

Prova da Propriedade ii). (Se $a > b$ e $c > 0$, então $ac > bc$).

(def.)

$$\text{Se } a > b \Rightarrow (a - b) > 0.$$

Usando 1.2.1 (iii) temos $(a - b) \cdot c > 0$ ou $(ac - bc) > 0$ e finalmente, pela definição, $ac > bc$.

1.3 VALOR ABSOLUTO

1.3.1 Definição. O valor absoluto de a , denotado por $|a|$, é definido como

$$|a| = a, \text{ se } a \geq 0$$

$$|a| = -a, \text{ se } a < 0.$$

1.3.2 Interpretação Geométrica. Geometricamente o valor absoluto de a , também chamado módulo de a , representa a distância entre a e 0. Escreve-se então $|a| = \sqrt{a^2}$.

1.3.3 Propriedades.

(i) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$, onde $a > 0$.

(ii) $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ ou $x < -a$, onde $a > 0$.

(iii) Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

(iv) Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, então $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

(v) (Desigualdade triangular)

$$\text{Se } a, b \in \mathbb{R}, \text{ então } |a + b| \leq |a| + |b|.$$

(vi) Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $|a - b| \leq |a| + |b|$.

(vii) Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

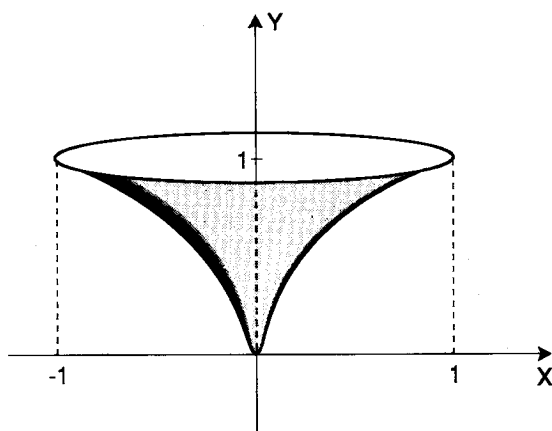


Figura 8-34

8.7 EXERCÍCIOS

Nos exercícios de 1 a 5, determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, em torno do eixo dos x , da região R delimitada pelos gráficos das equações dadas.

1. $y = x + 1, x = 0, x = 2$ e $y = 0$
2. $y = x^2 + 1, x = 0, x = 2$ e $y = 0$
3. $y = x^2$ e $y = x^3$
4. $y = \cos x, y = \sin x, x = 0$ e $x = \frac{\pi}{4}$
5. $y = x^3, x = -1, x = 1$ e $y = 0$

Nos exercícios de 6 a 10, determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos y , da região R delimitada pelos gráficos das equações dadas.

6. $y = \ln x, y = -1, y = 2$ e $x = 0$
7. $y = x^3$ e $y = x^2$
8. $x = y^2 + 1, x = \frac{1}{2}, y = -2$ e $y = 2$
9. $y = \frac{1}{x}, x = 0, y = \frac{1}{4}$ e $y = 4$
10. $x = 3 + \sin y, x = 0, y = -\frac{5\pi}{2}$ e $y = \frac{5\pi}{2}$

Nos exercícios de 11 a 16, determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação das regiões indicadas, ao redor dos eixos dados.

11. $y = 2x - 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$; ao redor do eixo dos x
12. $y^2 = 2x$, $x = 0$, $y = 0$ e $y = 2$; ao redor do eixo dos y
13. $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$ e $y = 2$; ao redor do eixo $y = 2$
14. $x = y^2$ e $x = 2 - y^2$; ao redor do eixo dos y
15. $y = x + x^2$, $y = x^2 - 1$ e $x = 0$; ao redor do eixo $y = 1$
16. $y = x^{2/3}$ e $y = 4$; ao redor dos eixos $x = -9$, $y = 0$ e $x = 0$
17. Encontrar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x , da região limitada por $y^2 = 16x$ e $y = 4x$.
18. Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = 2$, da região limitada por $y = 1 - x^2$, $x = -2$, $x = 2$ e $y = 2$.
19. Calcular o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = 2$, da região limitada por $y = 3 + x^2$, $x = -2$, $x = 2$ e $y = 2$.
20. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = -2$, da região limitada por $y = \cos x$, $y = -2$, $x = 0$ e $x = 2\pi$.
21. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = 2$, da região entre os gráficos de $y = \sin x$, $y = \sin^3 x$, de $x = 0$ até $x = \pi/2$

Nos exercícios de 22 a 27, calcular a área da superfície gerada pela rotação do arco de curva dado, em torno do eixo indicado.

- | | |
|---|---|
| 22. $y = 2x^3$, $0 \leq x \leq 2$; eixo dos x | 23. $x = \sqrt{y}$, $1 \leq y \leq 4$; eixo dos y |
| 24. $y = x^2$, $-2 \leq x \leq 2$; eixo dos x | 25. $y = \frac{1}{2}x$, $0 \leq x \leq 4$; eixo dos x |
| 26. $y = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$; eixo dos x | 27. $y = \sqrt{16 - x^2}$, $-3 \leq x \leq 3$; eixo dos x |

28. Calcular a área da superfície obtida pela revolução do arco da parábola $y^2 = 8x$, $1 \leq x \leq 12$, ao redor do eixo dos x .
29. Calcular a área da superfície do cone gerado pela revolução do segmento de reta $y = 4x$, $0 \leq x \leq 2$:
- (a) ao redor do eixo dos x ; (b) ao redor do eixo dos y .

8.8 COORDENADAS POLARES

Até o presente momento, localizamos um ponto no plano por meio de suas coordenadas cartesianas retangulares. Existem outros sistemas de coordenadas. Um sistema bastante utilizado é o sistema de coordenadas polares.

No sistema de coordenadas polares, as coordenadas consistem de uma distância e da medida de um ângulo em relação a um ponto fixo e a uma semireta fixa.

A Figura 8.35 ilustra um ponto P num sistema de coordenadas polares.

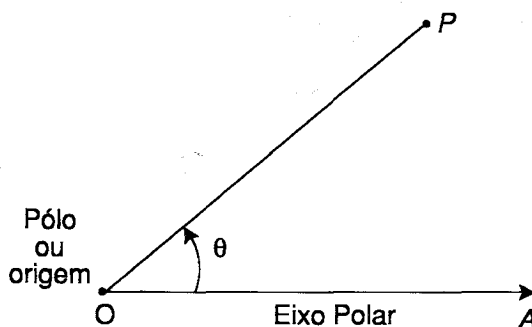


Figura 8-35

O ponto fixo, denotado por O , é chamado *pólo* ou *origem*.

A semireta fixa $\overrightarrow{OA}$ é chamada *eixo polar*.

O ponto P fica bem determinado através do par ordenado (r, θ) , onde $|r|$ representa a distância entre a origem e o ponto P , e θ representa a medida, em radianos, do ângulo orientado $\widehat{AOP}$.