Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

PSI3213

Circuitos Elétricos II

Bloco 4

Propriedades das redes:
Estabilidade e Funções de rede

Profª Denise Consonni

Circuito Livre – ANM

$$\begin{bmatrix} G_n & B \\ F & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{e} \\ \underset{\sim}{i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_n & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & -L \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{e} \\ \underset{\sim}{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \end{bmatrix}$$

$$T_{nm} \underset{\sim}{x} + H_{nm} \underset{\sim}{\dot{x}} = \underset{\sim}{0}$$

Laplace:

$$\underbrace{(T_{nm} + s.H_{nm})}_{Y_{nm}(s) \rightarrow \text{ matriz das imitâncias}} . \underset{\sim}{X}(s) = \underbrace{\underset{\sim}{z_0}}_{\text{condições iniciais}}$$

$$\underset{\sim}{X}(s) = \frac{1}{\det Y_{nm}(s)} \times adj\, Y_{nm}(s) \cdot \underset{\sim}{z_o}$$

Equação característica:

$$\det Y_{nm}(s) = 0$$

FCP e Modos Naturais

$$\det Y_{nm}(s) = \alpha_0 \, s^n + \alpha_1 \, s^{n-1} + \bullet\bullet\bullet + \alpha_{n-1} \, s + \alpha_n = 0 \qquad (\alpha_0 \neq 0)$$

$$D(s) = \frac{1}{\alpha_0} \cdot \det Y_{nm}(s) =$$

$$\boxed{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

Zeros de D(s) determinam os denominadores das frações parciais → determinam a forma da resposta livre do circuito

Raiz simples s_k → $\boxed{\dfrac{A_k}{(s-s_k)}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{A_k . e^{s_k t}}$

Raiz múltipla s_k → $\boxed{\dfrac{A_k}{(s-s_k)^j}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$

$$\boxed{A_{k1}.e^{s_k t} \; , \; A_{k2}.t.e^{s_k t} \; , \; \ldots. \; , \; A_{kj}.t^{(j-1)}.e^{s_k t}}$$

Transformada de Laplace

Derivada da Transformada:

$$\mathcal{L}\,[\, t \,.\, f\,(t)\,] = -\frac{d\,F(s)}{d\,s}$$

Consequência:

$$\mathcal{L}\,[\, H\,(t)\,] = 1\,/\,s$$

$$\mathcal{L}\,[\, t \,.\, H\,(t)\,] = 1\,/\,s^2$$

$$\mathcal{L}\,[\, t^2 \,.\, H\,(t)\,] = 2\,/\,s^3$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\,[\, t^n \,.\, H\,(t)\,] = n\,!\,/\,s^{n+1}$$

Transformada da Exponencial:

$$\mathcal{L}\,[\, e^{pt}\,] = \frac{1}{(s-p)}$$

Consequência:

$$\mathcal{L}\,[\, t \,.\, e^{pt}\,] = 1\,/\,(s-p)^2$$

$$\mathcal{L}\,[\, t^2 .\, e^{pt}\,] = 2\,/\,(s-p)^3$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\,[\, t^n \,.\, e^{pt}\,] = n\,!\,/\,(s-p)^{n+1}$$

FREQUÊNCIAS COMPLEXAS PRÓPRIAS
FCPs

- Raízes da equação característica

- Valem para qualquer tipo de análise: Nodal, Malhas, Nodal Modificada

- Características Próprias do Circuito $\rightarrow$ dependem da topologia

- Modos Naturais

$$\boxed{A_k \, . e^{s_k t}}$$

$$\boxed{A_{kj} \, . t^j \, . e^{s_k t}}$$

$\downarrow$

Valem para todas as respostas do circuito $\longrightarrow$ tensões e correntes

Comportamento livre ou natural do circuito

MODOS NATURAIS

Parcelas do tipo :

$$\boxed{A_k} \qquad \boxed{A_k . e^{s_k t}} \qquad \boxed{A_{kj} . t^{j} . e^{s_k t}}$$

Aparecem nas:

- **Respostas Livres: geradores independentes inativados e condições iniciais não nulas**
- **Respostas transitórias: geradores ligados à rede**

$\boxed{A_k}$ **constantes (reais ou complexas)**

$\boxed{s_k = \alpha_k + j\omega_k}$ **FCPs do circuito**

FREQUÊNCIAS COMPLEXAS PRÓPRIAS

- Inativar geradores independentes

(NÃO desativar geradores vinculados)

- Desprezar condições iniciais

- Escrever matriz transformada para qualquer tipo de análise

- Igualar determinante a zero e determinar raízes da equação obtida

FCPs $\longrightarrow$ raízes da equação característica obtida por qualquer tipo de análise

AN, AM $\rightarrow$ FCPs não nulas

ANM $\rightarrow$ FCPs nulas e não nulas

Modos Naturais do Circuito

Valem para todas as respostas do circuito

$s_1 \neq 0$ é **FCP** da resposta $i(t)$ do ramo r

$A_1 e^{s_1 t}$ é modo natural

- r é **Resistor:** $v = R\,i$

  v inclui $R A_1 e^{s_1 t}$

- r é **Indutor:** $v = L\,di/dt$

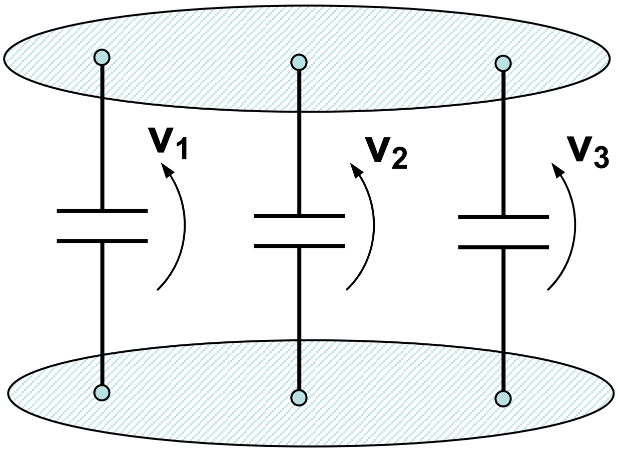
  v inclui $L A_1 s_1 e^{s_1 t}$

- r é **Capacitor:**

  $v = v_0 + (1/C) \int i\,dt$

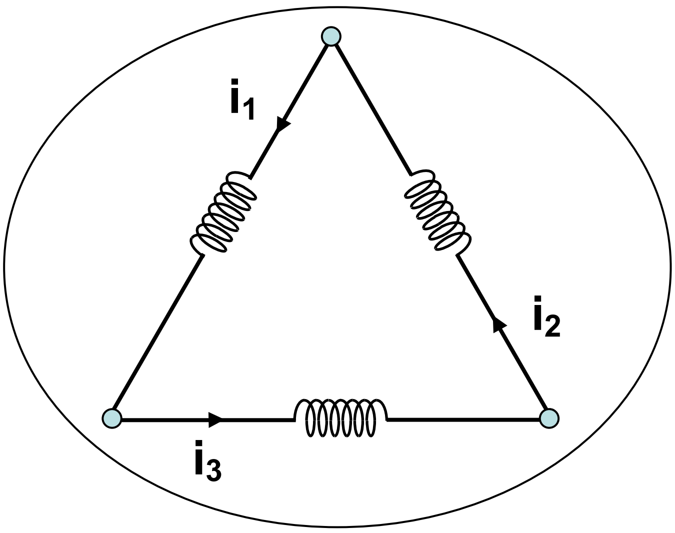
  v inclui $(1/C)(A_1/s_1)\, e^{s_1 t}$

Casos em que as respostas livres contêm componentes constantes:



Corte de capacitores

$$v_1 = v_2 = v_3 = cte$$



Laço de indutores

$$i_1 = i_2 = i_3 = cte$$

ESTABILIDADE DAS REDES LINEARES, FIXAS E LIVRES

- **ESTÁVEIS**
  - Assintoticamente

    Resposta $\longrightarrow$ 0 para t $\longrightarrow \infty$

  - Marginalmente

    Resposta limitada para t $\longrightarrow \infty$

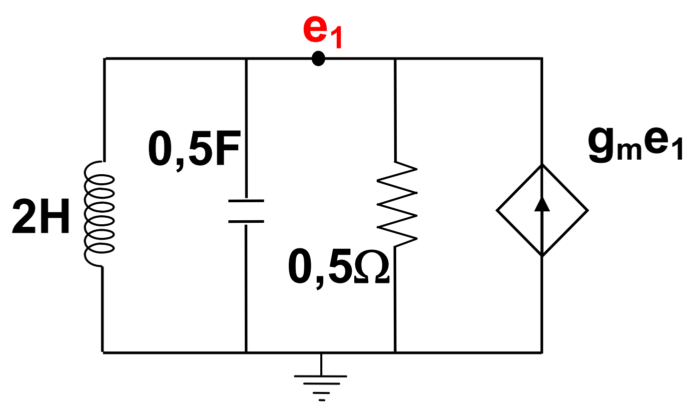
- **INSTÁVEIS**

  Alguma resposta livre $\longrightarrow \infty$ para t $\longrightarrow \infty$

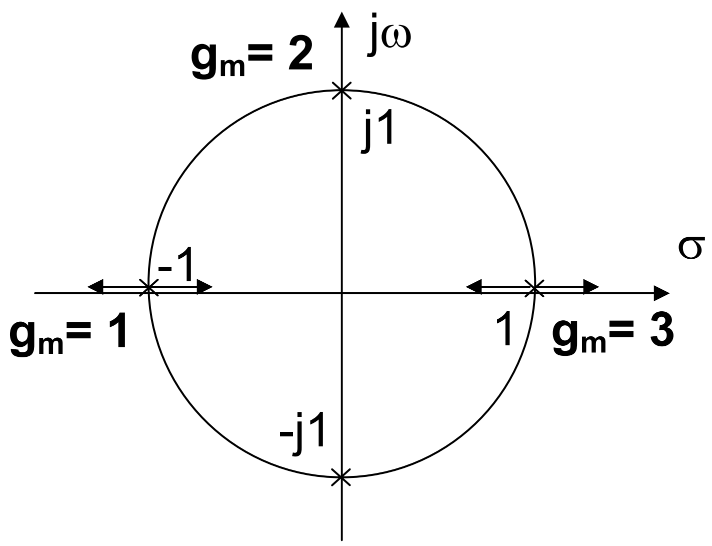
Nota : Em geral, para existir o RPS, o circuito deve ser assintoticamente estável!

Exemplo de Estabilidade

Circuito Livre



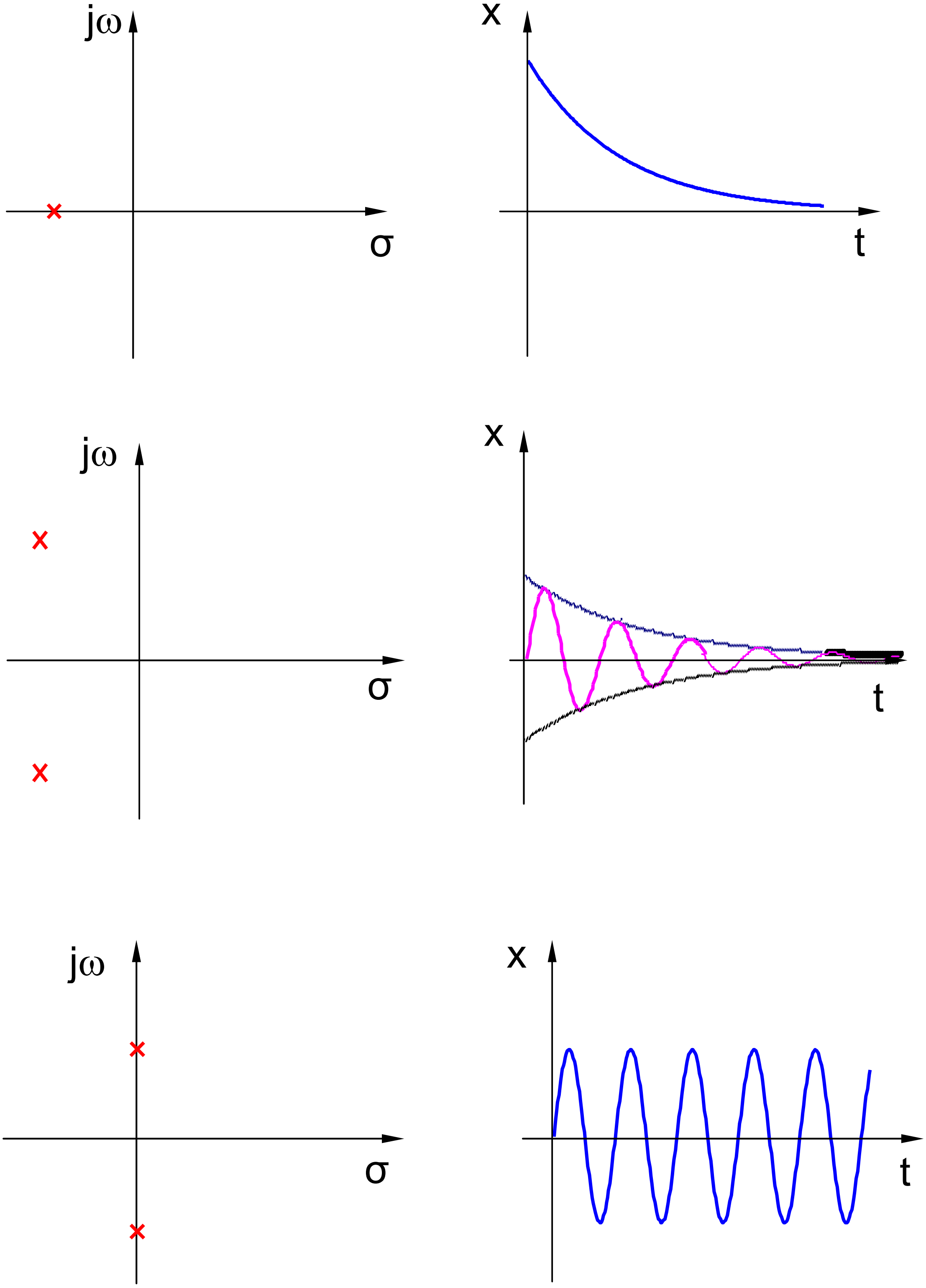
Lugar Geométrico das Raízes



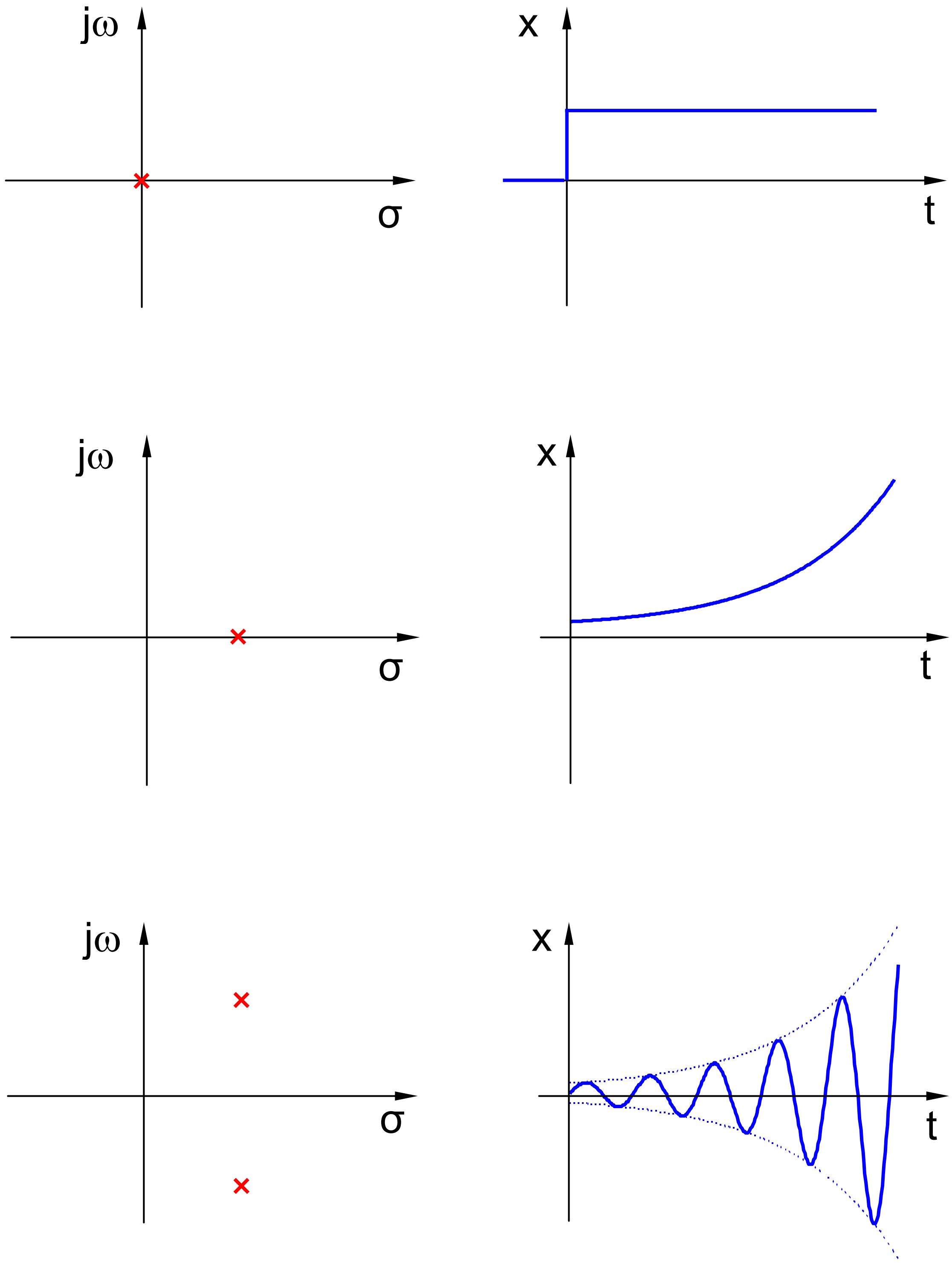
Equação Característica

$$\boxed{\frac{s}{2} + (2 - g_m) + \frac{1}{2s} = 0}$$

Polos e Estabilidade



Polos e Estabilidade



CRITÉRIOS DE ESTABILIDADE DAS REDES LINEARES, FIXAS E LIVRES

s_k , k=1,2,...n $\rightarrow$ FCPs da rede

- **Rede assintoticamente estável**

  $Re(s_k) < 0$ k=1,2,...n

  e não houver possibilidade de componentes constantes nas respostas

- **Rede marginalmente estável**

  $Re(s_k) \leq 0$ k=1,2,...n

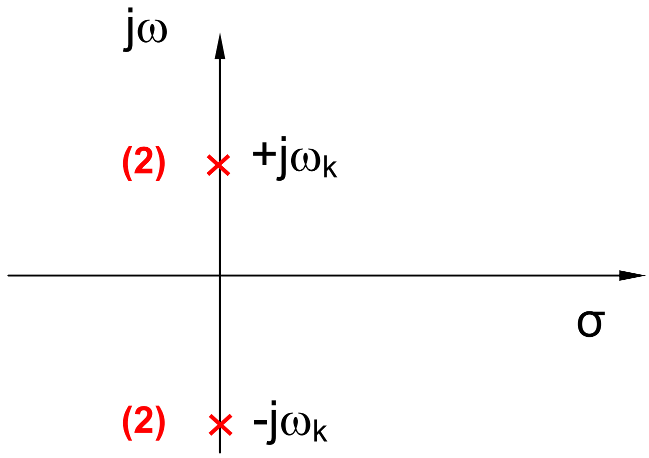
  e as $s_k = \pm j\omega_k$ são simples

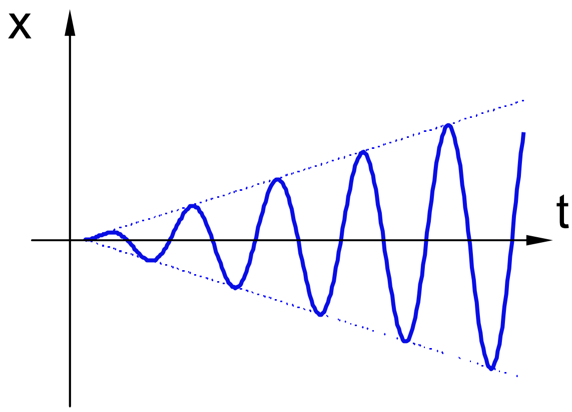
- **Rede instável**

  Existe s_k , tal que $Re(s_k) > 0$

L.Q.O.

FCPs múltiplas puramente imaginárias





$$x(t) = t\cos(\omega_k t + \Phi) +$$

$$t^2\cos(\omega_k t + \Phi) + t^3\cos(\omega_k t + \Phi) + \cdots$$

ESTABILIDADE DAS REDES COM EXCITAÇÃO

Rede estável entrada-saída ou **"BIBO"** (*bounded-in – bounded-out*)

$\downarrow$

A excitações limitadas correspondem saídas limitadas

Teorema : Uma rede linear fixa, assintoticamente estável é estável **BIBO**

Nota : A recíproca **não** é verdadeira !

RESPOSTA DAS REDES LINEARES

Transitória + **Permanente**

↓ ↓

Solução geral do sistema homogêneo

Solução particular do sistema completo

Livre (entrada zero) + **Forçada** (estado zero – c.i.q.)

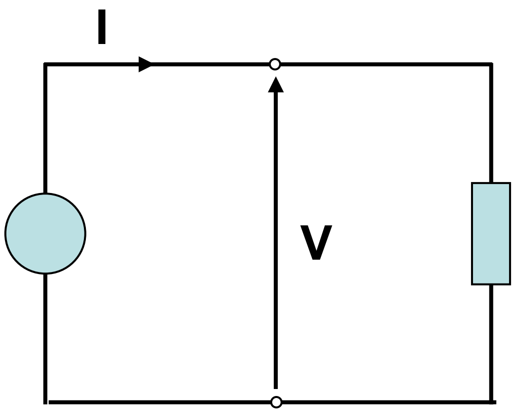
↓ ↓

Modos Naturais

Função de rede

FCPs

Funções de Rede



Funções de Entrada *(Driving Point)*

Impedância → $$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$ ← excitação

Admitância → $$Y(s) = \frac{I(s)}{V(s)}$$ ← excitação

Em RPS → $$Z(j\omega) = \frac{\hat{V}}{\hat{I}}$$

$$Y(j\omega) = \frac{\hat{I}}{\hat{V}}$$

Funções de Rede

Funções de Transferência

Impedância de transferência → Transimpedância

$$Z_{21}(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)} \quad \leftarrow \text{excitação}$$

Admitância de transferência → Transadmitância

$$Y_{21}(s) = \frac{I_2(s)}{V_1(s)} \quad \leftarrow \text{excitação}$$

Ganho de Tensão

$$G_v(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} \quad \leftarrow \text{excitação}$$

Ganho de Corrente

$$G_i(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} \quad \leftarrow \text{excitação}$$

MÉTODO DAS IMPEDÂNCIAS

- Transformadas ou Fasores obedecem às **Leis de Kirchhoff**

$\sum \pm I_k\,(s) = 0$ $\quad\quad$ $\sum \pm \hat{I}_k = 0,$ **Nó**

$\sum \pm V_k\,(s) = 0$ $\quad\quad$ $\sum \pm \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{k}} = 0,$ **Laço**

- Relações V(s)/I(s) (com c.i.q.) ou $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{k}} / \hat{I}_k$ são do tipo da **Lei de Ohm**

Circuito resistivo

$\boxed{v = R.i}$

Circuito $\forall$

$V(s) = R\,.\,I(s)$

$V(s) = sL\,.\,I(s)$

$V(s) = (1/sC).\,I(s)$

$\boxed{V(s) = Z(s).\,I(s)}$

RPS

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{R.\hat{I}}$$

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{j\omega L.\hat{I}}$$

$$\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{(1/j\omega C).\hat{I}}$$

$$\boxed{\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{Z.\hat{I}}}$$

MÉTODO DAS IMPEDÂNCIAS

Técnicas de Simplificação :

- Associação Série/Paralelo
- Divisor de Tensão/Corrente
- Transformação de Fontes
- Transformação Δ Y
- Proporcionalidade Excitação/Resposta

Função de Rede

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} + a_n}$$

$$F(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)}$$

$$F(s) = K \frac{(s - z_1)^{m_1}(s - z_2)^{m_2}\ldots(s - z_g)^{m_g}}{(s - p_1)^{n_1}(s - p_2)^{n_2}\ldots(s - p_k)^{n_k}}$$

$$F(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{\det Ma(s)} \cdot \operatorname{adj} Ma(s)$$

Pólos da Função de Rede $\rightarrow$ FCP

FCP pode não ser pólo se houver cancelamento

Função de Rede e FCP

Se os geradores independentes são

conectados na rede tal que:

- Gerador de Tensão : em série com o ramo $\rightarrow$ Regra do "Alicate"
- Gerador de Corrente : em paralelo com o ramo $\rightarrow$ Regra do "Ferro de Solda"

FCP $\longrightarrow$ $\boxed{\det Ma(s) = 0}$

Função de Rede $\longrightarrow$

$$\boxed{F(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{\det Ma(s)} \,.\, \operatorname{adj} Ma(s)}$$

Pólos de F(s) ≡ FCPs

FCP pode não ser pólo
(se houver cancelamento)

- FCPs da Rede Livre

$\boxed{\det Ma(s) = 0}$

Modos Naturais → **resposta livre**, **transitórios**, **estabilidade**

(não prevêem componentes constantes)

- **Pólos de Função de Rede**

Sub-conjunto das FCPs → **alicate**, **ferro de solda**

- **Pólos de uma Resposta**

$$\boxed{R(s) = F(s).U(s)}$$

{pólos de R(s)} =

{pólos de F(s)} U {pólos de U(s)}

Computação de Funções de Rede

Programas simbólicos ou

semi-simbólicos

Entrada : Descrição do circuito

Saídas :

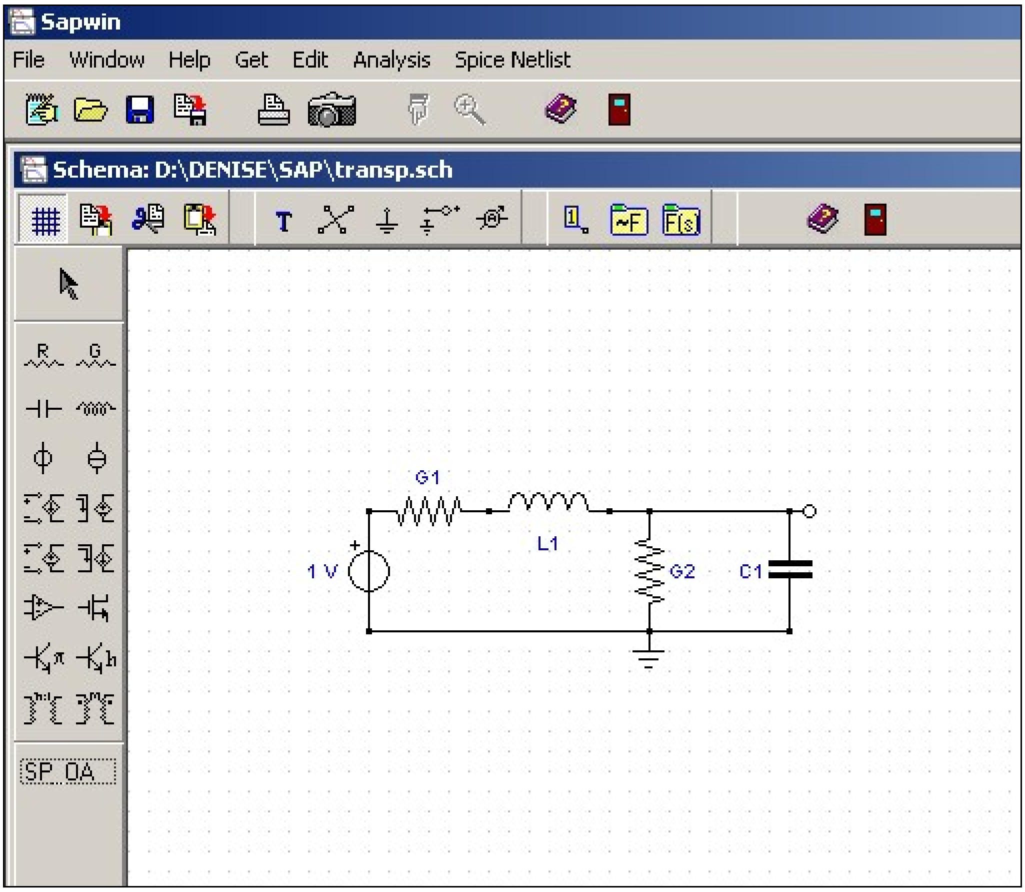
- Fator de Escala
- Pólos e Zeros
- Coeficientes dos polinômios do numerador e do denominador

Exemplos :

- Programa **TRF** (Prof. Vitor)
- Programa SAPWIN

http://cirlab.det.unifi.it/SapWin/Download.htm

Exemplo com SAPWIN



Função de Rede Simbólica

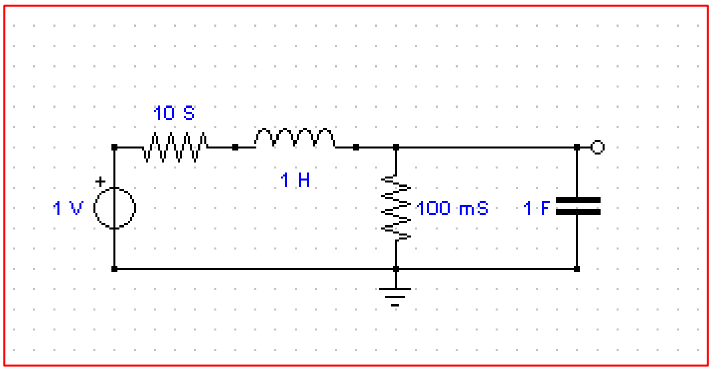
(+ G1)

(+ G1 + G2)

(+ C1 + G2 G1 L1) s

(+ G1 C1 L1) s^2

Exemplo com SAPWIN



Função de Rede Numérica

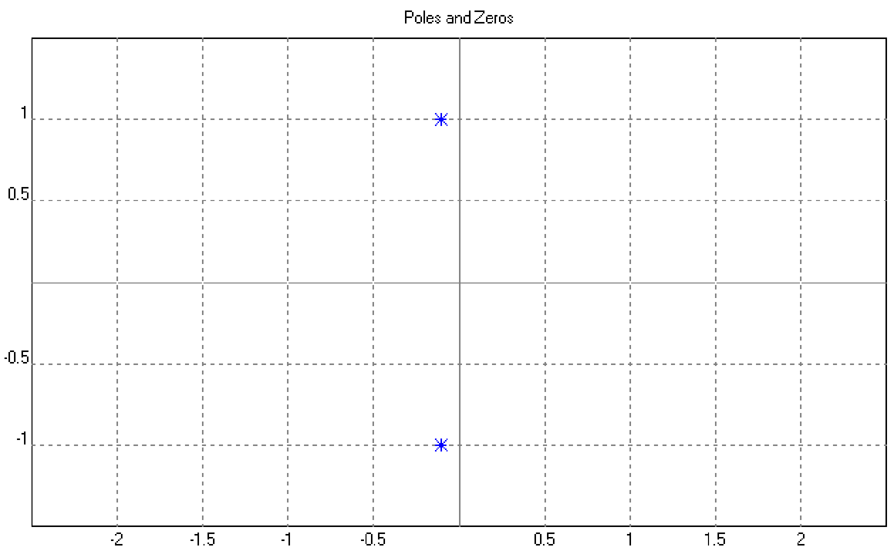
(+10)

(+10.1)

(+2) s

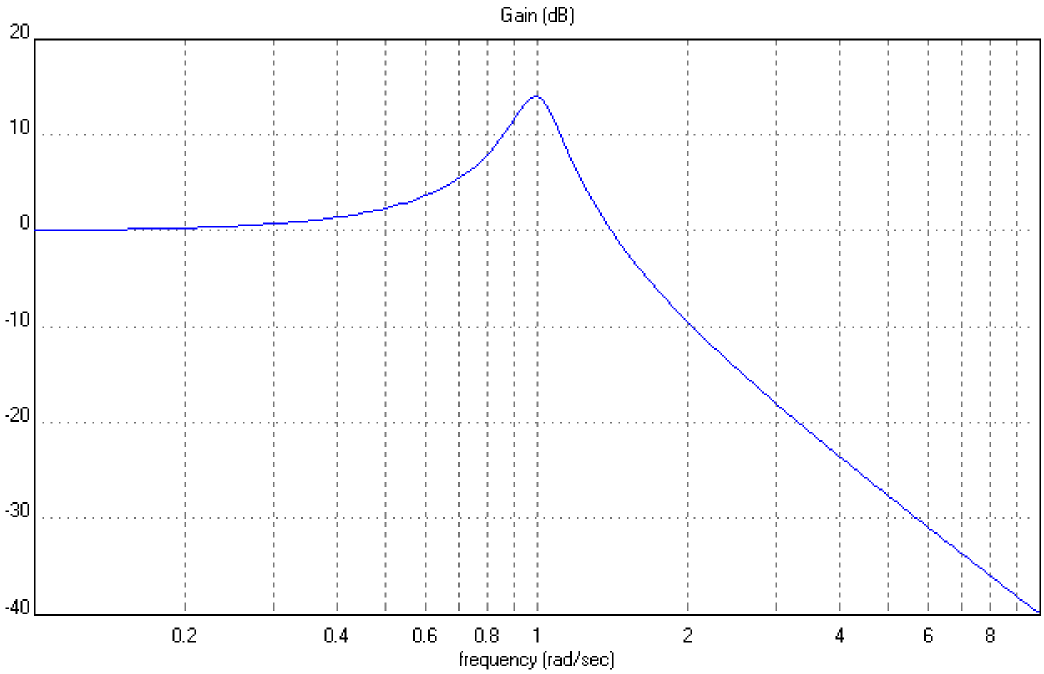
(+10) s^2

Diagrama de Pólos e Zeros

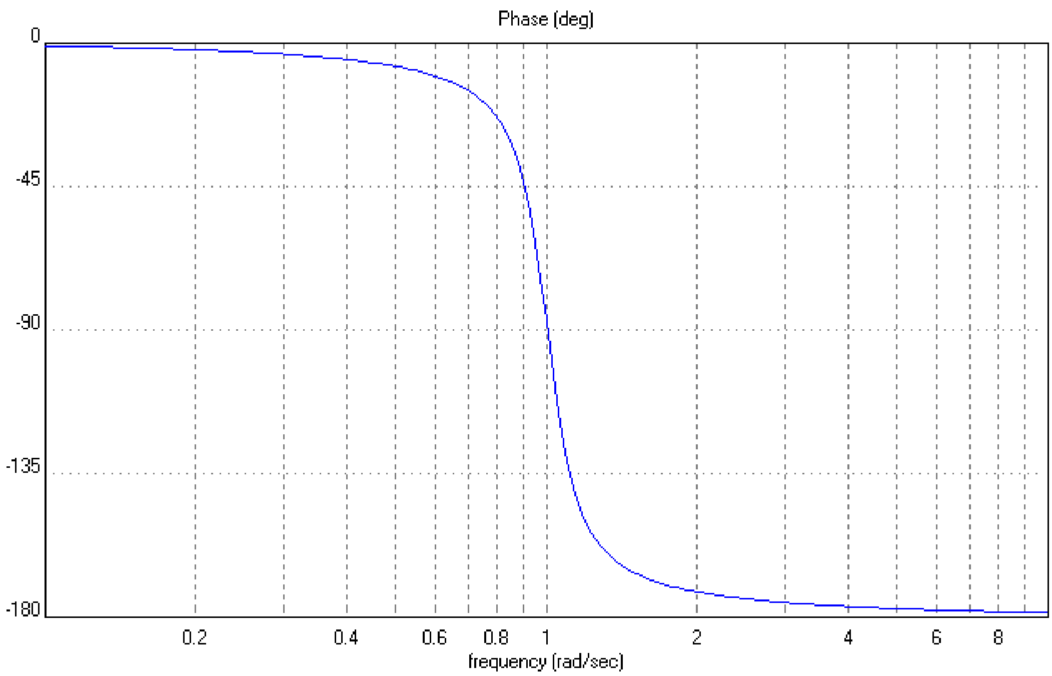


Resposta em Freqüência

Módulo



Defasagem



Resposta em Freqüência

Função de Rede : **F(s)**

Resposta em freqüência : $s \rightarrow j\omega$

$F(j\omega)$

$$\boxed{F(j\omega) = M(\omega) \,.\, e^{\,j\Phi(\omega)}}$$

$M(\omega) = |F(j\omega)| \rightarrow$ curva do módulo da resposta em freqüência

$\Phi(\omega) = \arg F(j\omega) \rightarrow$ curva de defasagem

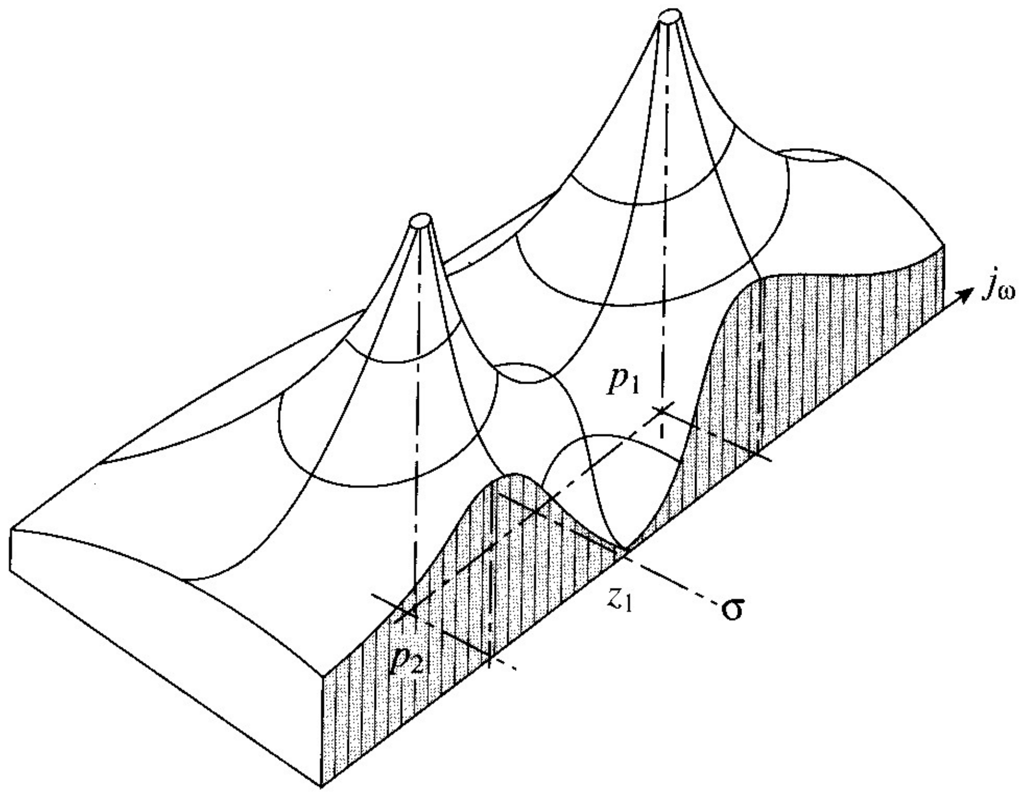
Propriedades

$F(s^*) = F^*(s) \rightarrow F(j\omega^*) = F^*(j\omega)$

$M(-\omega) = M(\omega)$ simetria par

$\Phi(-\omega) = -\Phi(\omega)$ simetria impar

Representação Tridimensional de uma Função de Rede



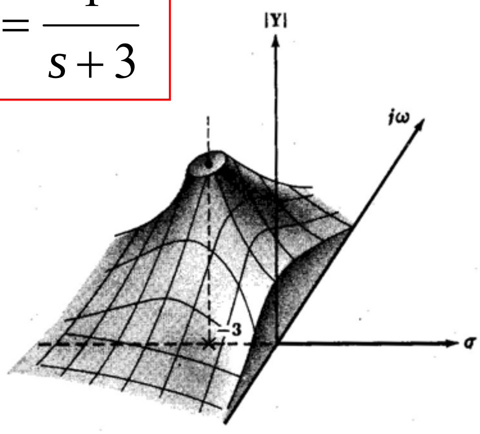
Plano s

Zero : $z_1 = 0$

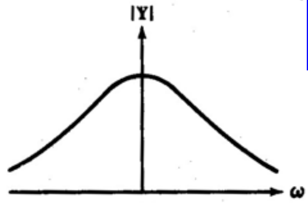
Pólos complexos conjugados : p_1 e p_2

Função de Rede e Resposta em Freqüência

$$Y(s) = \frac{1}{s+3}$$

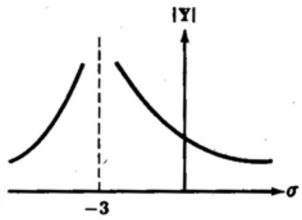


(a)



(b)

$$\sigma = 0$$

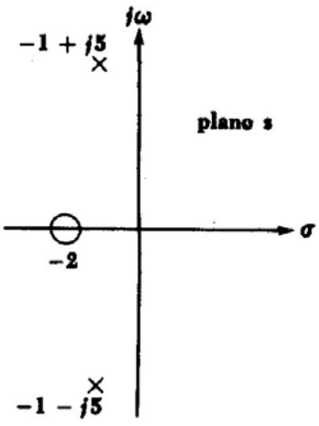


(c)

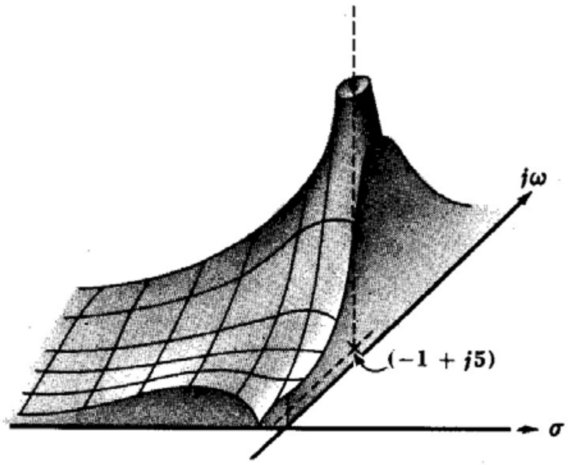
$$\omega = 0$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\left|Y(s)\right| = \frac{1}{\sqrt{(\sigma+3)^2 + \omega^2}}$$



(a)



(b)

$$Z(s) = K\frac{(s+2)}{(s+1-j5)(s+1+j5)}$$

TEOREMA DA SUPERPOSIÇÃO

REDE LINEAR

VÁRIAS EXCITAÇÕES

RESPOSTA = $\sum$ respostas devidas a cada gerador independente, com os demais desativados

Fonte de Tensão $\rightarrow$ curto-circuito

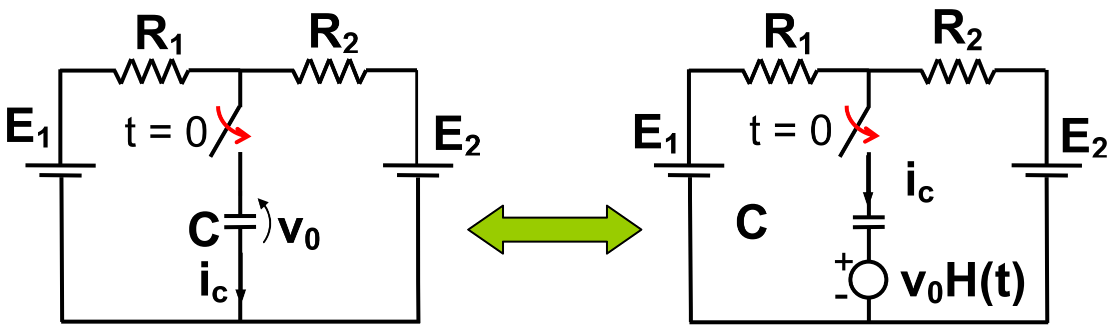
Fonte de Corrente $\rightarrow$ circuito aberto

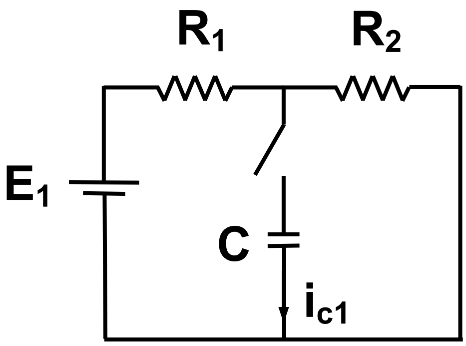
ATENÇÃO : Nunca inativar

gerador vinculado !!

Teorema da Superposição

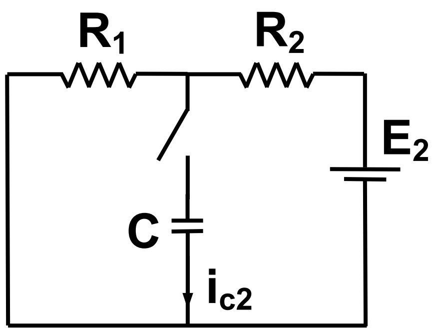
Exemplo com Condição Inicial





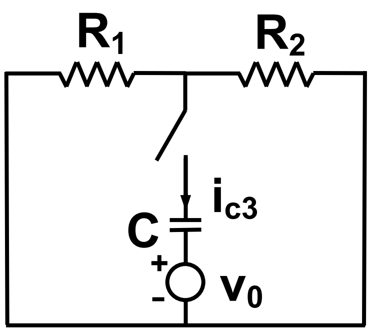
$$i_{c1} = \frac{E_1}{R_1} e^{-t/\tau}$$

$$\tau = RC$$



$$R = R_1 // R_2$$

$$i_{c2} = \frac{E_2}{R_2} e^{-t/\tau}$$



$$i_{c3} = \frac{-v_0}{R} e^{-t/\tau}$$

Rede Linear Fixa

$$i_c = i_{c1} + i_{c2} + i_{c3}$$

TEOREMA DA SUPERPOSIÇÃO

REDE N LINEAR

$\forall$ **resposta em estado zero (c.i.q.) devida a todas as excitações** = soma das respostas em estado zero, devidas à ação separada de cada fonte independente, com as demais desativadas

Demonstração $\rightarrow$ linearidade das leis de Kirchhoff e das relações de ramos

Em termos de **Funções de Rede** :

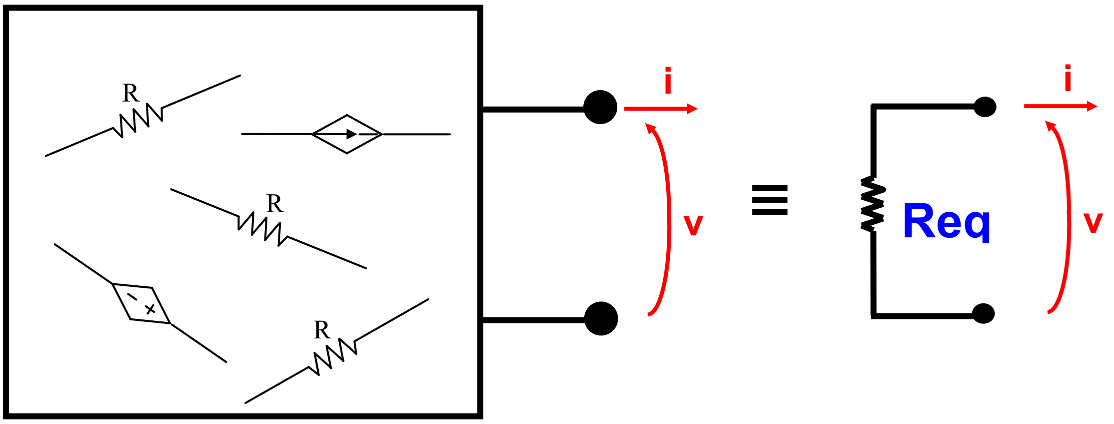
$$\boxed{X(s) = \sum_{k=1}^{m} H_k(s).U_k(s)}$$

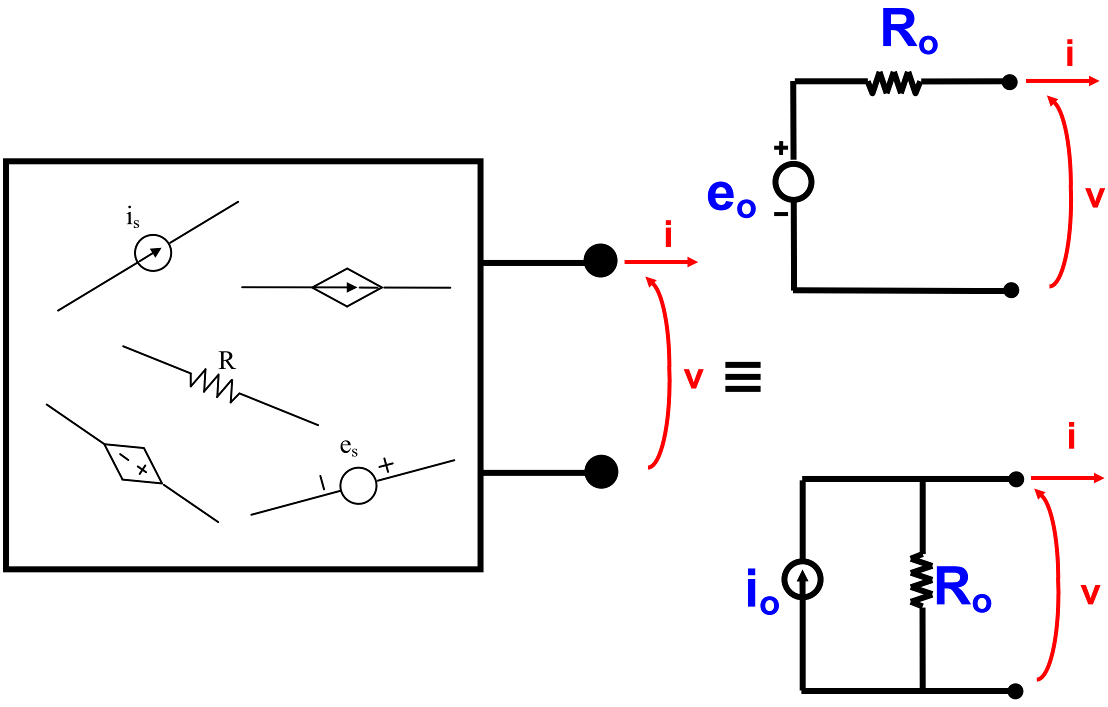
$X(s)$ = transformada da resposta

$H_k(s)$ = funções de rede da resposta com relação a cada uma das excitações

$U_k(s)$ = transformadas das excitações

TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

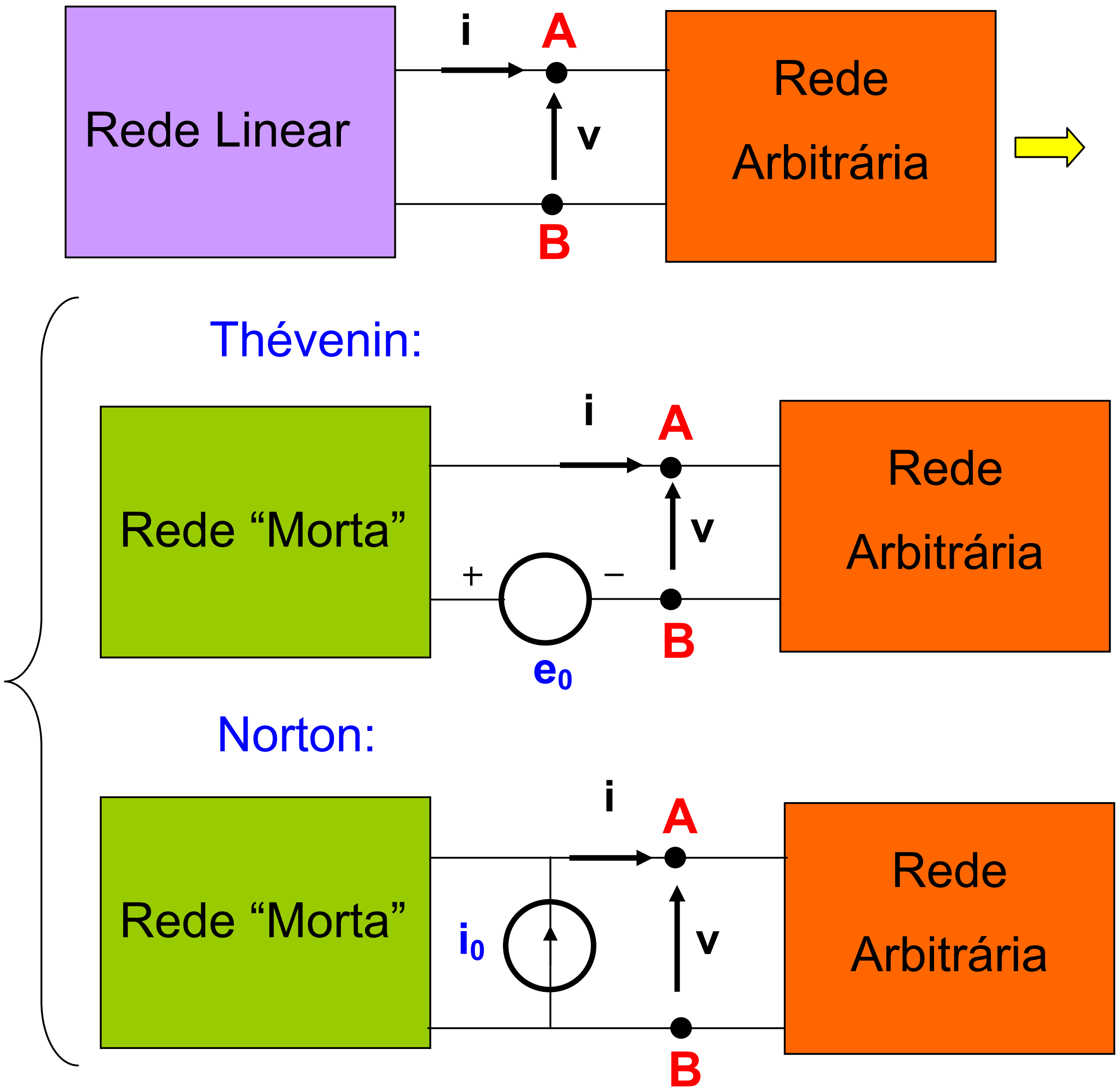




REDE LINEAR FIXA

$$R_o = \frac{e_o}{i_o} \qquad\qquad i_o = \frac{e_o}{R_o}$$

TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON



Rede “Morta” = **Rede linear** inativada

$\mathbf{e_0}$ = tensão em aberto produzida pela **rede linear** entre os terminais **A** e **B**

$\mathbf{i_0}$ = corrente de curto produzida pela **rede linear** entre os terminais **A** e **B**

Aplicação dos Teoremas de Thévenin e Norton

1- Circuito com Resistores e Geradores independentes

- Calcular e_o ou i_o com geradores ativados
- Calcular Ro com geradores desativados

2- Circuito com Resistores e Geradores vinculados (nenhum gerador independente)

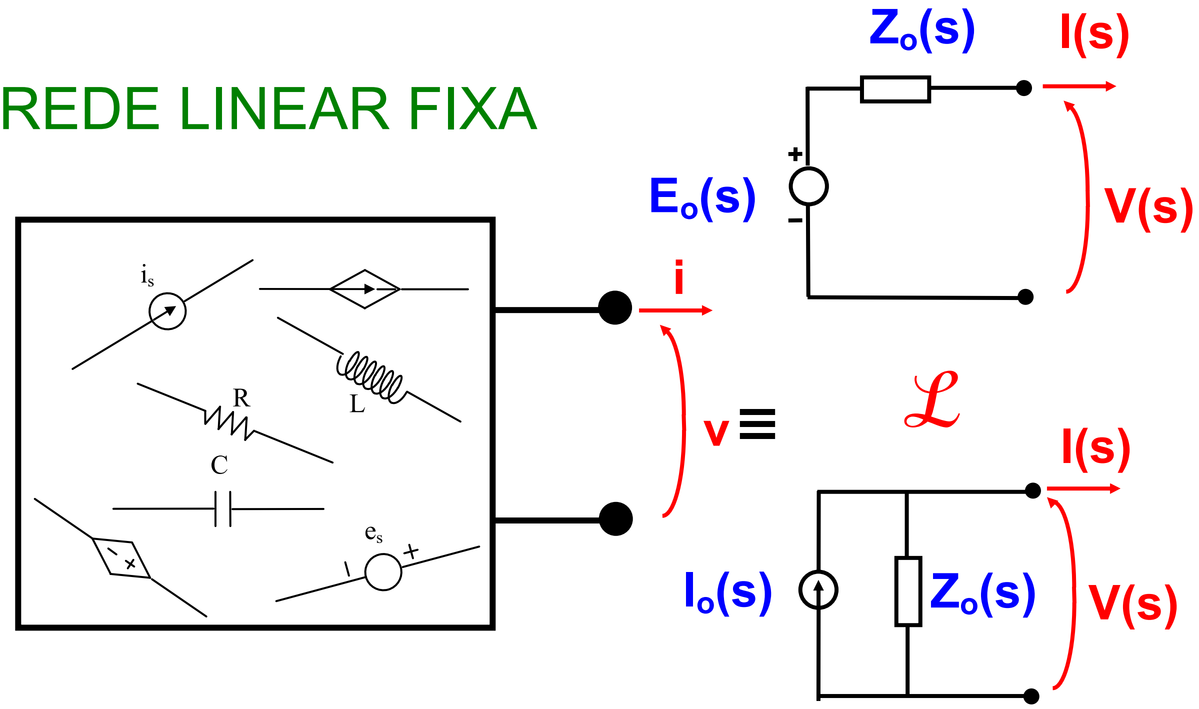
- $e_o = i_o = 0$
- Calcular Ro impondo tensão e calculando corrente (ou vice-versa)

3- Circuito com Resistores e Geradores vinculados e Geradores independentes

- Calcular e_o
- Calcular i_o
- Calcular $R_o = e_o / i_o$

TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

REDE LINEAR FIXA



$$Z_o(s) = \frac{E_o(s)}{I_o(s)} \qquad I_o(s) = \frac{E_o(s)}{Z_o(s)}$$

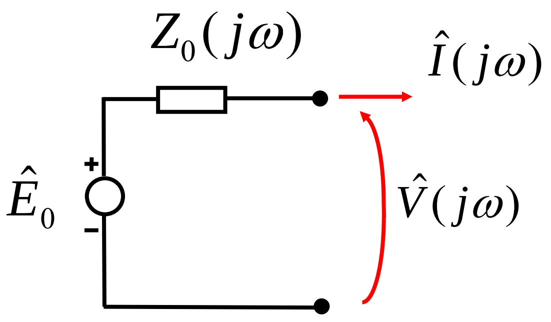
$E_o(s)$ → Tensão em aberto (transformada)

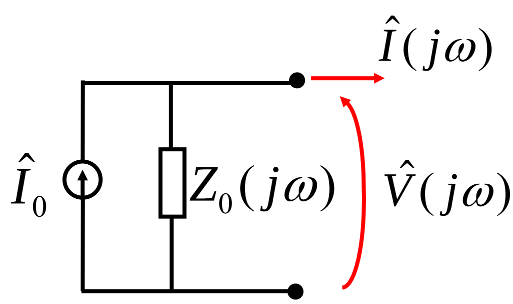
$I_o(s)$ → Corrente de curto (transformada)

$Z_o(s)$ → Impedância interna
(com os geradores independentes inativados)

TEOREMAS DE THÉVENIN E DE NORTON

Em RPS :





$$\boxed{Z_o(j\omega) = \frac{\hat{E}_o}{\hat{I}_o}}$$

$$\boxed{\hat{I}_o = \frac{\hat{E}_o}{Z_0}}$$

$\hat{E}_0$ $\rightarrow$ Fasor da tensão em aberto

$\hat{I}_0$ $\rightarrow$ Fasor da corrente de curto

$Z_0\,(j\omega)$ $\rightarrow$ Impedância interna
(com os geradores independentes inativados)