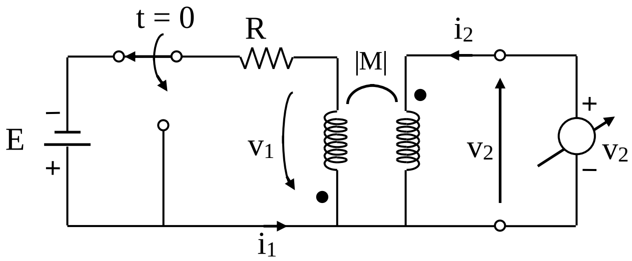
PSI3213 – CIRCUITOS ELÉTRICOS II

Solução da Lista 4: Indutâncias Mútuas e Transformadores

1 – Colocar a marca de polaridade no terminal **b**.

2 – Cálculo de $v_2(t)$:



Usando inicialmente as convenções da figura, temos:

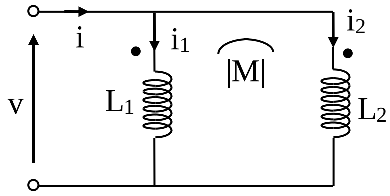
$$i_1(0_-) = \frac{E}{R}$$

$$\Rightarrow i_1(t) = \frac{E}{R} e^{-(R/L_1)t} H(t)$$

$$\Rightarrow v_2(t) = |M| \frac{di_1}{dt} = -\frac{|M|E}{L_1} e^{-(R/L_1)t} H(t)$$

$\rightarrow$ Com as marcas de polaridade da figura e os sentidos de corrente adotados, teremos sinal positivo para a mútua na relação constitutiva do indutor 2. Portanto, a indicação no voltímetro será negativa – que é o que ocorre segundo o enunciado. Logo, as marcas de polaridade devem ser colocadas como indicado na figura. Caso tivéssemos errado a convenção e obtido $v_2(t)$ positiva, teríamos que trocar alguma das marcas de polaridade adotadas no início.

3 – a) Da figura:

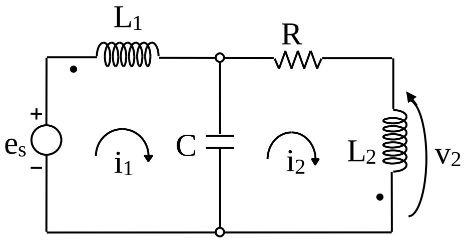


$$\begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & |M| \\ |M| & L_2 \end{bmatrix} D \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \rightarrow \quad D \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \begin{bmatrix} L_2 & -|M| \\ -|M| & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad D[i_1 + i_2] = \frac{L_1 + L_2 - 2|M|}{L_1 L_2 - M^2}.v \rightarrow v \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2|M|} \frac{di}{dt} \rightarrow L_{ab} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2|M|}$$

b) Adota-se sinal negativo para |M|, de modo que $L_{ab} = \dfrac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2|M|}$.

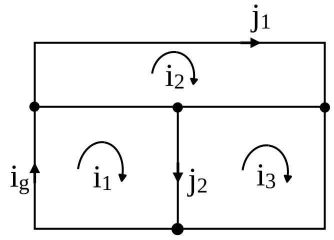
4 – Equações de análise de malhas transformadas:



$$\begin{bmatrix} 0{,}4s + 25/s & -0{,}6s - 25/s \\ -25/s - 0{,}6s & 25/s + 20 + 0{,}9s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$V_2(s) = -s|M|I_1 + sL_2I_2 \;\rightarrow\; v_2(t) = 7{,}54e^{-0{,}1563t}\cos(\,7{,}9041t - 174{,}35°\,)\,H(t)$, (V, seg)

5 – a) Análise de malhas:

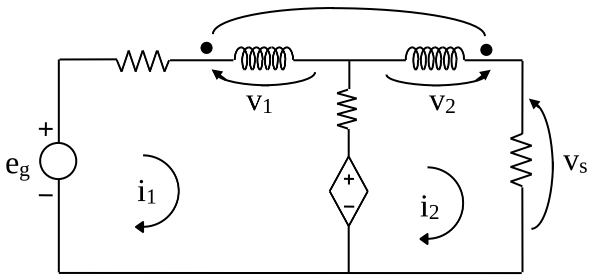


$$\begin{bmatrix} 8 + 9s & -8 + 4{,}5s & -9s \\ -8 + 4{,}5s & 14 + 4s & -6 - 4{,}5s \\ -9s & -6 - 4{,}5s & 26 + 9s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g(s) + 22{,}5 \\ 13 \\ -22{,}5 \end{bmatrix}$$

b) $i_g(t) \;\approx\; 4{,}563\cos(\,2t - 44{,}00°\,)$, (A, seg)

6 – a) Vale $i_x = i_1$. Pela 2ª LK no domínio do tempo temos (ver figura!):

malha 1: $2i_1 + ri_1 + 1i_1 - i_2 + v_1 = e_g$
malha 2: $2i_2 - ri_1 + i_2 - i_1 - v_2 = 0$



– relação na mútua:

$$\begin{cases} v_1 = 1Di_1 - 1Di_2 \\ v_2 = 1Di_1 - 2Di_2 \end{cases}$$

Substituindo e simplificando,
$$\begin{cases} (3 + r + D)i_1 - (D + 1)i_2 = e_g \\ -(r + D + 1)i_1 + (3 + 2D)i_2 = 0 \end{cases}$$

ou, transformando com condições iniciais nulas,

$$\begin{bmatrix} 3 + r + s & -s - 1 \\ -r - s - 1 & 3 + 2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_g(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) $\det Z_n(s) = s^2 + (\,r + 7\,)s + 2\,(\,r + 4\,) = 0$

– Condições para raízes com parte real negativa:

$r + 7 > 0 \;\rightarrow\; r > -7\,;\qquad r + 4 > 0 \;\rightarrow\; r > -4$

Portanto, para estabilidade assintótica devemos ter $r > -4$

c) Com r = 2, M = 0 e $e_g = \delta(t)$ as equações do circuito ficam

$$\begin{bmatrix} s+5 & -1 \\ -3 & 2s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow I_2(s) = \frac{1{,}5}{s^2 + 6{,}5s + 6} \rightarrow$$

$$\rightarrow V_s(s) = \frac{3}{s^2 + 6{,}5s + 6} \rightarrow v_s(t) = (0{,}7\, e^{-1{,}114t} - 0{,}7\, e^{-5{,}386t})\, H(t), \ (V, seg)$$

d) $$\hat{V}_s = \frac{3}{(j2)^2 + 6{,}5j2 + 6} \cdot \hat{E}_g$$

$$\hat{E}_g = 10 \angle 30° \rightarrow \hat{V}_s = \frac{30\angle 30°}{2 + j13} = 2{,}281 \angle -51{,}25°$$

$\rightarrow v_s(t) = 2{,}281\cos(2t - 51{,}25°)$ (V, s)

7 – a) Consideraremos i_1 e i_2 como correntes de malha (ver Figura 7 da Lista 4).
A aplicação da 2ª LK, transformada segundo Laplace, fornece:

– **malha 1**:

$$500\, I_1(s) + 0{,}1s\, I_1(s) - 0{,}1\, i_1(0_-) + 0{,}4s\, I_1(s) - 0{,}4\, i_1(0_-) + 0{,}1s\, I_2(s) - 0{,}1\, i_2(0_-) = E_g(s)$$

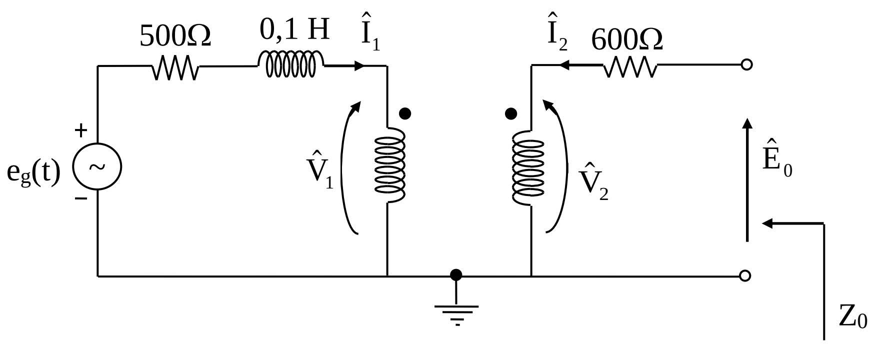
– **malha 2** :

$$0{,}1s\, I_2(s) - 0{,}1\, i_2(0_-) + 0{,}1s\, I_1(s) - 0{,}1\, i_1(0_-) + 600\, I_2(s) + \frac{1}{2.10^{-3}s} I_2(s) - \frac{v_c(0_-)}{s} = 0$$

Ordenando numa equação matricial,

$$\begin{bmatrix} 500 + 0{,}5s & 0{,}1s \\ 0{,}1s & 0{,}1s + 600 + \frac{500}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_g(s) + 0{,}5 \\ \frac{3}{s} + 0{,}1 \end{bmatrix}$$

b) Com a malha 2 em aberto e RPS (ver figura abaixo)
$s \Rightarrow j\omega = j1000$,



– Tensão em aberto $\hat{E}_0$ entre A e B:

$$\left.\begin{aligned} 500\hat{I}_1 + j100\hat{I}_1 + j400\hat{I}_1 &= \hat{E}_g \\ j100\hat{I}_1 &= \hat{E}_0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \hat{E}_0 = \frac{j100}{500 + j500} \,.\, \hat{E}_g$$

$$\rightarrow \quad \hat{E}_0 = \frac{j1}{5 + j5} \,.\, 300 = 42{,}43 \angle 45° \quad (\,V\,)$$

– Corrente de curto $\hat{I}_0$ (sem capacitor), de A para B:

$$500\hat{I}_1 + j100\hat{I}_1 + j400\hat{I}_1 + j100\hat{I}_2 = \hat{E}_g$$

$$j100\hat{I}_1 + \left(j100 + 600\right)\hat{I}_2 = 0$$

Mas $\hat{I}_2 = -\hat{I}_0$ de modo que, matricialmente,

$$\begin{bmatrix} 500 + j500 & -j100 \\ j100 & -600 - j100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{E}_g \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\hat{I}_0 = \frac{j100\,\hat{E}_g}{10^5\left(2{,}6 + j3{,}5\right)} = 6{,}88 \,.\, 10^{-2} \angle 36{,}6°$$

– Portanto, $Z_0 = \dfrac{\hat{E}_0}{\hat{I}_0} = 616{,}72 \angle 8{,}39° = 610{,}11 + j\,90 \quad (\,\Omega\,)$

c) Com o gerador desativado, a impedância referida ao secundário é

$$Z_0 = \left(500 + j100\right).\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 600 = 725 + j25 \quad (\,\Omega\,)$$

Com o secundário aberto, $\hat{I}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{I}_1 = 0$

Portanto,

$$\hat{E}_0 = \hat{V}_2 = \frac{\hat{V}_1}{2} = \frac{\hat{E}_g}{2} = 150 \angle 0° \quad (\,V\,)$$

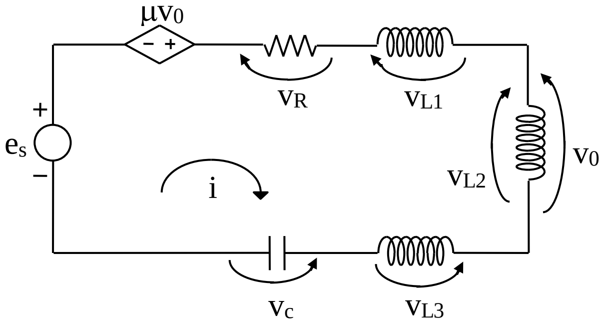
8 – a) 2ª Lei K.: $v_{L1} + v_{L2} + v_{L3} + v_c + v_R - \mu v_0 = e_s$

$$\begin{bmatrix} v_{L1} \\ v_{L2} \\ v_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 2 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{bmatrix} D.i \rightarrow v_{L1} + v_{L2} + v_{L3} = 1D\,i(t)$$

$$v_c = \frac{1}{C} D^{-1} i + v_{co} = 5D^{-1} i + v_{co}$$

$$v_R = Ri$$

$$v_0 = v_{L2} = 1Di$$



Substituindo na equação:

$(1D + 5D^{-1} + R - \mu D)i = e_s(t) - v_{co}$

Transformando por Laplace

$$\left[(1-\mu)s + \frac{5}{s} + R\right] I(s) = E_s(s) - \frac{v_{co}}{s}$$

b) Equação característica:

$$(1-\mu)s + \frac{5}{s} + R = 0$$

$$(1-\mu)s^2 + Rs + 5 = 0 \rightarrow s_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 20(1-\mu)}}{2(1-\mu)}$$

Para FCP reais: $R^2 \geq 20(1-\mu)$

Circuito assintoticamente estável: $s_{1,2} < 0 \rightarrow$

$$\sqrt{R^2 - 20(1-\mu)} \leq R \rightarrow 20(1-\mu) \geq 0$$

$$\mu \leq 1$$

2 condições: $\boldsymbol{\mu \leq 1}$ **e** $\mathbf{R^2 \geq 20(1-\mu)}$

c) RPS: $s \rightarrow j\omega$, despreza-se condição inicial

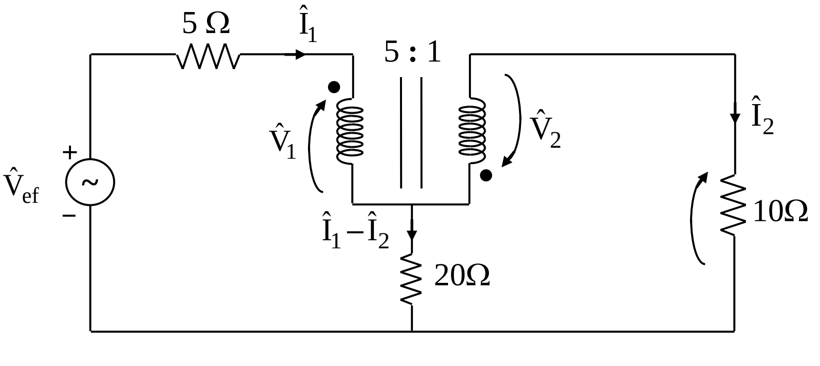
$$\left[(1-0{,}5)\,j\omega + \frac{5}{j\omega} + 10\right] \hat{I}(j\omega) = \hat{E}_s$$

$$\left[j + \frac{5}{2j} + 10\right] \hat{I}(j2) = \hat{E}_s \rightarrow \hat{I} = \frac{\hat{E}_s \cdot 2j}{3 + j20}$$

$$\hat{V}_0 = \hat{V}_{L2} = 1 \cdot j2 \cdot \hat{I} \rightarrow \hat{V}_0 = \frac{-4\hat{E}_s}{3 + j20}$$

$$\rightarrow \frac{\hat{V}_0}{\hat{E}_s} = \frac{-4}{3 + j20} \cong 0{,}20 \angle 98{,}53°$$

9 – a)



Transformador ideal:

$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2} = \frac{-N_2}{N_1} \rightarrow \hat{I}_1 = -\hat{I}_2 \cdot \frac{1}{5} \rightarrow \hat{I}_1 = -0{,}5 \underline{/\ 0^\circ} \cdot \frac{1}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{I}_1 = 0{,}1 \underline{/\ 180^\circ} \quad \text{Aef}$$

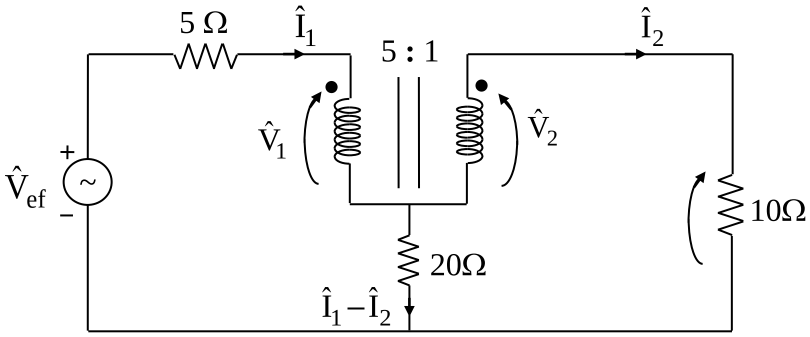
b) 2ª Lei K $\longrightarrow$

$$-20\left(\hat{I}_1 - \hat{I}_2\right) + \hat{V}_2 + 10\hat{I}_2 = 0 \rightarrow \hat{V}_2 = 17 \underline{/\ 180^\circ} \quad \text{Vef}$$

$$\frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_2} = \frac{N_1}{N_2} \rightarrow \hat{V}_1 = \hat{V}_2 \cdot 5 = 85 \underline{/\ 180^\circ}$$

2ª Lei K $\rightarrow \hat{V}_{ef} = 5\hat{I}_1 + \hat{V}_1 + 20\left(\hat{I}_1 - \hat{I}_2\right) \rightarrow \hat{V}_{ef} = 97{,}5 \underline{/\ 180^\circ}$ Vef

c)



Neste caso: $\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2} = \frac{N_2}{N_1} \rightarrow \hat{I}_1 = 0{,}1 \underline{/\ 0^\circ}$

$$\hat{V}_2 = 10\hat{I}_2 - 20\left(\hat{I}_1 - \hat{I}_2\right) = 13 \underline{/\ 0^\circ}$$

$$\frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_2} = \frac{N_1}{N_2} \rightarrow \hat{V}_1 = 5 \cdot \hat{V}_2 = 65 \underline{/\ 0^\circ}$$

$$\rightarrow \hat{V}_{ef} = 5\hat{I}_1 + \hat{V}_1 + 20\left(\hat{I}_1 - \hat{I}_2\right) = 57{,}5 \underline{/\ 0^\circ} \quad \text{Vef}$$