# PSI3213 – CIRCUITOS ELÉTRICOS II

## Solução da Lista 2: Funções de Rede

1 – Transformando a equação diferencial, com as condições iniciais dadas, resulta

$$s^2Y(s) - sy(0\_) - \dot{y}*(0\_) + 2Y(s) - 2y(0\_) + 5Y(s) = U(s) \rightarrow$$
$$\rightarrow Y(s) = \frac{U(s) + 2s + 4}{s^2 + 2s + 5}$$

a) u(t) = 5δ(t) → U(s) = 5

$$Y(s) = \frac{2s+9}{s^2+2s+5} = \frac{2(s+4{,}5)}{(s+1)^2+4} \rightarrow \qquad y(t) = [\,2\cos 2t + 3{,}5\,\text{sen}\,2t\,]e^{-t}H(t)$$

$y(0_+) = 2$

b) u(t) = 5.H(t) → U(s) = 5/s

$$Y(s) = \frac{\frac{5}{s} + 2(s+2)}{(s+1)^2+4}$$

– Equação característica:

$$s^3 + 2s^2 + 5s = 0 \rightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -1 \pm j2 \end{cases}$$

$y(t) = [\,1 + 1{,}12\,e^{-t}\cos(2t + 26{,}57°)\,]\,H(t)$

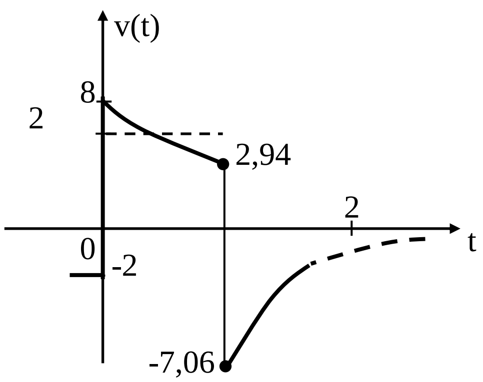
$y(0_+) = 2$

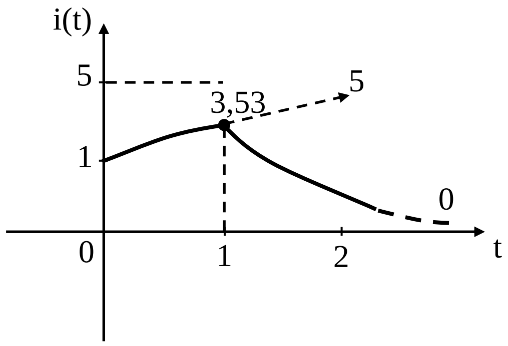
2 – a)
$$\left.\begin{aligned} 2\frac{di}{dt} + 2i &= e_s \\ i(0_-) = i_0 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad I(s) = \frac{2i_0 + E_s(s)}{2(s+1)}$$

$$\left.\begin{aligned} v &= e_s - 2i \\ v(0\_) &= -2i_0 = -2 \end{aligned}\right\} \quad V(s) = \frac{sE_s(s) - 2i_0}{s+1}, \text{ com } E_s(s) = \frac{10}{s}(1 - e^{-s})$$

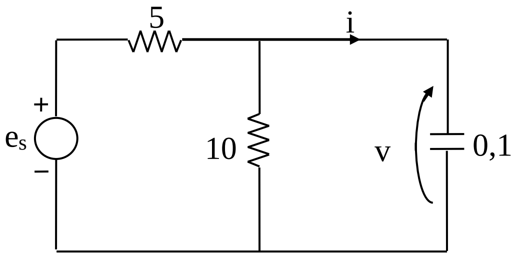
b) $v(t) = 8e^{-t}\,.\,H(t) - 10e^{-(t-1)}H(t-1)$

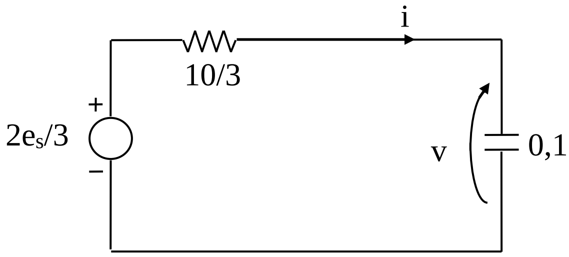
c)




3 – Por Thévenin ( unidades AF ):




a) $G_1(s) = \dfrac{I(s)}{E_s(s)} = 0{,}2\dfrac{s}{s+3} \quad \left( mS, \dfrac{1}{ms} \right)$

$G_2(s) = \dfrac{V(s)}{E_s(s)} = \dfrac{2}{s+3} \quad \left( ad., \dfrac{1}{ms} \right)$

b) $\tau \;=\; \dfrac{10}{3} \cdot 0{,}1 \;=\; 0{,}333$ ( ms )

$p_1 = -3$ ( 1/ms ) $\qquad \tau = -\dfrac{1}{p_1}$ ( ms )

c) $v(t) = 4/3 + (11/3) \cdot e^{-3t}$, $\quad t \geq 0$ $\quad$ ( V, ms )

4 – a) Raízes do polinômio característico: $s^2 + 5s + 6 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} s_1 = -3 \\ s_2 = -2 \end{array} \right\} \; FCP$$

Portanto as constantes de tempo do circuito são 1/3 e 1/2 ( em ms ).

b) Pela função de rede:

$$s^2\,V(s) + 5s\,V(s) + 6\,V(s) = sI_s(s) + I_s(s)$$

Equação diferencial correspondente:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 5\frac{dv}{dt} + 6v = \frac{di_s}{dt} + i_s$$

c) $V(s) = \dfrac{s+1}{s^2+5s+6} I_s(s) \quad \rightarrow \quad V(s) = \dfrac{s+1}{s^2+5s+6} \cdot \dfrac{5}{s}$

$V(s) = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+3} + \dfrac{C}{s+2}$, com A = 5/6, B = -10/3 e C = 2,5

$\rightarrow \quad v(t) = \left(\dfrac{5}{6} - \dfrac{10}{3} + 2{,}5e^{-2t}\right) H(t)$ resposta forçada !

d) Da equação diferencial do item (b), e supondo $i_s(0_-) = 0$, tem-se:

$s^2 V(s) - s\,v(0_-) - \dot{v}(0_-) + 5s\,V(s) - 5v(0_-) + 6\,V(s) = sI_s(s) + I_s(s)$

$V(s)\,(s^2 + 5s + 6) = (s+1)\,I_s(s) + (s+7)$

$V(s) = \dfrac{5(s+1)}{s(s^2+5s+6)} + \dfrac{s+7}{s^2+5s+6} \rightarrow$

$\rightarrow V(s) = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+3} + \dfrac{C}{s+2} + \dfrac{D}{s+3} + \dfrac{E}{s+2}$

- A, B, C já determinados no item (c).
- D = - 4, E = 5

$$\rightarrow \quad v(t) = \underbrace{\frac{5}{6} - \frac{10}{3}e^{-3t} + 2{,}5e^{-2t}}_{\text{forçada}} \; \underbrace{-\,4e^{-3t} + 5e^{-2t}}_{\text{livre}} \quad , \qquad t > 0$$

$$\text{ou } v(t) = \left( \underbrace{\frac{5}{6}}_{permanente} \; \underbrace{-\frac{22}{3}e^{-3t} + 7{,}5e^{-2t}}_{transitória} \right) H(t)$$

5 – a) A transformada da resposta é

$$Y(s)=\frac{2,5}{s}+\frac{5}{s+2}-\frac{7,5}{s+4}=20\frac{(s+1)}{s(s+2)(s+4)}$$

Com os dados do problema, a transformada da entrada é

$$U(s)=\frac{5}{s}+\frac{K}{s+2}=\frac{(5+K)s+10}{s(s+2)}$$

onde K é uma constante real a ser determinada.

Em consequência, a função de rede será

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{20(s+1)}{(s+4)((5+K)s+10)}=\frac{20}{5+K}\frac{s+1}{(s+4)(s+\frac{10}{5+K})}$$

Como a função de rede só deve ter polo em s = - 4 ( já que o polo em –2 que aparece na resposta Y(s) é devido à excitação exponencial ), s + 10/(5 + K) deve cancelar com (s + 1):

$$s+1=s+\frac{10}{5+K}\quad\rightarrow\quad 5+K=10\quad\rightarrow\quad K=5\,,$$

de modo que

$$G(s)=\frac{2}{s+4}$$

b) G(s) = Y(s) / U(s) $\rightarrow$ $\frac{dy}{dt}+4y=2u(t)$

6 – a) equação característica:

$$\begin{vmatrix} s+1 & -5 \\ 5 & 2s+1 \end{vmatrix} = 2s^2+3s+26 \quad\rightarrow\quad s^2+1,5s+13=0\quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\ s_{1,2}=-0,75\pm j3,4551$$

b) $\begin{bmatrix} s+1 & -5 \\ 5 & 2s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}\quad\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix}=\frac{1}{2s^2+3s+26}\begin{bmatrix} 2s+1 & 5 \\ -5 & s+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

– Com $U_2(s) = 0$, $$E_1(s) = \frac{2s+1}{2s^2+3s+26}U_1(s) \quad \rightarrow$$

$$\frac{E_1(s)}{U_1(s)} = G_1(s) = \frac{s+0{,}5}{s^2+1{,}5s+13} \begin{cases} \text{polos: } -0{,}75 \pm j3{,}5267 \\ \text{zeros: } -0{,}5 \end{cases}$$

– Com $U_1(s) = 0$ :

$$\frac{E_2(s)}{U_2(s)} = G_2(s) = \frac{s+1}{2s^2+3s+26} = \frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2+1{,}5s+13}$$

$$\begin{cases} \text{polos: } -0{,}75 \pm j3{,}5267 \\ \text{zero: } -1; \quad \text{fator de escala: } 0{,}5 \end{cases}$$

c) $E_2(s) = G_2(s) \cdot 1 = \dfrac{1}{2}\dfrac{s+1}{s^2+1{,}5s+13} \quad \rightarrow$

$\rightarrow$ $e_2(t) = 0{,}5e^{-0{,}75t}\cos(3{,}5267t - 4{,}05°)$, $t > 0$.

7 – De $s^2 + 8s + 12 = 0$ determinamos os polos da função de rede:

$$s_1 = -2; \quad s_2 = -6.$$

Como ambos têm parte real negativa, o circuito atinge o regime permanente, de fato.

Como:

$u(t) = 10\cos(5t - 60°) \quad \rightarrow \quad \hat{U} = 10 \angle -60°$

$$\omega = 5 \quad \rightarrow \quad G(j5) = \frac{5+j50}{-25+j40+12} = \frac{5+j50}{-13+j40} = 1{,}1947\angle -23{,}71°$$

$$\hat{Y} = 1{,}1947\angle -23{,}71° \cdot 10\angle -60° = 11{,}947\angle -83{,}71°$$

A resposta é $y(t) = 11{,}947\cos(5t - 83{,}71°)$.

8 – Equação característica:

$$\det \begin{bmatrix} 1+2s & -2s \\ -2s & \frac{1}{2}+2s+\frac{1}{2s} \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 + 0{,}5s + \frac{1}{6} = 0$$

– polos: $s_{1,2} = -0{,}25 \pm j\,0{,}3228$

Como os polos têm parte real negativa, o circuito admite RPS, de fato.

b) $\hat{I}_s = 5 \underline{/\ 0°}$ , $\omega = 0{,}25$

$$\begin{bmatrix} 1+j0{,}5 & -j0{,}5 \\ -j0{,}5 & 0{,}5+j0{,}5+\dfrac{1}{j0{,}5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}443-j2{,}131 \\ -0{,}82+j0{,}984 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}0491\angle -31{,}75^{o} \\ 1{,}2804\angle 129{,}81^{o} \end{bmatrix} \quad \rightarrow$$

$e_1(t) = 4{,}0491 \cos(0{,}25t - 31{,}75°)$ ( V )
$e_2(t) = 1{,}2804 \cos(0{,}25t + 129{,}81°)$ ( V )

9 – a) $H(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{s}{s^2 + 6s + 34}$

b) $H(s) = \dfrac{I(s)}{V(s)}$ $\rightarrow$ circuito R, L, C série, por exemplo com R = 6, L = 1, C = 1/34, num sistema de unidades coerente.