

Aula 2 - Planejamento de Trajetória, Controle PID e UArm II

SEM5875 - Controle de Sistemas Robóticos

Universidade de São Paulo

Adriano A. G. Siqueira
Thiago Boaventura Cunha

- Cinamática direta

$$\mathbf{x} = f(\mathbf{q})$$

- Cinemática da velocidade (Jacobiana)

$$\dot{\mathbf{x}} = J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

- Derivando com relação ao tempo

$$\ddot{\mathbf{x}} = J(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

- Assumindo que $n = 6$ (J quadrada) e não há singularidades ($\det(J(\mathbf{q})) \neq 0$)

$$\ddot{\mathbf{q}} = J^{-1}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{x}} - J^{-1}(\mathbf{q})\dot{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

Dinâmica no Espaço Cartesiano

- Modelo Dinâmico no espaço das juntas

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + b(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \tau$$

- Substituindo

$$M(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{x}} + b(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - M(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})\dot{J}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}} = \tau$$

- Considerando $\tau = J^T(\mathbf{q})\mathbf{F}$

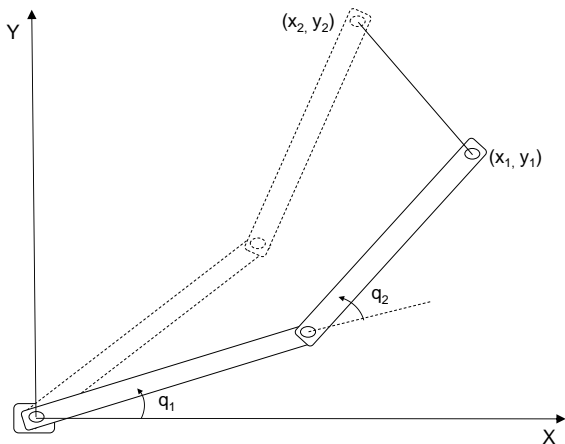
$$J^{-T}(\mathbf{q})M(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{x}} + J^{-T}(\mathbf{q})(b(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - M(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})\dot{J}(\mathbf{q})J^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}$$

$$\bar{M}\ddot{\mathbf{x}} + \bar{b} = \mathbf{F}$$

- Características que devem ser consideradas
 - Tipo do manipulador
 - Tipo de aplicação
 - Tipo da trajetória desejada
 - Atuadores e sensores utilizados
 - Tipo de transmissão entre atuadores e juntas
 - Presença de erros de modelagem e distúrbios

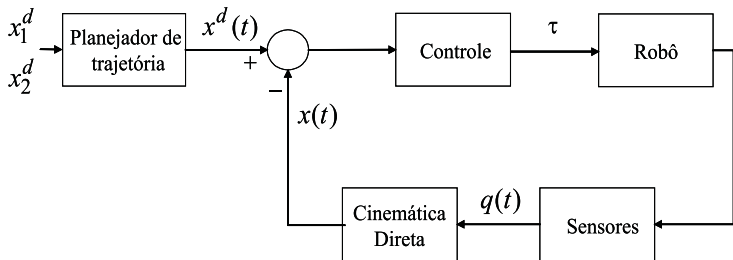
Estrutura de Controle de Robôs Manipuladores

- Planejamento no espaço operacional (cartesiano)



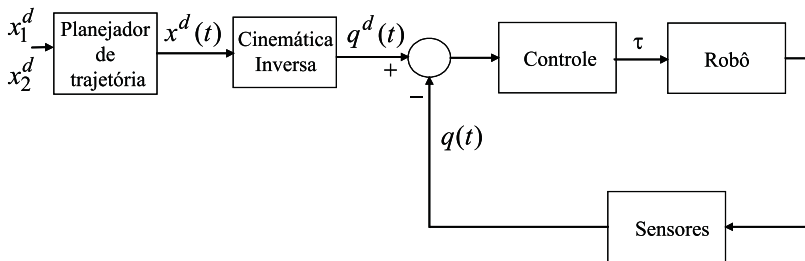
Estrutura de Controle de Robôs Manipuladores

- Planejamento no espaço operacional (cartesiano)
 - Controle cartesiano \Rightarrow cinemática direta



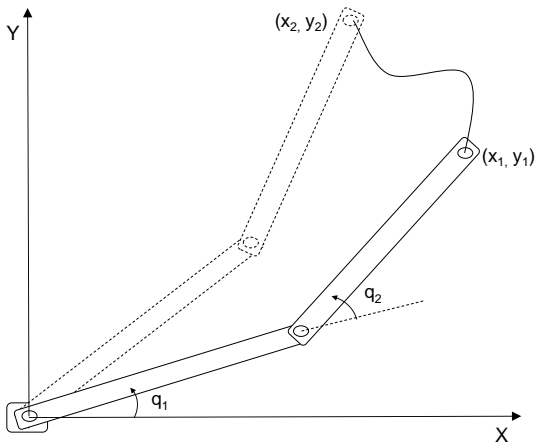
Estrutura de Controle de Robôs Manipuladores

- Planejamento no espaço operacional (cartesiano)
 - Controle cartesiano \Rightarrow cinemática direta
 - Controle no espaço das juntas \Rightarrow cinemática inversa de toda trajetória



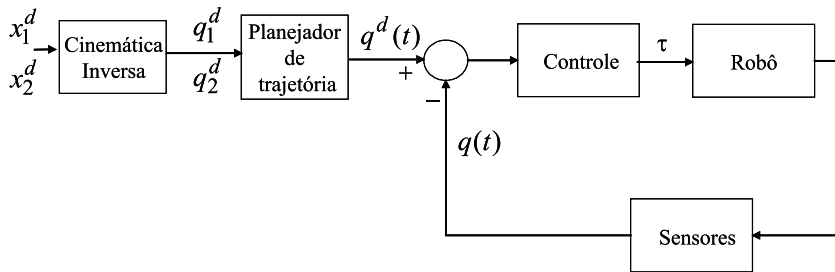
- KUKA KR 16: LIN(P2)

- Planejamento no espaço das juntas



Estrutura de Controle de Robôs Manipuladores

- Planejamento no espaço das juntas
 - Cinemática inversa apenas em dois pontos



- KUKA KR 16: PTP(P2)

Trajétoria desejada: polinômio do 3º grau

- Dados: $q_i^d(t_0)$, $\dot{q}_i^d(t_0)$, $q_i^d(t_f)$ e $\dot{q}_i^d(t_f)$
- Polinômio:

$$q_i^d(t) = a_i + b_i(t - t_0) + c_i(t - t_0)^2 + d_i(t - t_0)^3$$
$$\dot{q}_i^d(t) = b_i + 2c_i(t - t_0) + 3d_i(t - t_0)^2$$

- Substituindo:

$$q_i^d(t_0) = a_i$$
$$\dot{q}_i^d(t_0) = b_i$$
$$q_i^d(t_f) = a_i + b_i(t_f - t_0) + c_i(t_f - t_0)^2 + d_i(t_f - t_0)^3$$
$$= a_i + b_i T + c_i T^2 + d_i T^3$$
$$\dot{q}_i^d(t_f) = b_i + 2c_i T + 3d_i T^2$$

Trajétoria desejada: polinômio do 3º grau

- De forma matricial:

$$\begin{bmatrix} q_i^d(t_0) \\ \dot{q}_i^d(t_0) \\ q_i^d(t_f) \\ \dot{q}_i^d(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & T & T^2 & T^3 \\ 0 & 1 & 2T & 3T^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{bmatrix}$$

- Solução

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & T & T^2 & T^3 \\ 0 & 1 & 2T & 3T^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_i^d(t_0) \\ \dot{q}_i^d(t_0) \\ q_i^d(t_f) \\ \dot{q}_i^d(t_f) \end{bmatrix}$$

Trajétoria desejada: função linear com extremidades parabólicas

- Dados: $q_i^d(t_0)$, $\dot{q}_i^d(t_0)$, $q_i^d(t_f)$, $\dot{q}_i^d(t_f)$, v_i e t_b
- Trajetória:

$$q_i^d(t) = \begin{cases} a_i + b_i(t - t_0) + c_i(t - t_0)^2, & t_0 \leq t \leq t_0 + t_b \\ d_i + v_i t, & t_0 + t_b \leq t \leq t_f - t_b \\ e_i + f_i(t - t_f) + g_i(t - t_f)^2, & t_f - t_b \leq t \leq t_f \end{cases}$$

- Solução

$$a_i = q_i^d(t_0) \quad b_i = \dot{q}_i^d(t_0) \quad c_i = \frac{v_i - \dot{q}_i^d(t_0)}{2t_b}$$

$$d_i = \frac{2q_i^d(t_0) + (\dot{q}_i^d(t_0) - v_i)t_b - 2vt_0}{2} \quad e_i = q_i^d(t_f) \quad f_i = \dot{q}_i^d(t_f)$$

$$g_i = \frac{\dot{q}_i^d(t_f) - v_i}{2t_b} \quad t_f = \frac{2q_i^d(t_f) + (\dot{q}_i^d(t_f) + v_i)t_b - 2d_i}{2v_i}$$

- Dinâmica do manipulador

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + F(\dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

- Dinâmica do atuador

$$J_M\ddot{\mathbf{q}}_M + B\dot{\mathbf{q}}_M + F_M + R\boldsymbol{\tau} = K_M\mathbf{v}$$

- $J_M = \text{diag}\{J_{Mi}\} \Rightarrow$ matriz diagonal dos momentos de inércia dos motores
- $B = \text{diag}\{B_{Mi} + K_{bi}K_{Mi}/R_{ai}\} \Rightarrow$ matriz de amortecimento
- $F_M = \text{vec}\{F_{Mi}\} \Rightarrow$ vetor de atrito
- $R = \text{diag}\{r_i\} \Rightarrow$ matriz das reduções das engrenagens
- $\mathbf{q}_M \Rightarrow$ coordenadas dos eixos dos motores
- $K_M = \text{diag}\{K_{Mi}/R_{ai}\} \Rightarrow$ matriz de constante de torque

Dinâmica dos Atuadores

- Reduções das engrenagens

$$\mathbf{q}_i = r_i \mathbf{q}_{Mi} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{q} = R \mathbf{q}_M$$

- Substituindo na dinâmica dos atuadores

$$R^{-1} J_M \ddot{\mathbf{q}} + R^{-1} B \dot{\mathbf{q}} + F_M + R \tau = K_M \mathbf{v}$$

- Substituindo na dinâmica do manipulador

$$R^{-1} J_M \ddot{\mathbf{q}} + R^{-1} B \dot{\mathbf{q}} + F_M + R (M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + F(\dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{q})) = K_M \mathbf{v}$$

- Simplificando

$$(J_M + R^2 M(\mathbf{q})) \ddot{\mathbf{q}} + (B + R^2 C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{q}} + (R F_M + R^2 F(\dot{\mathbf{q}})) + R^2 G(\mathbf{q}) = R K_M \mathbf{v}$$

$$M'(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + F'(\dot{\mathbf{q}}) + G'(\mathbf{q}) = K' \mathbf{v}$$

- Decomposição em componentes

$$(J_{Mi} + r_i^2 m_{ii}) \ddot{\mathbf{q}}_i + B_i \dot{\mathbf{q}}_i + RF_{Mi} = \frac{r_i K_M}{R_{ai}} \mathbf{v} - r_i^2 \mathbf{d}_i \quad i = 1, \dots, n$$

- sendo

$$\mathbf{d}_i = \sum_{j \neq i} m_{ij} \ddot{\mathbf{q}}_{ij} + \sum_{j,k} C_{jki} \dot{\mathbf{q}}_j \dot{\mathbf{q}}_k + F_i + G_i$$

- $m_{ij} \Rightarrow$ elementos fora da diagonal da matriz $M'(\mathbf{q})$
- $C_{jki} \Rightarrow$ componentes de $C'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$
- Conclusão: se r_i é pequeno $\Rightarrow n$ equações desacopladas de segunda ordem com coeficientes constantes

- Erro de acompanhamento de trajetória

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}^d(t) - \mathbf{q}(t)$$

- Controle independente das juntas (PD)

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \mathbf{e} + K_d \dot{\mathbf{e}}$$

sendo K_d e K_p matrizes diagonais. Valores altos de ganho para eliminar distúrbios. Erro de regime devido aos torques gravitacionais.

- Controle PD com compensação gravitacional

$$\boldsymbol{\tau} = K_p \mathbf{e} + K_d \dot{\mathbf{e}} + G(\mathbf{q})$$

Controle Proporcional-Integral-Derivativo

- Controle Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

$$\tau = K_p \mathbf{e} + K_i \int \mathbf{e} dt + K_d \dot{\mathbf{e}}$$

- Valores altos de ganho para eliminar distúrbios
- Erro de regime nulo

Controlador PID

- $P \implies$ Proporcional
- $I \implies$ Integral
- $D \implies$ Derivativo

Controlador Proporcional

- Entrada de controle proporcional ao erro

$$u(t) = K_P e(t)$$

- Função de transferência

$$C(s) = K_P$$

- Exemplo: Sistema de Segunda Ordem

$$G(s) = \frac{10}{(s + 5)(s + 10)}$$

- Sistemas de ordem maior: instabilidade
- Redução do erro de regime X estabilidade
- Exemplo: Sistema de Terceira Ordem

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 1)(s + 5)}$$

Controlador Integral

- Entrada de controle proporcional à integral do erro

$$u(t) = K_I \int_{t_0}^t e d\eta$$

- Função de transferência

$$C(s) = \frac{K_I}{s}$$

- Erro de regime nulo e independente do valor de K
- Exemplo: Sistema de Segunda Ordem

$$G(s) = \frac{10}{(s + 5)(s + 10)}$$

Controlador Proporcional-Integral

- Entrada de controle proporcional ao erro e à integral do erro

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_{t_0}^t e d\eta$$

- Função de transferência

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

- Exemplo: Sistema de Segunda Ordem

$$G(s) = \frac{10}{(s + 5)(s + 10)}$$

- Entrada de controle proporcional à derivada do erro

$$u(t) = K_D \dot{e}$$

- Função de transferência

$$C(s) = K_D s$$

- Natureza antecipatória
- Não utilizado sozinho ($\dot{e} = 0 \Rightarrow u = 0$)
- Aumenta estabilidade
- Exemplo: Sistema de Segunda Ordem

$$G(s) = \frac{10}{(s + 5)(s + 10)}$$

- Entrada de controle proporcional ao erro, à integral do erro e à derivada do erro

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_{t_0}^t e d\eta + K_D \dot{e}$$

- Função de transferência

$$C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

- Pólos podem ser alocados em qualquer posição

Regras de Ziegler-Nichols

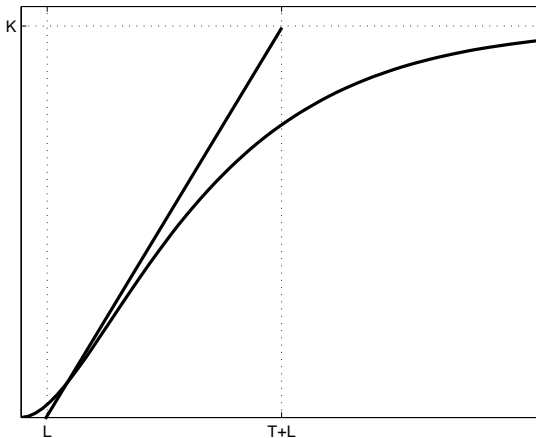
- Ajuste inicial
- Modelo do sistema como:

$$G(s) = \frac{Ke^{-t_d s}}{(\tau s + 1)}$$

- Taxa de decaimento: 0,25
- Fator de amortecimento: $\zeta = 0,21$

Regras de Ziegler-Nichols

- Método 1: Entrada degrau ao sistema



- Método 1: Entrada degrau ao sistema

Controlador	K_P	T_I	T_D
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2\frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

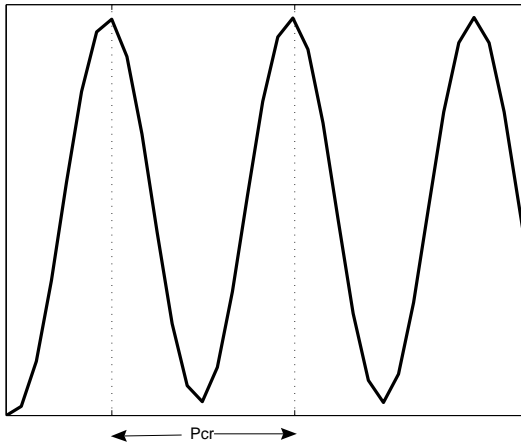
- Método 1: Entrada degrau ao sistema
- Exemplo:

$$G(s) = \frac{10}{(s + 5)(s + 10)}$$

- $L = 0.04$ e $T = 0.4$
- $K_P = 12$, $T_I = 0.08$ e $T_D = 0.02$
- $K_I = \frac{K_P}{T_I} = 150$
- $K_D = K_P T_D = 0.24$

Regras de Ziegler-Nichols

- Método 2: Oscilação contínua com ganho proporcional $\Rightarrow K_{cr}$



- Método 2: Oscilação contínua com ganho proporcional

Controlador	K_P	T_I	T_D
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$\frac{1}{8}P_{cr}$

- Método 2: Oscilação contínua com ganho proporcional
- Exemplo:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

- $K_{cr} = 30$ e $P_{cr} = 2.81$
- $K_P = 18$, $T_I = 1.40$ e $T_D = 0.35$

- Para T_0 pequeno

$$\tau(k) = K_p \left[\mathbf{e}(k) + \frac{T_0}{T_I} \sum_{v=0}^{k-1} \mathbf{e}(v) + \frac{T_D}{T_0} (\mathbf{e}(k) - \mathbf{e}(k-1)) \right]$$

- Forma recursiva

$$\tau(k) = \tau(k-1) + q_0 \mathbf{e}(k) + q_1 \mathbf{e}(k-1) + q_2 \mathbf{e}(k-2)$$

$$q_0 = K_p \left(1 + \frac{T_D}{T_0}\right)$$

$$q_1 = -K_p \left(1 + \frac{2T_D}{T_0} - \frac{T_0}{T_I}\right)$$

$$q_2 = K_p \frac{T_D}{T_0}$$

- Componentes

$$\tau(k) = \tau_P(k) + \tau_I(k) + \tau_D(k)$$

$$\tau_P(k) = K_p e(k)$$

$$\tau_I(k) = \tau(k-1) + K_p \frac{T_0}{T_I} e(k-1)$$

$$\tau_D(k) = K_p \frac{T_D}{T_0} [e(k) - e(k-1)]$$

- O robô UArm II é um manipulador planar de três juntas rotacionais e um efetuador.
- UArm - Underactuated Arm

