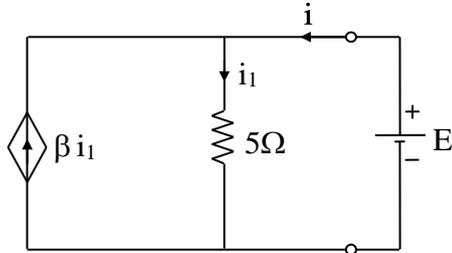


## PSI3213 – CIRCUITOS ELÉTRICOS II

### Solução dos Exercícios Complementares Correspondentes à Matéria da 2ª Prova

1 – a)  $i_L(0_-) = 0$  ( não há geradores independentes )

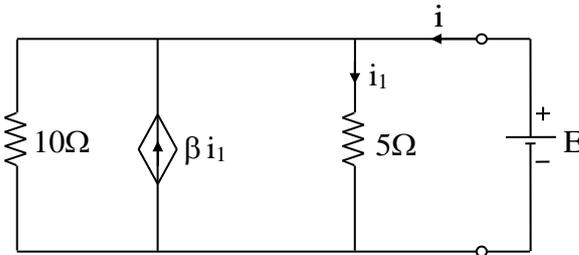
Resistência equivalente vista pelo indutor:



$$\left. \begin{aligned} i &= i_1 - \beta i_1 \\ i_1 &= \frac{E}{5} \end{aligned} \right\} i = \frac{E}{5} - \beta \frac{E}{5} = (1 - \beta) \frac{E}{5}$$

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{5}{1 - \beta} > 0 \text{ se } \beta > 1$$

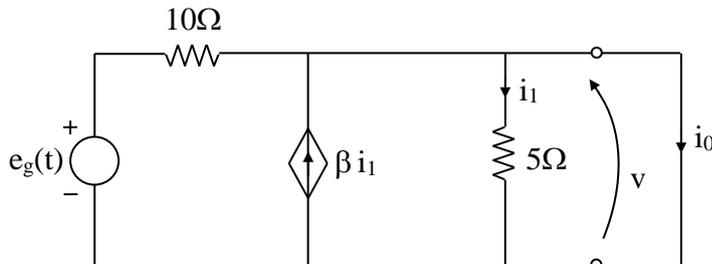
b)  $t > 0$ :  $R_0$



$$i = \frac{E}{5} + \frac{E}{10} - \beta \frac{E}{5} = \frac{3 - \beta}{10} E$$

$$\Rightarrow R_0 = \frac{E}{i} = \frac{10}{3 - \beta} (\Omega)$$

Corrente de curto-circuito:



$$v = 0 \Rightarrow i_1 = 0$$

$$\Rightarrow i_0 = \frac{e_g}{10\Omega}$$

$$\therefore e_0 = i_0 \cdot R_0 = \frac{e_g}{3 - \beta}$$

c)  $\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{2(3 - \beta)}{10} = \frac{3 - \beta}{5} (s)$

d) Solução particular ( regime )

$$\hat{I}_L = \underbrace{\frac{\sqrt{2} \cdot 20 \angle 90^\circ}{3}}_{\hat{E}_g \text{ para } \beta=0} \cdot \frac{1}{R_0 + j\omega \cdot L} = j \frac{20\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\frac{10}{3} + j \cdot \frac{10}{3}} = \frac{j 2\sqrt{2}}{1 + j} = 2 \angle 45^\circ$$

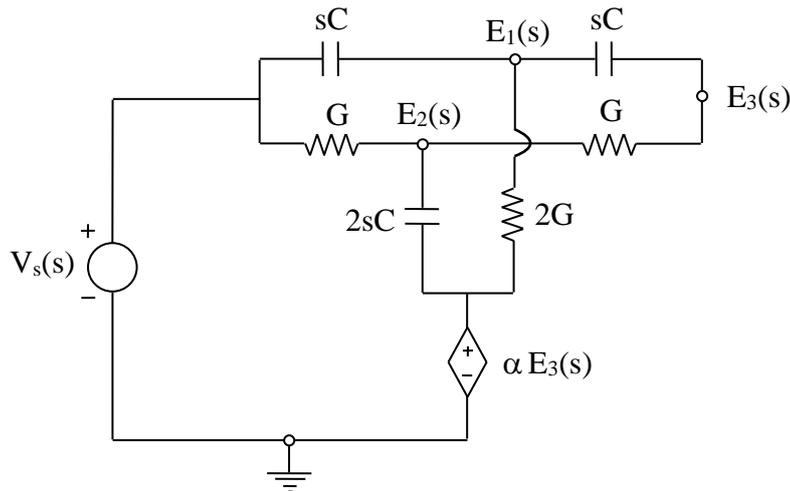
$$i_{L,p}(t) = 2 \cos\left(\frac{5}{3}t + 45^\circ\right) (A,s)$$

$$\tau = \frac{3}{5} \quad \text{para} \quad \beta = 0$$

$$i_L(t) = Ae^{-5t/3} + 2\cos\left(\frac{5}{3}t + 45^\circ\right) \quad (\text{A},s)$$

$$i_L(0) = A \Rightarrow A = -2\cos(45^\circ) = -\sqrt{2}$$

2 – Reescrevendo o circuito no domínio de Laplace, com condições iniciais nulas, temos:



$$G = \frac{1}{R}$$

Incógnitas:  $E_1(s)$ ,  $E_2(s)$  e  $E_3(s)$ .

1ª LK nó 1:

$$sC [E_1(s) - V_s(s)] + sC [E_1(s) - E_3(s)] + 2G [E_1(s) - \alpha E_3(s)] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{2(sC + G) E_1(s) - (sC + 2\alpha G) E_3(s) = sC V_s(s)}$$

1ª LK nó 2:

$$G [E_2(s) - V_s(s)] + G [E_2(s) - E_3(s)] + 2sC [E_2(s) - \alpha E_3(s)] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{2(sC + G) E_2(s) - (G + 2\alpha sC) E_3(s) = G V_s(s)}$$

1ª LK nó 3:

$$sC [E_3(s) - E_1(s)] + G [E_3(s) - E_2(s)] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{-sC E_1(s) - G E_2(s) + (sC + G) E_3(s) = 0}$$

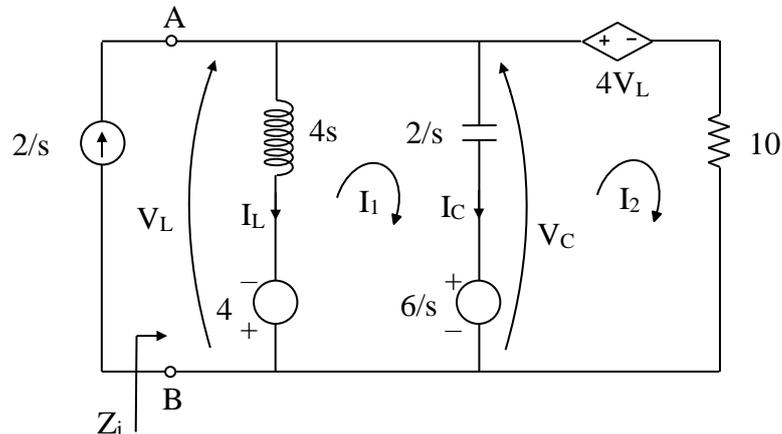
Montando a equação matricial de análise nodal, temos:

$$\begin{bmatrix} 2(sC + G) & 0 & -(sC + 2\alpha G) \\ 0 & 2(sC + G) & -(G + 2\alpha sC) \\ -sC & -G & sC + G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \\ E_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sCV_s(s) \\ GV_s(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo, os valores pedidos são:

$$\begin{cases} X = 2(sC + G) \\ Y = -(sC + 2\alpha G) \\ Z = -(G + 2\alpha sC) \\ W = sCV_s(s) \end{cases}$$

3 – a) Circuito para AM em Laplace:



2ª LK malha 1:

$$4 + 4s \left[ I_1(s) - \frac{2}{s} \right] + \frac{2}{s} [I_1(s) - I_2(s)] + \frac{6}{s} = 0$$

$$\Rightarrow \left( 4s + \frac{2}{s} \right) I_1(s) - \frac{2}{s} I_2(s) = 4 - \frac{6}{s}$$

2ª LK malha 2:

$$-\frac{6}{s} + \frac{2}{s} [I_2(s) - I_1(s)] + 4V_L(s) + 10I_2(s) = 0$$

Substituindo  $V_L(s) = 4s \left[ \frac{2}{s} - I_1(s) \right] - 4 = 4 - 4sI_1(s)$ , temos

$$-\frac{6}{s} + \frac{2}{s} [I_2(s) - I_1(s)] + 4[4 - 4sI_1(s)] + 10I_2(s) = 0$$

$$\Rightarrow -\left( 16s + \frac{2}{s} \right) I_1(s) + \left( \frac{2}{s} + 10 \right) I_2(s) = -16 + \frac{6}{s}$$

Equação matricial de AM:

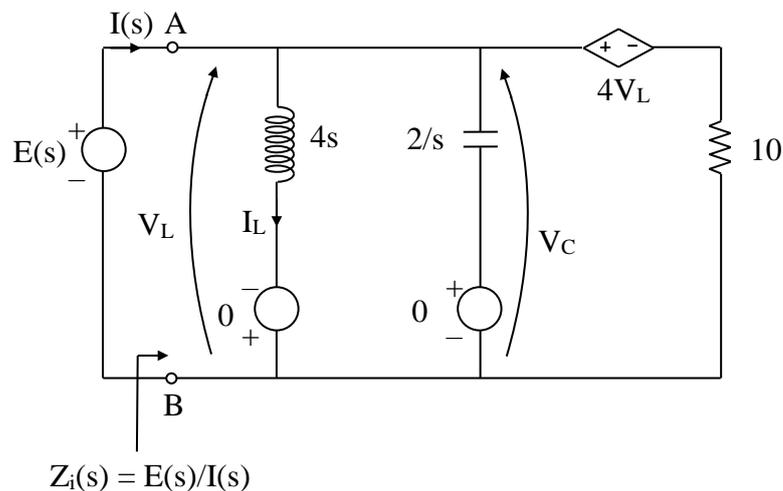
$$\begin{bmatrix} 4s + \frac{2}{s} & -\frac{2}{s} \\ -\left(16s + \frac{2}{s}\right) & \frac{2}{s} + 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - \frac{6}{s} \\ -16 + \frac{6}{s} \end{bmatrix}$$

b) Equação característica:

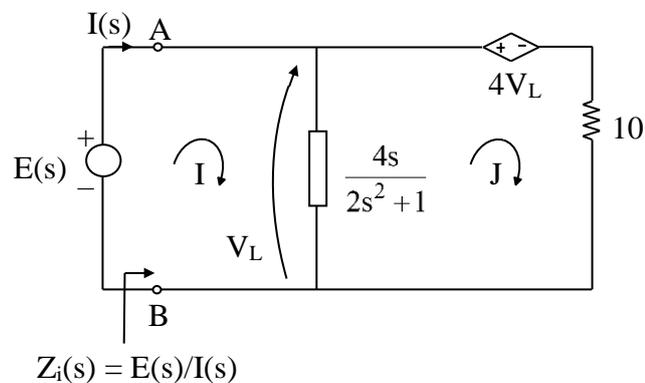
$$\begin{vmatrix} 4s + \frac{2}{s} & -\frac{2}{s} \\ -\left(16s + \frac{2}{s}\right) & \frac{2}{s} + 10 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 10s^2 - 6s + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = \frac{3 + j\sqrt{41}}{10} \\ s_2 = \frac{3 - j\sqrt{41}}{10} \end{cases}$$

A rede livre é instável pois a parte real das suas FCPs é positiva.

c) Para descobrir a impedância de entrada, vamos analisar o circuito com condições iniciais nulas (geradores independentes inativados) e excitado por um gerador de tensão  $E(s)$  entre os terminais A e B:



Para encontrar  $I(s)$  e calcular  $Z_i(s) = E(s)/I(s)$ , vamos primeiramente associar as impedâncias do indutor e do capacitor, chegando no seguinte circuito:



2ª LK malha I:  $\frac{4s}{2s^2 + 1} [I(s) - J(s)] = E(s) \Leftrightarrow 4sI(s) - 4sJ(s) = (2s^2 + 1)E(s)$

$$2^{\text{a}} \text{ LK malha J: } \frac{4s}{2s^2 + 1} [J(s) - I(s)] + 4V_L(s) + 10J(s) = 0$$

$$\text{Substituindo } V_L(s) = \frac{4s}{2s^2 + 1} [I(s) - J(s)], \text{ temos}$$

$$\begin{aligned} \frac{4s}{2s^2 + 1} [J(s) - I(s)] + \frac{16s}{2s^2 + 1} [I(s) - J(s)] + 10J(s) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{12s}{2s^2 + 1} I(s) + \left(10 - \frac{12s}{2s^2 + 1}\right) J(s) &= 0 \Leftrightarrow 12sI(s) + (20s^2 - 12s + 10)J(s) = 0 \end{aligned}$$

Equação matricial de AM:

$$\begin{bmatrix} 4s & -4s \\ 12s & 20s^2 - 12s + 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(s) \\ J(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2s^2 + 1)E(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo I(s) por Cramer, temos

$$I(s) = \frac{\begin{vmatrix} (2s^2 + 1)E(s) & -4s \\ 0 & 20s^2 - 12s + 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4s & -4s \\ 12s & 20s^2 - 12s + 10 \end{vmatrix}} = \frac{(2s^2 + 1)(20s^2 - 12s + 10)}{80s^3 + 40s} E(s)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} Z_i(s) &= \frac{E(s)}{I(s)} = \frac{80s^3 + 40s}{(2s^2 + 1)(20s^2 - 12s + 10)} = \frac{20s}{10s^2 - 6s + 5} \\ \Rightarrow Z_i(s) &= \frac{E(s)}{I(s)} = \frac{2s}{s^2 - 0,6s + 0,5} \end{aligned}$$

4 – a) Vamos começar fazendo a análise de malhas do circuito no domínio do tempo:

2<sup>a</sup> LK malha 1:

$$R_1 i_1(t) + L \frac{d(i_1(t) - i_2(t))}{dt} - |M| \frac{di_3(t)}{dt} = e_s(t)$$

2<sup>a</sup> LK malha 2:

$$L \frac{d(i_2(t) - i_1(t))}{dt} + |M| \frac{di_3(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_2(\tau) d\tau = 0$$

2<sup>a</sup> LK malha 3:

$$L \frac{di_3(t)}{dt} + |M| \frac{d(i_2(t) - i_1(t))}{dt} + R_2 i_3(t) = 0$$

Transformando as equações em Laplace com condições iniciais nulas, temos

2<sup>a</sup> LK malha 1:

$$\begin{aligned} R_1 I_1(s) + sL[I_1(s) - I_2(s)] - s|M|I_3(s) &= E_s(s) \\ \Rightarrow (R_1 + sL)I_1(s) - sLI_2(s) - s|M|I_3(s) &= E_s(s) \end{aligned}$$

2ª LK malha 2:

$$\begin{aligned} sL[I_2(s) - I_1(s)] + s|M|I_3(s) + \frac{1}{sC}I_2(s) &= 0 \\ \Rightarrow -sLI_1(s) + \left(sL + \frac{1}{sC}\right)I_2(s) + s|M|I_3(s) &= 0 \end{aligned}$$

2ª LK malha 3:

$$\begin{aligned} sLI_3(s) + s|M|[I_2(s) - I_1(s)] + R_2 I_3(s) &= 0 \\ \Rightarrow -s|M|I_1(s) + s|M|I_2(s) + (R_2 + sL)I_3(s) &= 0 \end{aligned}$$

Equação matricial de AM:

$$\begin{bmatrix} R_1 + sL & -sL & -s|M| \\ -sL & sL + \frac{1}{sC} & s|M| \\ -s|M| & s|M| & R_2 + sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Com os valores fornecidos no enunciado, temos  $|M| = k$  e a equação matricial fica:

$$\begin{bmatrix} 1+s & -s & -ks \\ -s & s + \frac{1}{s} & ks \\ -ks & ks & 1+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s(s) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b1) Resolvendo  $I_1(s)$  por Cramer,

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} E_s(s) & -s & 0 \\ 0 & s + \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 1+s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+s & -s & 0 \\ -s & s + \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 1+s \end{vmatrix}} = \frac{\left(s + \frac{1}{s}\right)(1+s) E_s(s)}{(1+s)^2 \left(s + \frac{1}{s}\right) - s^2(1+s)} \Rightarrow \frac{I_1(s)}{E_s(s)} = \frac{s^2 + 1}{s^2 + s + 1}$$

Note que, como não há acoplamento, poderíamos ter encontrado a função de rede diretamente por associação de admitâncias, ou seja,

$$Y_1(s) = \frac{I_1(s)}{E_s(s)} = \frac{R_1 \left( \frac{1}{sL} + sC \right)}{R_1 + \frac{1}{sL} + sC} \Rightarrow Y_1(s) = \frac{I_1(s)}{E_s(s)} = \frac{\frac{1}{s} + s}{1 + \frac{1}{s} + s} = \frac{s^2 + 1}{s^2 + s + 1}.$$

b2) Resolvendo  $I_1(s)$  por Cramer,

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} E_s(s) & -s & -s \\ 0 & s + \frac{1}{s} & s \\ 0 & s & 1+s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+s & -s & -s \\ -s & s + \frac{1}{s} & s \\ -s & s & 1+s \end{vmatrix}} = \frac{\left( s + \frac{1}{s} \right) (1+s) - s^2}{(1+s)^2 \left( s + \frac{1}{s} \right) + 2s^3 - s^2 \left( s + \frac{1}{s} \right) - 2s^2 (1+s)} E_s(s) \Rightarrow \frac{I_1(s)}{E_s(s)} = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 2s + 1}$$

5 – a) Nas convenções do circuito da Figura 3 da Lista Complementar 2, temos

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + |M| \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + |M| \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

Transformando esse sistema de equações em Laplace e reescrevendo-o matricialmente, resulta

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & +|M| \\ +|M| & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_1(s) - i_1(0_-) \\ sI_2(s) - i_2(0_-) \end{bmatrix}.$$

Como  $i_1(0_-) = -i_{L1}(0_-) = -\alpha$  e  $i_2(0_-) = i_{L2}(0_-) = \beta$ , temos

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & +|M| \\ +|M| & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI_1(s) + \alpha \\ sI_2(s) - \beta \end{bmatrix}.$$

Comparando essa equação matricial com a equação fornecida no enunciado, encontramos

$$\left. \begin{array}{l} L_1 = 4 \text{ H} \\ L_2 = 1 \text{ H} \\ |M| = 1 \text{ H} \end{array} \right\} k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = 0,5$$

$$\alpha = 5 \text{ A}$$

$$\beta = 10 \text{ A}$$

b) Vamos começar fazendo a análise de malhas do circuito no domínio do tempo:

2ª LK malha 1:

$$L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + |M| \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t [i_1(\tau) - i_2(\tau)] d\tau = e_s(t)$$

2ª LK malha 2:

$$L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + |M| \frac{di_1(t)}{dt} + Ri_2(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t [i_2(\tau) - i_1(\tau)] d\tau = 0$$

Transformando as equações em Laplace, temos

2ª LK malha 1:

$$\begin{aligned} sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(0_-) + s|M|I_2(s) - |M|i_2(0_-) + \frac{I_1(s) - I_2(s)}{sC} + \frac{v_c(0_-)}{s} &= E_s(s) \\ \Rightarrow \left( sL_1 + \frac{1}{sC} \right) I_1(s) + \left( s|M| - \frac{1}{sC} \right) I_2(s) &= E_s(s) - \frac{v_c(0_-)}{s} + L_1 i_1(0_-) + |M|i_2(0_-) \end{aligned}$$

2ª LK malha 2:

$$\begin{aligned} sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(0_-) + s|M|I_1(s) - |M|i_1(0_-) + RI_2(s) + \frac{I_2(s) - I_1(s)}{sC} - \frac{v_c(0_-)}{s} &= 0 \\ \Rightarrow \left( s|M| - \frac{1}{sC} \right) I_1(s) + \left( sL_2 + R + \frac{1}{sC} \right) I_2(s) &= \frac{v_c(0_-)}{s} + L_2 i_2(0_-) + |M|i_1(0_-) \end{aligned}$$

Equação matricial de AM:

$$\begin{bmatrix} sL_1 + \frac{1}{sC} & s|M| - \frac{1}{sC} \\ s|M| - \frac{1}{sC} & sL_2 + R + \frac{1}{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s(s) - \frac{v_c(0_-)}{s} + L_1 i_1(0_-) + |M|i_2(0_-) \\ \frac{v_c(0_-)}{s} + L_2 i_2(0_-) + |M|i_1(0_-) \end{bmatrix}$$

Comparando essa equação matricial com a equação fornecida no enunciado, encontramos  $R = 10 \Omega$  e  $C = 0,5 \text{ F}$ .

c) Comparando a equação matricial obtida no item b) com a equação de AM fornecida no enunciado, temos

$$\begin{aligned} \gamma &= v_c(0_-) = 5 \text{ V} \\ E_s(s) &= \frac{1}{s^2 + 4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2 + 4} \longleftrightarrow e_s(t) = \frac{1}{2} \text{sen}(2t)H(t) \end{aligned}$$

d) Tomando a equação matricial de AM obtida no item b), adotando condições iniciais nulas e substituindo

$$\begin{aligned}
 s &\rightarrow j\omega \text{ com } \omega = 2 \text{ rad/s} \\
 E_s(s) &\rightarrow \hat{E}_s = 10 \angle 45^\circ \text{ V} \\
 I_1(s) &\rightarrow \hat{I}_1, \quad I_2(s) \rightarrow \hat{I}_2 \\
 |M| &\rightarrow \sqrt{L_1 L_2} \text{ pois } k = 1
 \end{aligned}$$

resulta a seguinte equação matricial de AM em RPS:

$$\begin{bmatrix}
 j\left(2L_1 - \frac{1}{2C}\right) & j\left(2\sqrt{L_1 L_2} + \frac{1}{2C}\right) \\
 j\left(2\sqrt{L_1 L_2} + \frac{1}{2C}\right) & j\left(2L_2 - \frac{1}{2C}\right) + R
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \hat{I}_1 \\
 \hat{I}_2
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 10 \angle 45^\circ \\
 0
 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, podemos substituir  $L_1 = 4 \text{ H}$ ,  $L_2 = 1 \text{ H}$  e  $R = 10 \Omega$ , obtendo

$$\begin{bmatrix}
 j7 & j5 \\
 j5 & j+10
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \hat{I}_1 \\
 \hat{I}_2
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 10 \angle 45^\circ \\
 0
 \end{bmatrix}.$$

### Testes

1 – A equação matricial de análise de malhas no domínio de Laplace (condições iniciais nulas) do circuito da Figura 6 é dada por :

$$\begin{bmatrix} 5 & 20 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & -1 \\ -5 & 0 & 5+0,5s & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \\ V(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_g(s) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Os valores de  $\beta$  e  $r$  são respectivamente :

- a) 2 ;  $2 \Omega$
- b) -2 ;  $1 \Omega$
- c) 20 ;  $-2 \Omega$
- d) -10 ;  $-1 \Omega$
- e) n.d.a.

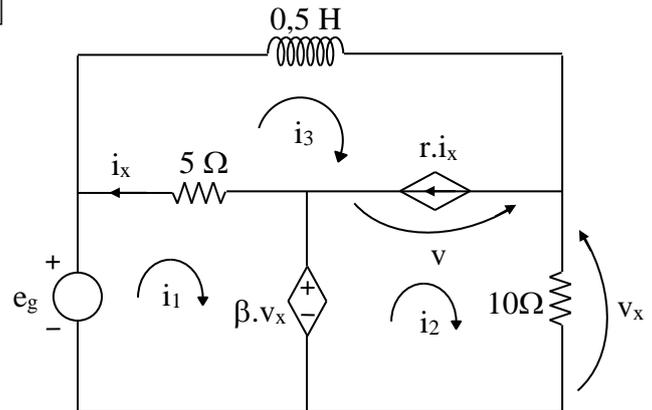


Figura 6

### Resolução:

- 2ª LK na malha 2 em Laplace com condições iniciais nulas:

$$\begin{aligned} -\beta V_x(s) - V(s) + 10I_2(s) &= 0 \\ &= 10I_2(s) \\ \Rightarrow 10(1-\beta)I_2(s) - V(s) &= 0 \end{aligned}$$

Comparando com a 2ª linha da equação matricial fornecida, concluímos que

$$1-\beta = -1 \Rightarrow \beta = 2$$

- Equação adicional de AM para compensar a incógnita  $V(s)$ :

$$\begin{aligned} I_3(s) - I_2(s) &= rI_x(s) = r[I_3(s) - I_1(s)] \\ \Rightarrow rI_1(s) - I_2(s) + (1-r)I_3(s) &= 0 \end{aligned}$$

Comparando com a 4ª linha da equação matricial fornecida, concluímos que  $r = 2 \Omega$ .

2 – O gerador de Thévenin equivalente à rede da Figura 6, no domínio de Laplace e com condições iniciais nulas, tem  $E_0(s)$  e  $Z_0(s)$  iguais, respectivamente, a:

- a)  $I_g(s)/2s$ ,  $(2s + 2)$
- b)  $2s \cdot I_g(s)$ ,  $(2s + 2)$
- c)  $2s \cdot I_g(s)$ ,  $(s + 2)$
- d)  $4s \cdot I_g(s)$ ,  $2$
- e) n.d.a.

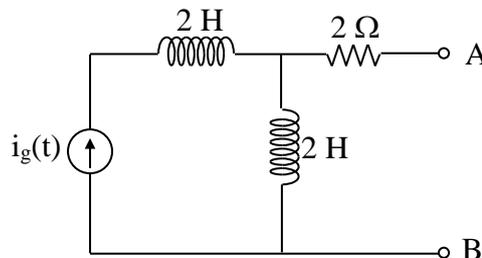


Figura 7

### Resolução:

- Tensão em aberto:  $E_0(s) = s2I_g(s) = 2sI_g(s)$ .
- Impedância vista: trocando o gerador de corrente por um aberto, temos  $Z_0(s) = s2 + 2 = 2s + 2$ .

Os testes de 3 a 6 referem-se ao circuito da Figura 7.

3 – A chave está em A há muito tempo e passa instantaneamente para a posição B em  $t = 0$ . A corrente  $i_1(0_-)$  vale:

- a) 5 A
- b) 0
- c) 2 A
- d) 2,5 A
- e) n.d.a.

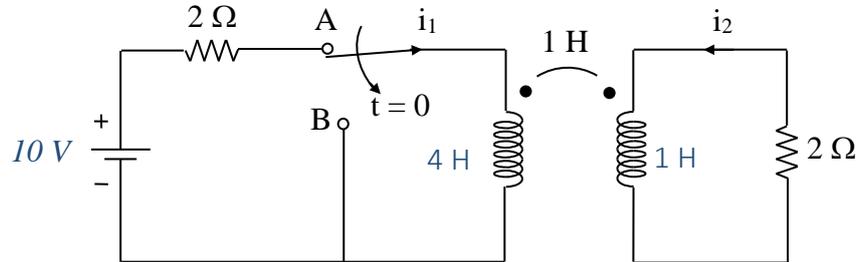


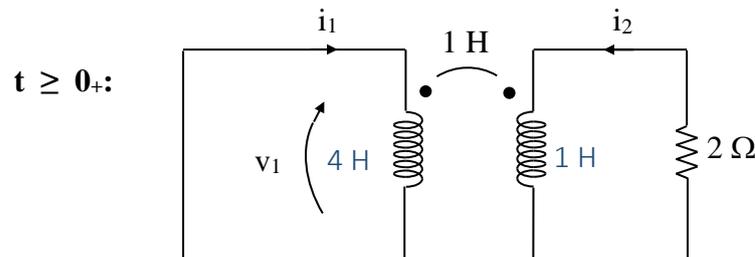
Figura 8

**Resolução:** Em regime DC, ambos os indutores podem ser substituídos por curtos-circuitos e temos  $i_1(0_-) = \frac{10}{2} = 5 \text{ A}$  e  $i_2(0_-) = \frac{0}{2} = 0$ .

4 – A corrente  $i_1(\infty)$  vale:

- a) 5 A
- b) 0
- c) 2 A
- d) 2,5 A
- e) n.d.a.

**Resolução:** Inicialmente, notamos que o indutor de 4 H tem inércia à variação de corrente e  $i_1(0_-) = i_1(0_+) = 5 \text{ A}$ . Além disso, o mesmo argumento se aplica ao indutor de 1 H e  $i_2(0_-) = i_2(0_+) = 0$ . Em regime, os indutores podem ser substituídos por curtos-circuitos e, com o resistor de  $2 \Omega$  curto-circuitado no secundário, concluímos que  $i_2(\infty) = 0$ . Em contrapartida, nada podemos concluir ainda sobre a corrente  $i_1(\infty)$  pois **há um laço de indutor no primário**. Após o instante em que a chave fecha, o indutor de 4 H está curto-circuitado e a tensão sobre ele será sempre nula para  $t \geq 0_+$ , como visto na figura a seguir.



A expressão do fluxo magnético concatenado com o indutor de 4 H é

$$\psi_1(t) = \underbrace{\int_{0_+}^t v_1(\tau) d\tau}_{=0} + \psi_1(0_+) = 4i_1(0_+) + \underbrace{i_2(0_+)}_{=0} = 4i_1(0_-) = 20 \text{ Wb-espira}$$

$$\Rightarrow \psi_1(t) = \Psi = 20 \text{ Wb-espira para todo } t \geq 0_+.$$

Mas sabemos que  $\psi_1(\infty) = 4i_1(\infty) + i_2(\infty) = 4i_1(\infty)$  e  $\psi_1(\infty) = \Psi = 20 \text{ Wb-espira}$ , logo,

$$4i_1(\infty) = 20 \Rightarrow i_1(\infty) = \frac{20}{4} = 5 \text{ A}.$$

*Solução alternativa:* Vamos resolver o circuito para  $t > 0$  utilizando Análise de Malhas com condições iniciais  $i_1(0_-) = 5 \text{ A}$  e  $i_2(0_-) = 0$ . Começando no domínio do tempo,

$$2^{\text{a}} \text{ LK malha 1: } 4 \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{di_2(t)}{dt} = 0$$

$$2^{\text{a}} \text{ LK malha 2: } \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{di_1(t)}{dt} + 2i_2(t) = 0$$

Transformando as equações em Laplace, temos

$$2^{\text{a}} \text{ LK malha 1: } 4sI_1(s) + sI_2(s) = 4i_1(0_-) + i_2(0_-) = 20$$

$$2^{\text{a}} \text{ LK malha 2: } sI_1(s) + (s+2)I_2(s) = i_2(0_-) + i_1(0_-) = 5$$

$$\text{Equação matricial de AM: } \begin{bmatrix} 4s & s \\ s & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Resolvendo por Cramer, chega-se a

$$I_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 20 & s \\ 5 & s+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4s & s \\ s & s+2 \end{vmatrix}} = \frac{5(3s+8)}{s(3s+8)} = \frac{5}{s} \longleftrightarrow i_1(t) = 5H(t) \Rightarrow i_1(\infty) = 5 \text{ A.}$$

5 – As FCPs do circuito para  $t > 0$  são:

- a)  $-2$
- b)  $0$  e  $-2$
- c)  $-8/3$
- d)  $0$  e  $-8/3$
- e) n.d.a.

**Resolução:** Aplicando Análise de Malhas ao circuito para  $t > 0$ , como feito na Solução Alternativa do Exercício 4, podemos encontrar a equação característica do circuito e as suas FCPs:

$$\begin{vmatrix} 4s & s \\ s & s+2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow s(3s+8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \text{ (devido ao laço} \\ \text{de indutor no primário)} \\ s_2 = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

6 – Supondo agora que a chave permaneça sempre em A, a corrente  $I_2(s)$  vale (considerando condições iniciais nulas):

- a)  $-10/(3s^2 + 10s + 4)$
- b)  $10/(3s^2 + 10s + 4)$
- c)  $0$
- d)  $-10/[s(4s^2 + 10s + 3)]$
- e) n.d.a.

**Resolução:** Aplicando Análise de Malhas ao circuito para  $t > 0$  com condições iniciais nulas, chegamos à equação matricial de AM:

$$\begin{bmatrix} 4s+2 & s \\ s & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/s \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo por Cramer,

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} 4s+2 & 10/s \\ s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4s+2 & s \\ s & s+2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{3s^2 + 10s + 4}.$$

7 – Considere o circuito da Figura 8 com indutância mútua. Assinale a alternativa que contém a expressão **correta** de  $v_1$  em função das convenções adotadas na figura.

- a)  $v_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - |M| \frac{di_2}{dt}$   
 b)  $v_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} + |M| \frac{di_2}{dt}$   
 c)  $v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - |M| \frac{di_2}{dt}$   
 d)  $v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + |M| \frac{di_2}{dt}$   
 e) n.d.a.

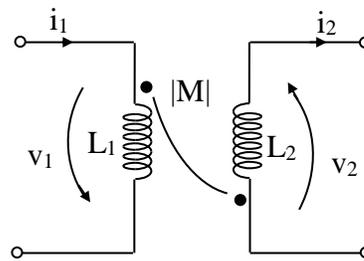


Figura 9

**Resolução:**  $-v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + |M| \frac{di_2}{dt} \Rightarrow v_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - |M| \frac{di_2}{dt}$

8 – A admitância vista pelo gerador no circuito da Figura 9 vale:

- a)  $\frac{3s + 3}{2s^2 + 12s + 6}$   
 b)  $\frac{2,2s + 3}{0,01s^2 + 10,4s + 6}$   
 c)  $\frac{2,8s + 3}{1,99s^2 + 11,6s + 6}$   
 d)  $\frac{3,2s + 3}{1,99s^2 + 12,4s + 6}$   
 e) n.d.a.

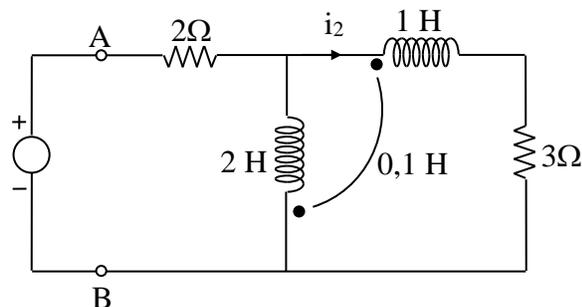
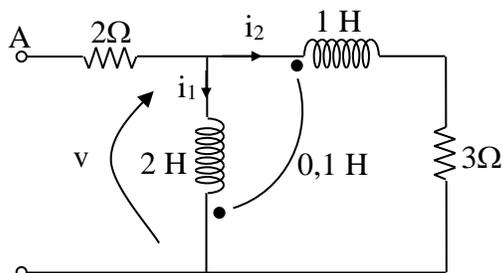


Figura 10

**Resolução:** Considerando o circuito esquematizado a seguir com condições iniciais nulas, vale:



$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V(s) \\ V(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2s & -0,1s \\ -0,1s & 3+s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} &= \frac{1}{1,99s^2 + 6s} \begin{bmatrix} 3+s & 0,1s \\ 0,1s & 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(s) \\ V(s) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow I_1(s) + I_2(s) &= \frac{3,2s+3}{1,99s^2 + 6s} V(s) \end{aligned}$$

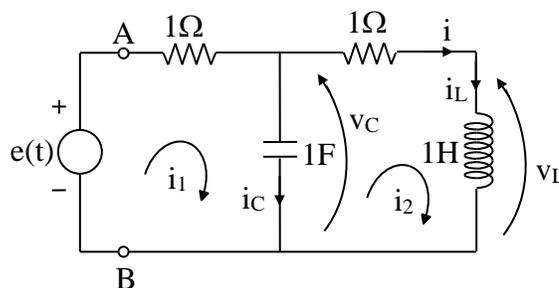
$$\Rightarrow V(s) = \underbrace{\frac{1,99s^2 + 6s}{3,2s+3}}_{\text{impedância do trecho } L//(L+R)} [I_1(s) + I_2(s)]. \quad \text{Logo, por associação de impedâncias,}$$

$$Y(s) = \frac{1}{\frac{1,99s^2 + 6s}{3,2s+3} + 2} = \frac{1}{\left(\frac{1,99s^2 + 12,4s + 6}{3,2s+3}\right)} = \frac{3,2s+3}{1,99s^2 + 12,4s + 6}.$$

Para os **testes de 9 a 12**, considere o circuito da Figura 10.

9 – O sistema matricial de análise de malhas em condições iniciais nulas é dado por:

- a)  $\begin{bmatrix} 1+1/s & -1/s \\ -1/s & 1+s+1/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(s) \\ 0 \end{bmatrix}$
- b)  $\begin{bmatrix} 1+2/s & -1/s \\ -1/s+1 & 1+s+1/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(s) \\ 0 \end{bmatrix}$
- c)  $\begin{bmatrix} 1+1/s & -1/s \\ -1/s & 1+1/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(s) \\ 0 \end{bmatrix}$
- d)  $\begin{bmatrix} 1+s & -s \\ -s & 1+2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(s) \\ 0 \end{bmatrix}$
- e) n.d.a.



**Figura 11**

**Resolução:** Começando no domínio do tempo e com condições iniciais nulas,

$$2^{\text{a}} \text{ LK malha 1: } i_1(t) + \int_{-\infty}^t [i_1(\tau) - i_2(\tau)] d\tau = e_s(t)$$

$$2^{\text{a}} \text{ LK malha 2: } \int_{-\infty}^t [i_2(\tau) - i_1(\tau)] d\tau + i_2(t) + \frac{di_2(t)}{dt} = 0$$

Transformando as equações em Laplace, temos

$$2^{\text{a}} \text{ LK malha 1: } \left(1 + \frac{1}{s}\right) I_1(s) - \frac{1}{s} I_2(s) = E(s)$$

$$2^{\text{a}} \text{ LK malha 2: } -\frac{1}{s} I_1(s) + \left(\frac{1}{s} + 1 + s\right) I_2(s) = 0$$

Equação matricial de AM:

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{s} + 1 + s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(s) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

10 – A impedância  $Z(s)$  vista em A – B vale:

a)  $\frac{s^2 + 2s + 2}{s^2 + s + 1}$

b)  $\frac{1}{s^2 + s + 1}$

c)  $\frac{1}{s^2 + 2s + 2}$

d)  $s + 1$

e) n.d.a.

**Resolução:** Por associação de impedâncias, temos

$$Z(s) = \frac{(s+1)/s}{s+1+\frac{1}{s}} + 1 = \frac{s+1+s^2+s+1}{s^2+s+1} = \frac{s^2+2s+2}{s^2+s+1}.$$

11 – Num determinado instante  $t_0$  sabe-se que  $e(t_0) = 5 \text{ V}$ ,  $v_C(t_0) = 3 \text{ V}$  e  $i_L(t_0) = 1 \text{ A}$ . Pode-se afirmar que:

- a) No indutor teremos  $v_L(t_0) = 2 \text{ V}$ .  
 b) No capacitor teremos  $i_C(t_0) = 1 \text{ A}$ .  
 c) Para determinar  $v_L(t_0)$  e  $i_C(t_0)$  é preciso conhecer  $\left. \frac{dv_L}{dt} \right|_{t_0}$  e  $\left. \frac{di_C}{dt} \right|_{t_0}$ .  
 d) a) e b) estão corretas.  
 e) n.d.a.

**Resolução:** Considerando o circuito para  $t = t_0$  a seguir,

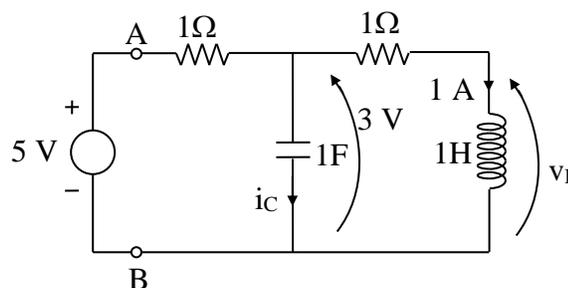
No indutor,

$$v_L(t_0) + 1 = 3 \Rightarrow v_L(t_0) = 2 \text{ V}.$$

No capacitor,

$$i_C(t_0) + 1 = \frac{5-3}{1} \Rightarrow i_C(t_0) = 1 \text{ A}.$$

Para determinar  $v_L(t_0)$  e  $i_C(t_0)$ , basta aplicar diretamente a 1ª LK e a 2ª LK no circuito “fotografado” em  $t = t_0$ .



12 – Quais são as frequências próprias do circuito?

- a)  $-1 + j$  e  $-1 - j$   
 b)  $-1 - 2j$  e  $-1 + 2j$   
 c)  $-2 + j$  e  $-2 - j$   
 d)  $-1$  e  $+1$   
 e) n.d.a.

**Resolução:** Equação característica:

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{s} & -\frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & \frac{1}{s} + 1 + s \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow s^2 + 2s + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -1 + j \\ s_2 = -1 - j \end{cases}$$

13 – Assinale a opção **correta**:

- a) Em circuitos com vinculados a presença de FCP nula coincide com a presença de laços de indutores ou cortes de capacitores obrigatoriamente.  
 b) Cortes de capacitores e/ou laços de indutores implicam a existência de FCP nula.  
 c) Inserindo dois capacitores em série no lugar de um capacitor não implica a existência de corte de capacitores.  
 d) Para determinar FCP nulas, qualquer análise (AN, AM) serve, isto é, não existem condições.  
 e) n.d.a.

**Resolução:** Cortes de capacitores e/ou laços de indutores implicam a existência de FCP nula. Em circuitos com vinculados, pode aparecer FCP nula sem a presença evidente de laços de indutores ou cortes de capacitores. Para determinar FCPs nulas na Análise Nodal, é preciso considerar as correntes dos indutores como incógnitas. Já na Análise de Malhas, para determinar FCPs nulas é preciso considerar as tensões dos capacitores como incógnitas.

Para os testes 14 e 15, considere o circuito da Figura 12, em que  $e_s(t) = 10\cos(t + 45^\circ)$ , (V,s).

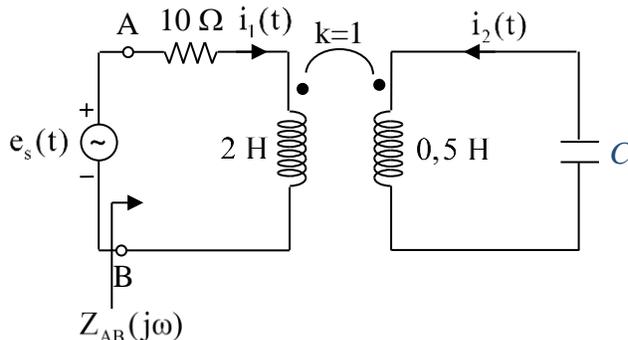


Figura 12

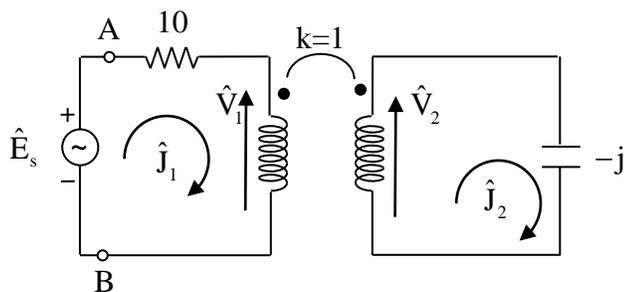
14 – Assumindo  $C = 1$  F, o fasor da corrente  $i_2(t)$ , ou seja,  $\hat{I}_2$ , vale aproximadamente (em A):

- a)  $1,9e^{j23^\circ}$
- b)  $2e^{-j157^\circ}$
- c)  $2,3e^{j46^\circ}$
- d) 10
- e) n.d.a.

**Resolução:**

As relações entre as tensões e correntes dos indutores é

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega |M| \\ j\omega |M| & j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{J}_1 \\ -\hat{J}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j2 & j \\ j & j0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{J}_1 \\ -\hat{J}_2 \end{bmatrix}$$



Fazendo análise de malhas, obtemos

$$\begin{bmatrix} 10 + j2 & -j \\ -j & j0,5 - j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{J}_1 \\ \hat{J}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10e^{j45^\circ} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{J}_2 = 1,857e^{-j157^\circ} \Rightarrow \hat{I}_2 = 1,857e^{j23^\circ}$$

15 – A impedância vista pelos terminais A e B do circuito para  $C = 2$  F vale (em  $\Omega$ ):

- a) 0
- b)  $\infty$
- c)  $10 - j25$
- d)  $10 + j5$
- e) n.d.a.

**Resolução:** Modificando o sistema anterior, temos

$$\begin{bmatrix} 10 + j2 & -j \\ -j & j0,5 - \frac{j}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{J}_1 \\ \hat{J}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{E}_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema em  $\hat{J}_1$ , a impedância de entrada vale:

$$\frac{\hat{E}_s}{\hat{J}_1} = \frac{(10 + j2)j(0,5 - 1/C)}{j(0,5 - 1/C)} \Rightarrow \left. \frac{\hat{E}_s}{\hat{J}_1} \right|_{C=2} \rightarrow \infty$$