



Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

PSI3213

Circuitos Elétricos II

Bloco 2

Análise Nodal de Redes RLC

Prof^a Denise Consonni

ANÁLISE DE REDES

► *ANÁLISE NODAL* $\Rightarrow$

1ª Lei de Kirchhoff em NÓS

► *ANÁLISE DE MALHAS* $\Rightarrow$

2ª Lei de Kirchhoff MALHAS

► *ANÁLISE DE CORTES* $\Rightarrow$

**1ª Lei Kirchhoff CORTES
FUNDAMENTAIS**

► *ANÁLISE DE LAÇOS* $\Rightarrow$

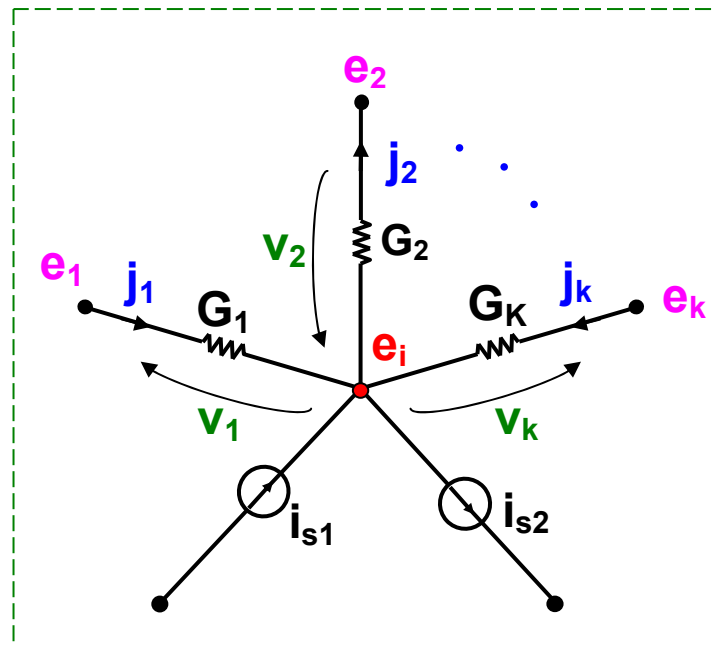
**2ª Lei Kirchhoff LAÇOS
FUNDAMENTAIS**

Etapas da Análise Nodal

1. Definir ramos e nós
2. Escolher nó de referência (“terra”)
3. Definir tensões nodais
4. Aplicar a 1ª Lei de Kirchhoff a cada nó, exceto o de referência
5. Expressar as correntes de ramo em função das tensões nodais
6. Ordenar as equações em relação às tensões nodais
7. Compor a equação matricial relacionando tensões nodais e excitações

ANÁLISE NODAL

Nó Genérico i:



1ª Lei de Kirchhoff:

$$-j_1 + j_2 + \cdots - j_k = i_{s1} - i_{s2}$$

Relações Constitutivas j / v (Lei de Ohm):

$$-G_1 v_1 + G_2 v_2 + \cdots - G_k v_k = i_{s1} - i_{s2}$$

Relações tensões de ramo / tensões nodais:

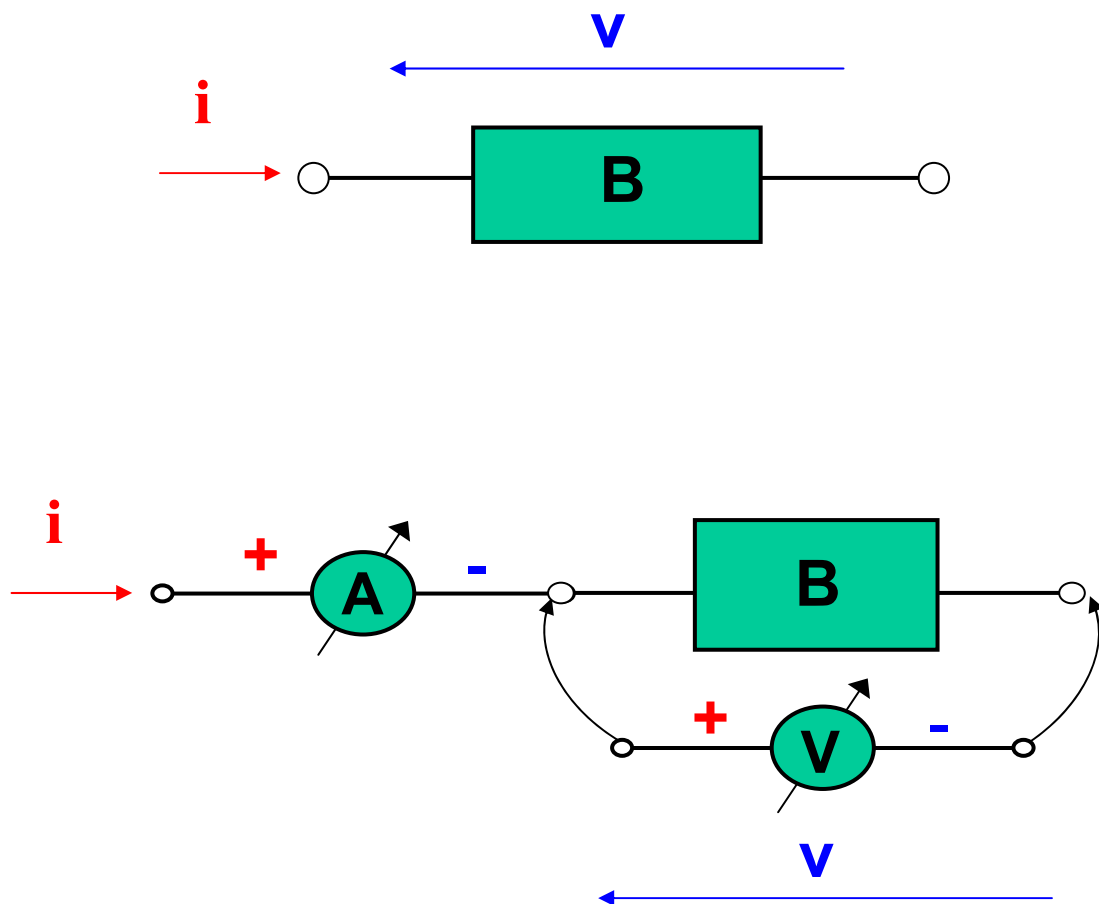
$$-G_1(e_1 - e_i) + G_2(e_i - e_2) + \cdots - G_k(e_k - e_i) = i_{s1} - i_{s2}$$

Resultado:

$$-G_1 e_1 - G_2 e_2 + (G_1 + G_2 + \cdots + G_k) e_i + \cdots - G_k e_k = i_{s1} - i_{s2}$$

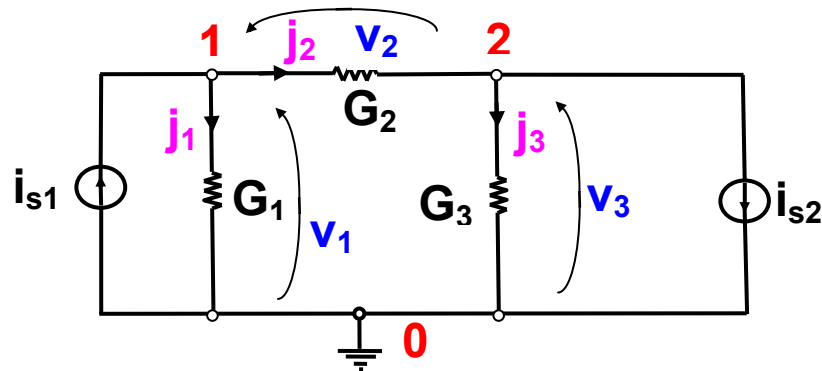
Sentidos de Referências (Flechas) de Correntes e Tensões nos Bipolos

São regras para Ligar Amperímetros e Voltímetros:



L.Q.O.

Exemplo de Análise Nodal



1ª Lei de Kirchhoff nos nós:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nó 1 : } j_1 + j_2 - i_{s1} = 0 \\ \text{Nó 2 : } -j_2 + j_3 + i_{s2} = 0 \end{array} \right.$$

Relações Constitutivas j/v e
relações tensão de ramo / tensões nodais:

$$\left\{ \begin{array}{l} j_1 = G_1 v_1 = G_1 e_1 \\ j_2 = G_2 v_2 = G_2 (e_1 - e_2) \\ j_3 = G_3 v_3 = G_3 e_2 \end{array} \right.$$

Resultado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nó 1 : } G_1 e_1 + G_2 e_1 - G_2 e_2 - i_{s1} = 0 \\ \text{Nó 2 : } -G_2 e_1 + G_2 e_2 + G_3 e_2 + i_{s2} = 0 \end{array} \right.$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_2) & -G_2 \\ -G_2 & (G_2 + G_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \end{bmatrix}$$

$$G_n \cdot \underset{\sim}{e}(t) = \underset{\sim}{i}_{sn}$$

ANÁLISE NODAL DE REDES RESISTIVAS LINEARES

Equação Geral

$$\underset{\sim}{G}_n \cdot \underset{\sim}{e}(t) = \underset{\sim}{i}_{sn}(t)$$

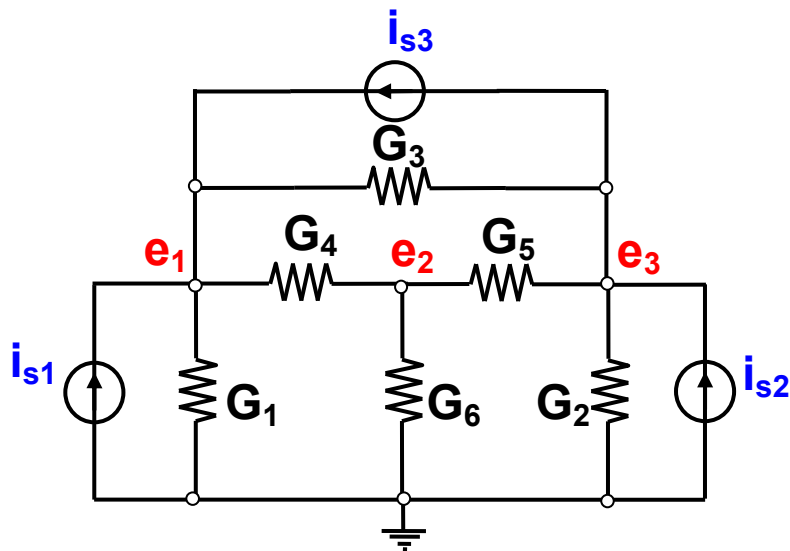
$\underset{\sim}{G}_n$ - *Matriz das condutâncias nodais*

$\underset{\sim}{e}(t)$ - *vetor das tensões nodais*

$\underset{\sim}{i}_{sn}(t)$ - *vetor das fontes de corrente*

Sistema Algébrico Linear

Exemplo de Análise Nodal



Equação matricial de análise nodal:

$$\begin{bmatrix} (G_1 + G_3 + G_4) & -G_4 & -G_3 \\ -G_4 & (G_4 + G_5 + G_6) & -G_5 \\ -G_3 & -G_5 & (G_2 + G_3 + G_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{s1} + i_{s3} \\ 0 \\ i_{s2} - i_{s3} \end{bmatrix}$$

ANÁLISE NODAL

➤ r tensões e r correntes desconhecidas



- Expressar r tensões de ramos em função das $(n-1)$ tensões nodais → 2ª Lei de Kirchhoff



➤ $(n-1)$ tensões e r correntes desconhecidas



- Expressar r correntes de ramos em função das $(n-1)$ tensões nodais → Lei de Ohm



➤ $(n-1)$ tensões desconhecidas



- Escrever $(n-1)$ equações independentes e resolver → 1ª Lei de Kirchhoff



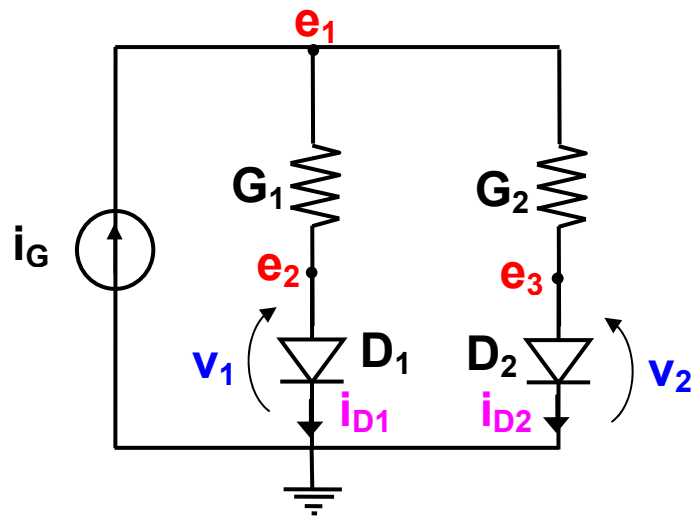
RESPOSTA



Quando 1 ramo = fonte de corrente →

➤ r tensões e $(r-1)$ correntes desconhecidas

Análise Nodal em Redes Não Lineares



$$i_{Dk} = I_{sk} (e^{\lambda v_k} - 1)$$

Diodos $k=1,2$

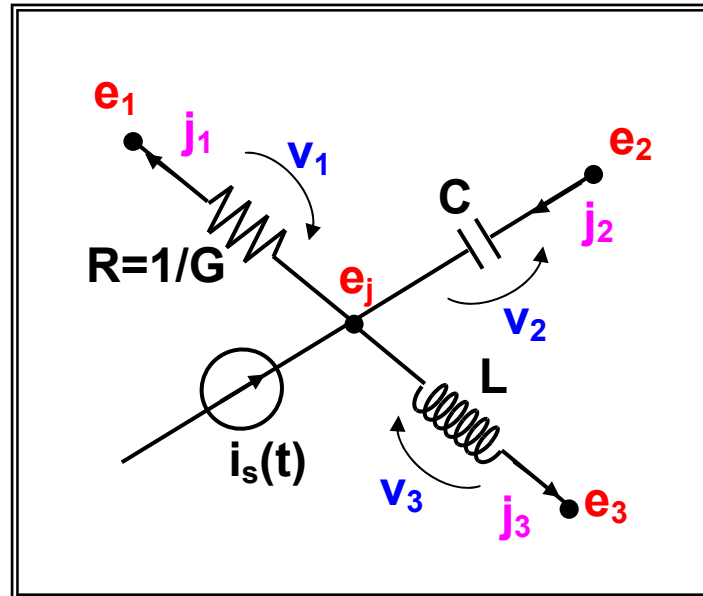
1ª Lei de Kirchhoff nos três nós:

$$G_1(e_1 - e_2) + G_2(e_1 - e_3) = i_G$$

$$G_1(e_2 - e_1) + I_{s1}(e^{\lambda e_2} - 1) = 0$$

$$G_2(e_3 - e_1) + I_{s2}(e^{\lambda e_3} - 1) = 0$$

GENERALIZAÇÃO DA ANÁLISE NODAL



1ª Lei de Kirchhoff : $j_1(t) - j_2(t) + j_3(t) = i_s(t)$

Relações **j/v** e **relações tensão de ramo/tensões nodais**:

$$j_1 = Gv_1 = G(e_j - e_1)$$

$$j_2 = C \frac{dv_2}{dt} = CD(e_2 - e_j)$$

$$\begin{aligned} j_3 &= \frac{1}{L} \int_0^t v_3(\tau) d\tau + j_3(0) = \\ &= \frac{1}{L} D^{-1}(e_j - e_3) + j_3(0) \end{aligned}$$

GENERALIZAÇÃO DA ANÁLISE NODAL

Operadores:

$$D^k_{\Delta} = \frac{d^k}{dt^k}$$

$$D^{-1}_{\Delta} = \int_0^t$$

Equação do nó j :

$$\begin{aligned} -G.e_1 - CDe_2 - \frac{1}{L} D^{-1}e_3 \\ + \left(G + CD + \frac{1}{L} D^{-1} \right) e_j = \\ i_s - j_3(0) \end{aligned}$$

Aplicando a todos os nós do circuito:

$$Y_n(D) \cdot \underset{\sim}{e}(t) = \underset{\sim}{i}_{sn}(t) + \underset{\sim}{j}_0$$

Sistema de equações íntegro-diferenciais

Relações Constitutivas nas Redes R,L,C



Nos resistores:

$$j_k = G_k (e_i - e_f) \qquad G_k = 1 / R_k$$

Nos capacitores:

$$j_k = C_k \frac{d}{dt} (e_i - e_f) = C_k D (e_i - e_f)$$

Nos indutores:

$$j_k = \frac{1}{L_k} \int_{0_-}^t (e_i - e_f) dt + j_{k0} = \frac{1}{L_k} D^{-1} (e_i - e_f) + j_{k0}$$

G_k , $C_k D$ e $(1/L_k)D^{-1}$ são
operadores de admitância

L.Q.O

ANÁLISE NODAL DE REDES R,L,C NO DOMÍNIO DO TEMPO

Equação Geral

$$\tilde{Y}_n(D) \cdot \tilde{e}(t) = \tilde{i}_{sn}(t) + \tilde{j}_0$$

$\tilde{Y}_n(D)$ - *Matriz de operadores de admitâncias nodais*

$\tilde{e}(t)$ - *vetor das tensões nodais*

$\tilde{i}_{sn}$ - *vetor das fontes de corrente nodais*

$\tilde{j}_0$ - *vetor das correntes iniciais nos indutores*

Sistema de Equações Íntegro-Diferenciais

L.Q.O

Teorema da Derivada

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = s \cdot F(s) - f(0_-)$$

Com operador

$$D^k \underset{\Delta}{=} \frac{d^k}{dt^k} \longrightarrow$$

$$\mathcal{L} [Df(t)] = s \cdot F(s) - f(0_-)$$

Teorema da Integral

$$\mathcal{L} \left[\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s}$$

Com operador

$$D^{-1} \underset{\Delta}{=} \int_0^t \longrightarrow$$

$$\mathcal{L} [D^{-1} f(t)] = \frac{F(s)}{s}$$

Operadores de Admitância

Condutância:

$$G_k = 1 / R_k$$

Admitância Capacitiva:

$$C_k D$$

Admitância Indutiva:

$$\frac{1}{L_k} D^{-1}$$

ANÁLISE NODAL DE REDES R,L,C NO DOMÍNIO DE LAPLACE

- Condições Iniciais Nulas

$$\tilde{Y}_n(s) \cdot \tilde{E}(s) = \tilde{I}_{sn}(s)$$

- Condições Iniciais Arbitrárias

$$\tilde{Y}_n(s) \cdot \tilde{E}(s) = \tilde{I}_{sn}(s) + \frac{\tilde{j}_0}{s} + \tilde{q}_0$$

$\tilde{j}_0$ - *vetor das correntes iniciais
nos indutores*

$\tilde{q}_0$ - *vetor das cargas iniciais
nos capacitores*

Sistema de Equações
Algébricas em s

L.Q.O

ELEMENTOS DA MATRIZ DE ADMITÂNCIAS NO DOMÍNIO DE LAPLACE

Condutância:

$$G_k = 1 / R_k$$

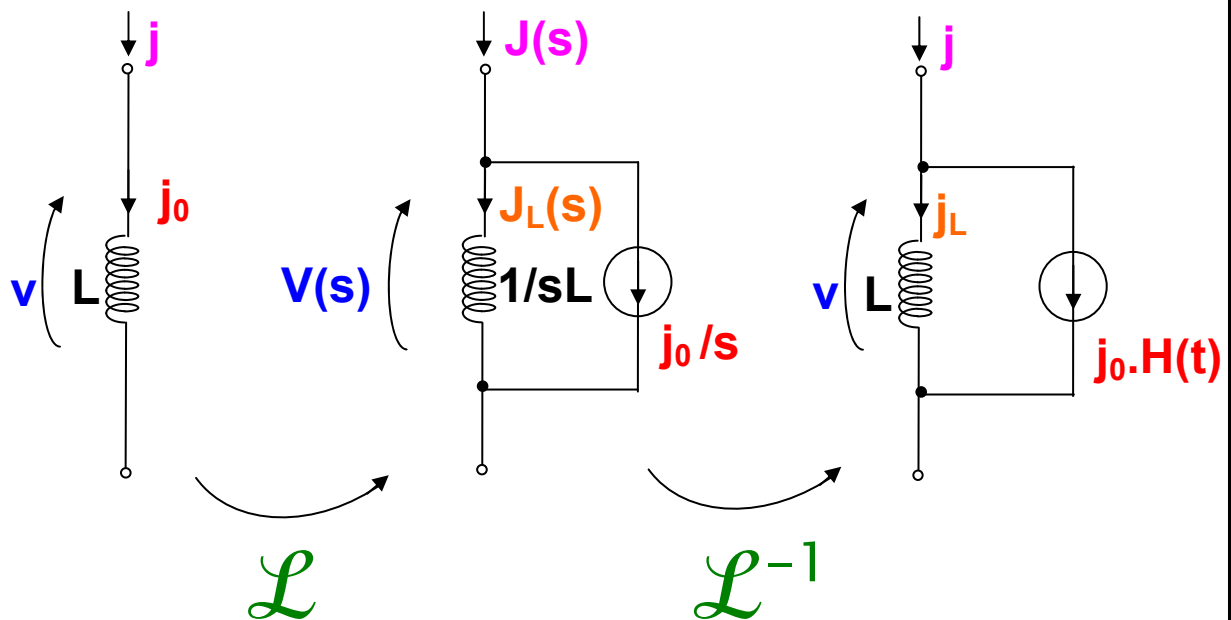
Admitância Capacitiva:

$$C_k D \longrightarrow s C_k$$

Admitância Indutiva:

$$\frac{1}{L_k} D^{-1} \longrightarrow \frac{1}{s L_k}$$

Condições Iniciais na Análise Nodal



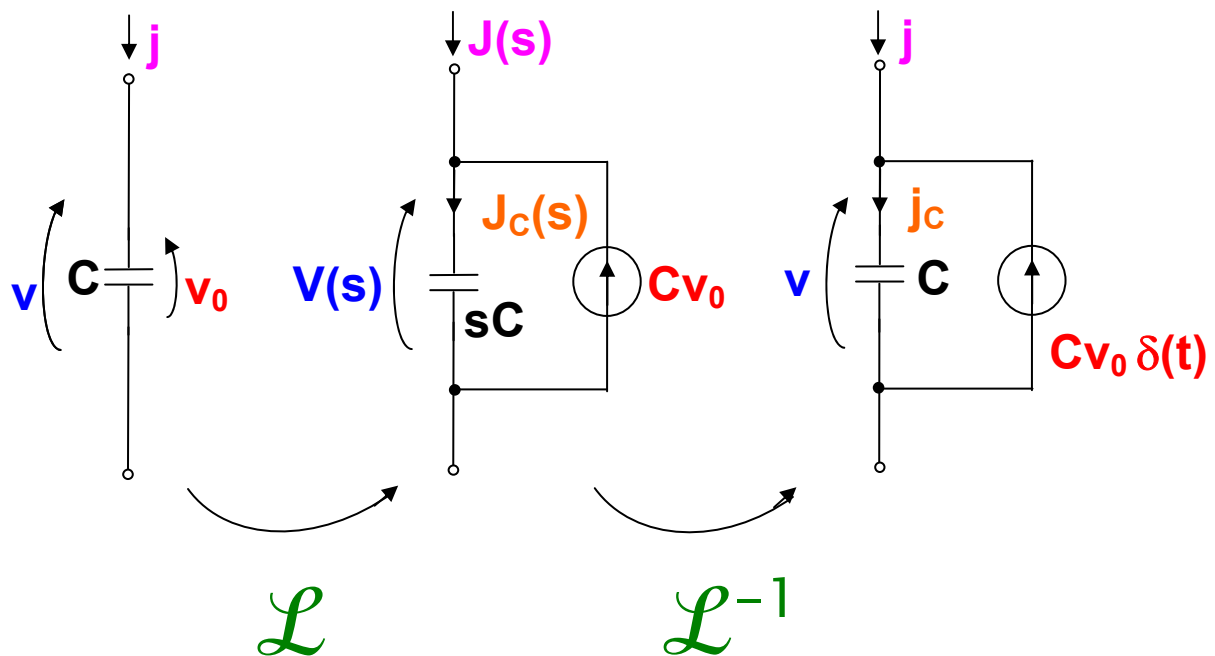
$$j = \frac{1}{L} \int_{0_-}^t v(\lambda) d\lambda + j_0$$

j_L

$$J(s) = \frac{1}{sL} V(s) + \frac{j_0}{s}$$

$J_L(s)$

Condições Iniciais na Análise Nodal

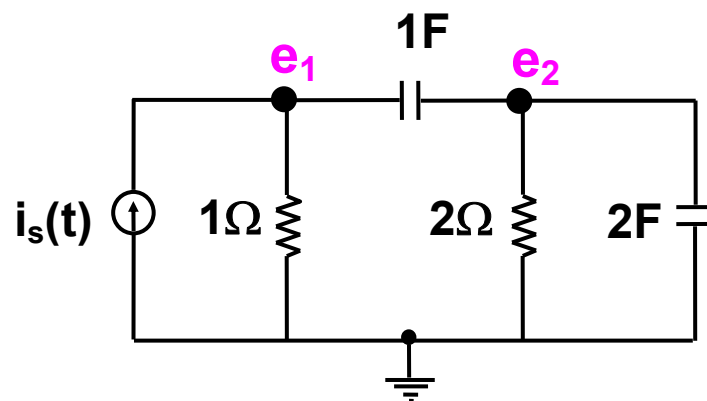


$$j = C \frac{dv}{dt}$$

$$J(s) = sC V(s) - Cv_0$$

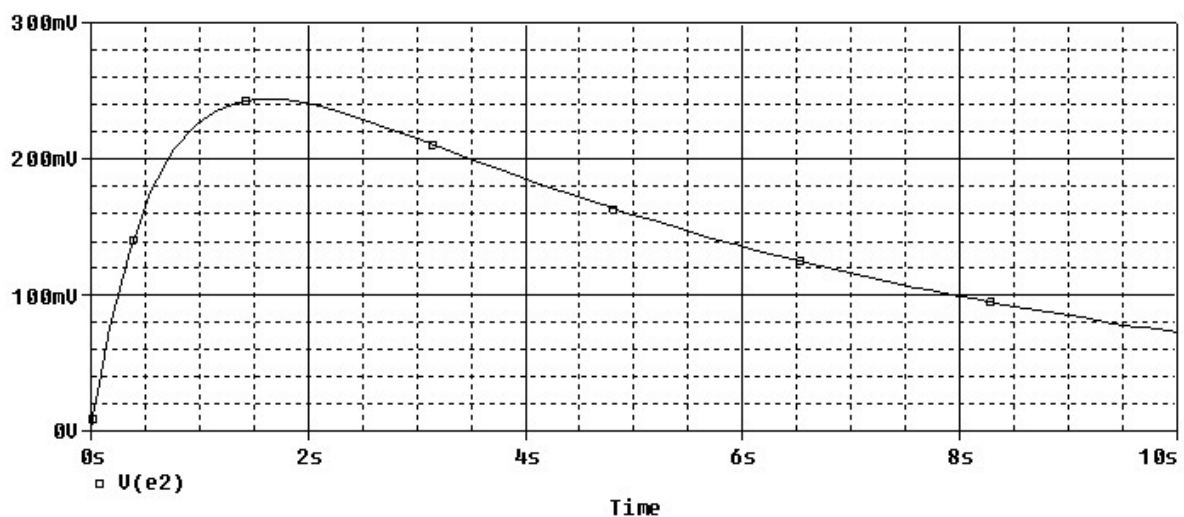
$$J_C(s)$$

Exemplo de Análise Nodal



$$i_s(t) = H(t)$$

c.i.q.



$$e_2(t) = 0,3482 (e^{-0,157t} - e^{-1,593t}) \cdot H(t)$$

ANÁLISE NODAL EM REGIME PERMANENTE SENOIDAL

Domínio do Tempo:

$$\underset{\sim}{Y}_n(D) \cdot \underset{\sim}{e}(t) = \underset{\sim}{i}_{sn}(t)$$

Excitações:

$$\underset{\sim}{i}_{sn}(t) = \text{Re} \left[\underset{\sim}{\hat{I}}_{sn} \cdot e^{j\omega t} \right]$$

Soluções:

$$\text{Re} \left[\underset{\sim}{\hat{E}} \cdot e^{j\omega t} \right]$$

Condições:

- Circuito linear fixo
- Fontes senoidais de mesma frequência (sincronizadas)
- Transitórios decaem a zero (circuito assintoticamente estável)
- Desprezar condições iniciais

ANÁLISE NODAL EM REGIME PERMANENTE SENOIDAL

$$Y_n(j\omega) \cdot \underset{\sim}{\hat{E}} = \underset{\sim}{\hat{I}}_{sn}$$

$Y_n(j\omega)$ - *Matriz de admitâncias nodais*

$\underset{\sim}{\hat{E}}$ - *vetor dos fasores das tensões nodais*

$\underset{\sim}{\hat{I}}_{sn}$ - *vetor dos fasores das fontes de corrente nodais*

**Sistema de Equações
Algébricas Complexas**

ANÁLISE NODAL EM REGIME PERMANENTE SENOIDAL

A partir do domínio do tempo:

$$CD \rightarrow j\omega C$$

$$G \rightarrow G$$

$$\frac{1}{L} D^{-1} \rightarrow \frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{\omega L}$$

A partir de Laplace:

$$s C \rightarrow j\omega C$$

$$G \rightarrow G$$

$$\frac{1}{s L} \rightarrow \frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{\omega L}$$

Relações Fasoriais $\hat{V}$ – $\hat{I}$

Resistor

$$\hat{V} = R\hat{I}$$

$$\hat{I} = G\hat{V}$$

Capacitor

$$\hat{V} = -j \frac{1}{\omega C} \hat{I}$$

$$\hat{I} = j\omega C \hat{V}$$

Indutor

$$\hat{V} = j\omega L \hat{I}$$

$$\hat{I} = -j \frac{1}{\omega L} \hat{V}$$

Impedância: $Z = \hat{V} / \hat{I}$
Admitância: $Y = \hat{I} / \hat{V}$

Resistor

$$Z = R$$

$$Y = G$$

Capacitor

$$Z = \frac{1}{j\omega C}$$

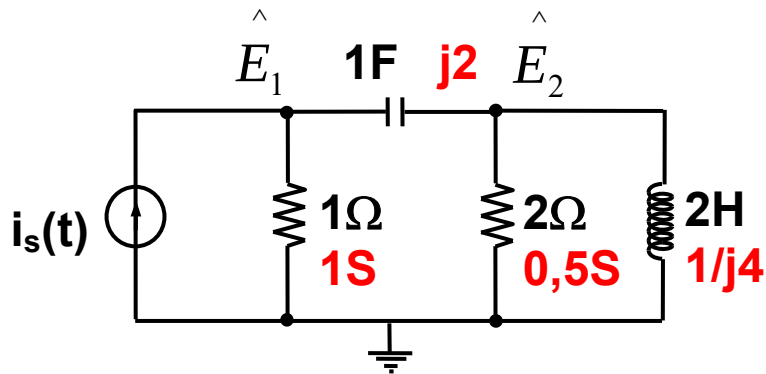
$$Y = j\omega C$$

Indutor

$$Z = j\omega L$$

$$Y = \frac{1}{j\omega L}$$

Exemplo de Análise Nodal em RPS



$$i_s(t) = 10 \cos(2t + 45^\circ)$$

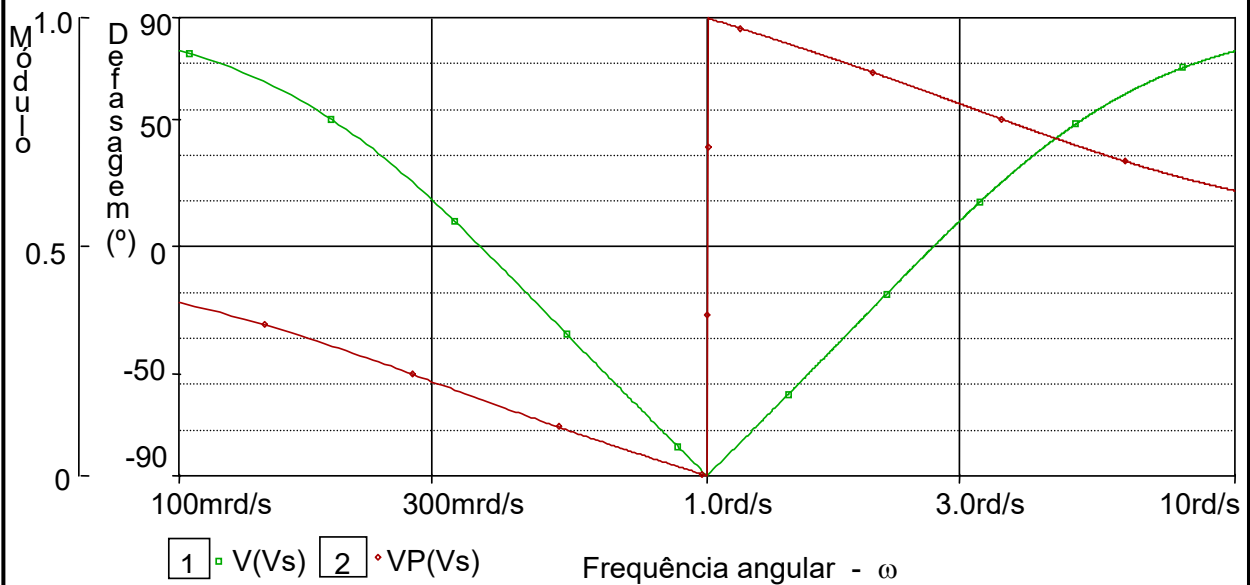
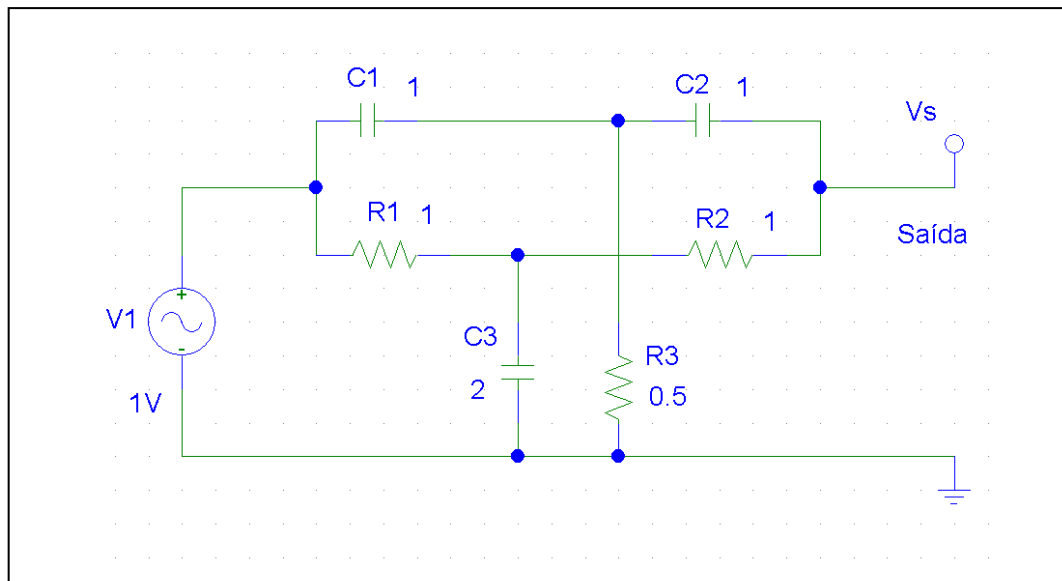
$$\hat{I}_s = 10 \angle 45^\circ$$

$$\begin{bmatrix} 1 + j2 & -j2 \\ -j2 & 0,5 + j2 - j0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I}_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{E}_1 = 6,22 \angle 49^\circ$$

$$\hat{E}_2 = 6,83 \angle 65^\circ$$

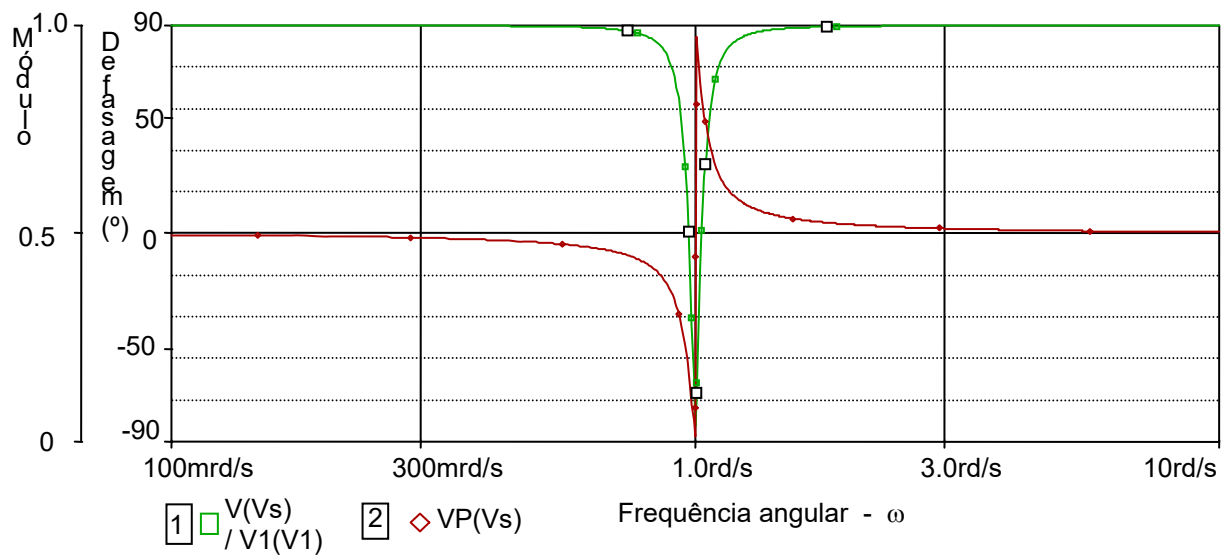
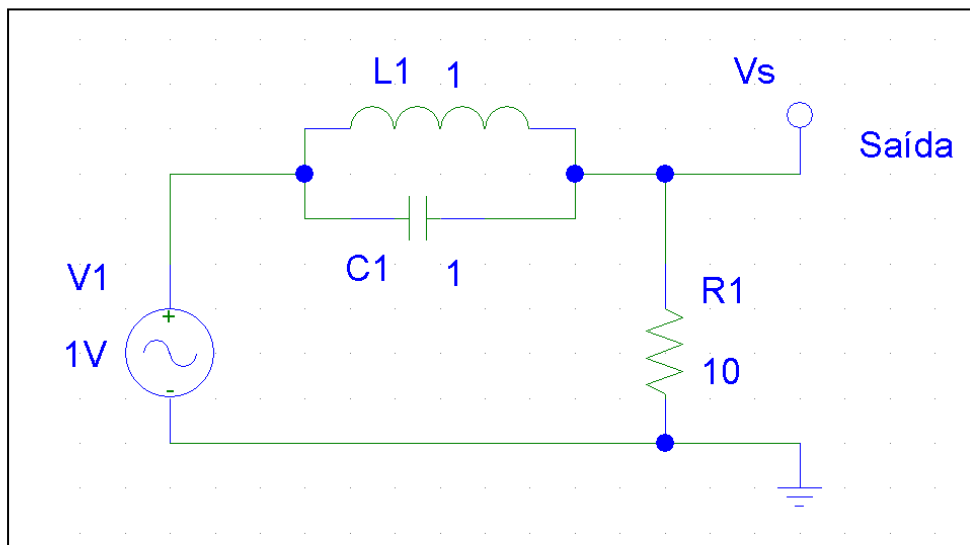
Filtro T-Paralelo



$$G(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 C^2 R^2}{1 - \omega^2 C^2 R^2 + j4\omega CR}$$

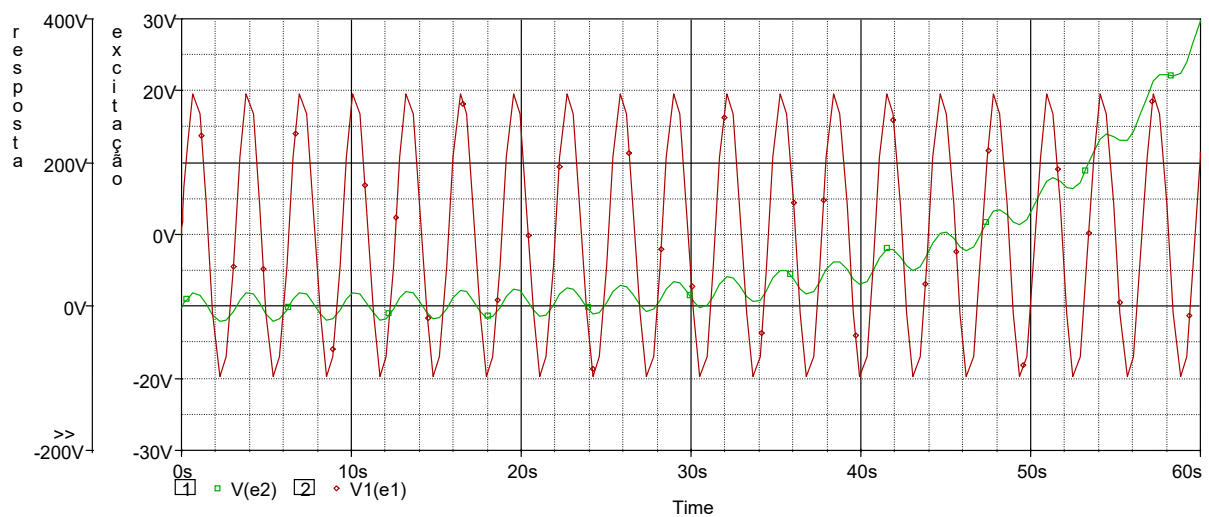
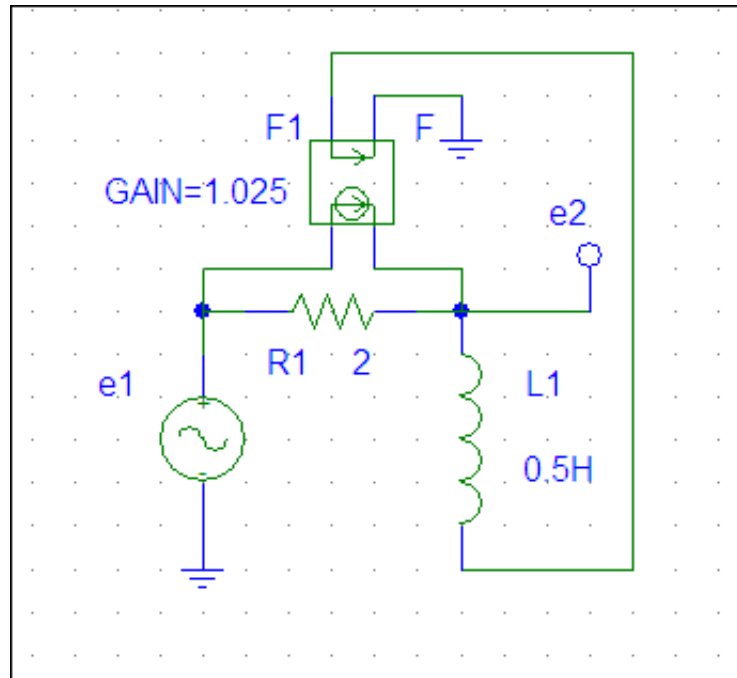
com $C = C_1 = C_2 = C_3/2$
 $R = R_1 = R_2 = 2R_3$

Filtro de Rejeição Simples



$$G(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 L C}{1 - \omega^2 L C + j\omega G L}$$

Exemplo de Resposta de Circuito Instável



Não existe o RPS !

V.H.N