
4. A partir dos resultados da questão anterior, calcule $J_-|j = \ell \pm 1/2, m_j = -\ell + 1/2\rangle$. Comente os resultados.
5. A partir do resultado da questão 1, verifique que

$$\sum_{m_\ell, m_s} \left| C_{m_\ell, m_s}^{1,0} \right|^2 = 1.$$

6. O Hamiltoniano que descreve a interação entre dois spins $s_1 = 1/2$ e $s_2 = 1/2$ é

$$H = \lambda \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2.$$

Encontre os autoestados e autovalores de H , na base que achar mais conveniente. Especifique a degenerescência de cada autovalor.

7. A partir dos resultados do item anterior, calcule $\langle s = 1, m_s = 0 | S_{1z} | s = 0, m_s = 0 \rangle$ e, a partir do resultado, encontre o invariante $\langle 1 | S_1 | 0 \rangle$.
8. A partir do resultado do item anterior e do Teorema de Wigner-Eckart, calcule $\langle s = 1, m_s = 0 | S_{1x} | s = 0, m_s = 0 \rangle$. (Dica: escreva $S_{1x} = \sqrt{2}(S_{1,-1} - S_{1,+1})$).
9. O Hamiltoniano que descreve a interação entre dois spins $s_1 = 1/2$ e $s_2 = 1/2$ num campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$ é

$$H_B = \lambda \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 - 2 \frac{\mu_B}{\hbar} (S_{1z} + S_{2z}).$$

Encontre os autoestados e autovalores de H , na base que achar mais conveniente. Especifique a degenerescência de cada autovalor.

10. Considere o átomo de Hidrogênio, mas desconsidere o spin do elétron. Queremos calcular os elementos de matriz do operador posição $\vec{X}$ entre o estado $2p$ e o estado fundamental ($1s$). A sua tarefa é calcular o invariante $\langle \ell = 1 | X | \ell = 0 \rangle$.

11. Quando um átomo de hidrogênio é inserido num campo magnético $\vec{B} = B\hat{z}$, a interação com o campo magnético é dada pelo Hamiltoniano

$$H_B = \frac{\mu_B}{\hbar}(L_z + 2S_z) \equiv \frac{\mu_B}{\hbar}(J_z + S_z).$$

Para calcular as energias do átomo no campo magnético, precisamos determinar os elementos de matriz $\langle j, m_j, \ell, s | S_z | j, m'_j, \ell, s \rangle$ ($m_j, m'_j = -j, \dots, j$). Use o Teorema de Wigner-Eckart para mostrar que esses elementos de matriz são proporcionais a $\langle j, m_j, \ell, s | J_z | j, m'_j, \ell, s \rangle$, isto é, os dois elementos de matriz são relacionados por uma constante (que você não precisa determinar) que independe de m_j ou m'_j .