



Escola Politécnica
Universidade de São Paulo

PSI3213

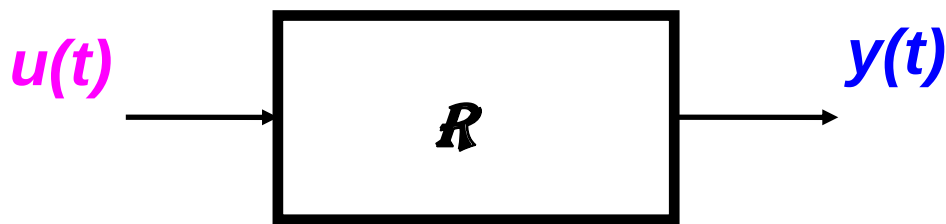
Circuitos Elétricos II

Bloco 3

Funções de rede e Regime Permanente Senoidal

Prof^a Denise Consonni

DESCRIÇÃO ENTRADA-SAÍDA DE UM CIRCUITO R , LINEAR E INVARIANTE NO TEMPO

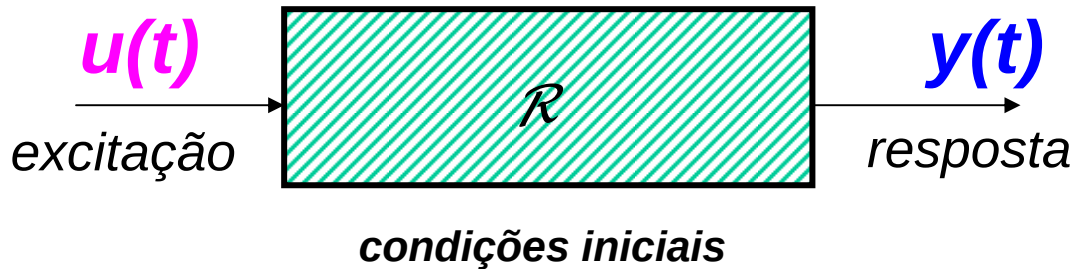


$u(t)$ = entrada ou excitação (**causa**)

$y(t)$ = saída ou resposta (**efeito**)

A descrição **entrada-saída** deste circuito
será uma *equação diferencial a*
coeficientes constantes, relacionando
 $u(t)$, $y(t)$ e suas derivadas

Respostas dos Circuitos



$$y(t) = \text{Livre} + \text{Forçada}$$

(entrada zero) (estado zero)

c.i.q.

$$y(t) = \text{Transitório} + \text{Permanente}$$

(tende a zero para $t \rightarrow \infty$)

$$y(t) = \text{resposta completa}$$

Resolução de Circuitos



Modelo matemático $\longrightarrow$
equação diferencial

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = u(t)$$

condições iniciais:

$$y(0_-) = \alpha_0$$

$$\dot{y}(0_-) = \alpha_1$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(0_-) = \alpha_{n-1}$$

Resolução $\longrightarrow$

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L} [y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t)] = \mathcal{L} [u(t)]$$

Teorema da Derivada:

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) \cdot Y(s) = U(s) + \alpha_0 s^{n-1} + (\alpha_1 + a_1 \alpha_0) s^{n-2} + \dots + \dots + (\alpha_{n-1} + a_1 \alpha_{n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha_0)$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{U(s)}{D(s)}}_{\text{resposta em estado zero}} + \underbrace{\frac{p_{ci}(s)}{D(s)}}_{\text{resposta em entrada zero}}$$

$\mathcal{L}$ [resposta em estado zero] $\mathcal{L}$ [resposta em entrada zero]

D(s) → polinômio característico (mônico!)

Teorema da Derivada

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = s \cdot F(s) - f(0_-)$$

$$\mathcal{L} [\ddot{f}(t)] = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0_-) - \dot{f}(0_-)$$

$$\mathcal{L} [f^{(n)}(t)] = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0_-) - s^{n-2} \cdot \dot{f}(0_-) - \dots - f^{(n-1)}(0_-)$$

Caso Particular: c.i.q.

$$\mathcal{L} [\dot{f}(t)] = s \cdot F(s)$$

$$\mathcal{L} [f^{(n)}(t)] = s^n \cdot F(s)$$

Função de Rede



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Big|_{\text{c.i.q.}}$$

ou

$$G(s) = \frac{Y_{sz}(s)}{U(s)}$$

P. V. I.

Equações diferenciais lineares a
coeficientes constantes
+ condições iniciais
(domínio do tempo)

$\mathcal{L}$

Equações algébricas na variável complexa
 s
(domínio das frequências complexas)

$\mathcal{L}^{-1}$

Solução do P.V.I.
(no domínio
do tempo)

c.i.n.

Funções de rede

LQO

$$G(s)$$

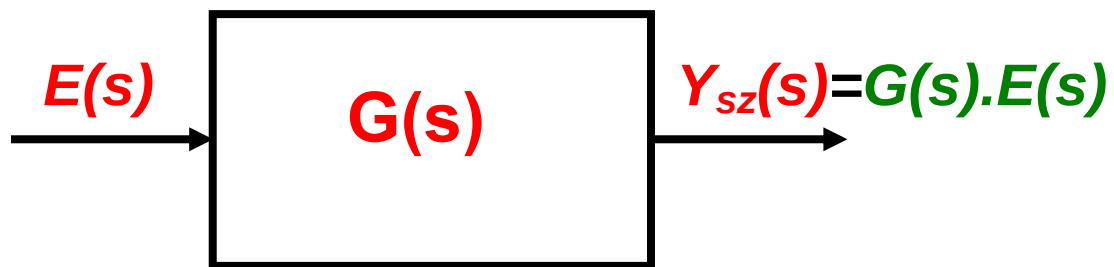
FUNÇÃO DE REDE

Ou

Função de Transferência

Ou

Função de Sistema

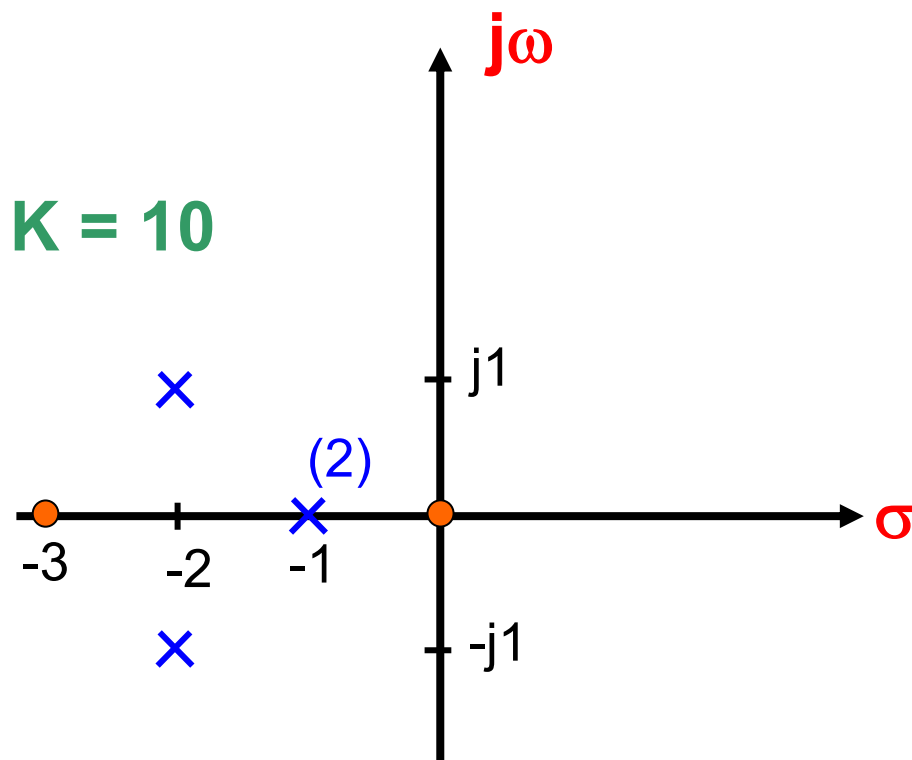


Resposta Forçada (Estado Zero) $\Rightarrow$ c.i.n.

$$y_{sz}(t) = \mathcal{L}^{-1} [Y_{sz}(s)]$$



FUNÇÃO DE REDE



$$F(s) = 10 \frac{s^2 + 3s}{s^4 + 6s^3 + 14s^2 + 14s + 5}$$

Representação gráfica no
Plano $s = \sigma + j\omega$

Resolução de Circuitos

Modelo matemático $\longrightarrow$

equação íntegro-diferencial

$$\dot{y}(t) + a_1 y(t) + a_2 \int_{-\infty}^t y(\lambda) d\lambda = u(t)$$

$$y(0_-) = \alpha_0$$

Teorema da Integral:

$$sY(s) - \alpha_0 + a_1 Y(s) +$$

$$+ a_2 \left[\frac{1}{s} Y(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0_-} y(\lambda) d\lambda \right] = U(s)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\alpha_{-1}}$$

Obtendo $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{sU(s)}{s^2 + a_1s + a_2} + \frac{s\alpha_0 - a_2\alpha_{-1}}{s^2 + a_1s + a_2}$$

$\mathcal{L}$ [resposta em
estado zero]

$\mathcal{L}$ [resposta em
entrada zero]

Polinômio característico:

$$D(s) = s^2 + a_1s + a_2$$

Função de Rede:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + a_1s + a_2}$$

Teorema da Integral

- Para integral de $-\infty$ a t :

$$\mathcal{L} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0_-} f(\tau) d\tau}{s}$$

- Para integral de 0_- a t :

$$\mathcal{L} \left[\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s}$$

Cálculo das Funções de Rede

*SÓ PARA REDES LINEARES
INVARIANTES NO TEMPO*

Aplicar a transformação de Laplace a uma descrição entrada-saída da rede, com condições iniciais nulas.

Tipos de descrição entrada-saída:

a- Equação diferencial linear, a coeficientes constantes

b- Equação íntegro-diferencial linear, a coeficientes constantes

c- Sistema de equações diferenciais lineares a coeficientes constantes

LQO

REPRESENTAÇÃO ENTRADA-SAÍDA

a1 - Por equação diferencial sem derivada no segundo membro:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} \dot{y}(t) + a_n y(t) = \\ = u(t) \\ \text{condições iniciais nulas!} \end{array} \right.$$



FUNÇÃO DE REDE:

$$G(s) = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA:

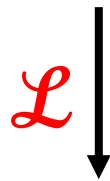
$$D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

POLOS DE $G(s)$ = ZEROS DE $D(s)$

REPRESENTAÇÃO ENTRADA-SAÍDA

a2 - Por equação diferencial com derivada no segundo membro:

$$\left\{ \begin{array}{l} y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} \dot{y}(t) + a_n y(t) = \\ = b_0 u^{(m)}(t) + b_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + b_{m-1} \dot{u}(t) + b_m u(t) \\ \text{condições iniciais nulas!} \end{array} \right.$$



FUNÇÃO DE REDE:

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA:

$$D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

POLOS DE $G(s)$ = ZEROS DE $D(s)$

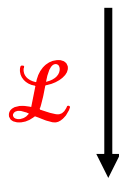
LQO

REPRESENTAÇÃO ENTRADA-SAÍDA

b - Por equação íntegro-diferencial:

$$\dot{y}(t) + a_1 y(t) + a_2 \int_{-\infty}^t y(\lambda) d\lambda = u(t)$$

condições iniciais nulas



FUNÇÃO DE REDE:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA:

$$D(s) = s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

REPRESENTAÇÃO ENTRADA-SAÍDA

c - Por sistema de equações diferenciais:

Exemplo de 2ª ordem:

$$\begin{cases} (a_{11}.D + b_{11})y_1 + (a_{12}.D + b_{12})y_2 = u_1 \\ (a_{21}.D + b_{21})y_1 + (a_{22}.D + b_{22})y_2 = u_2 \end{cases}$$

onde $D \equiv d/dt$ é o *operador de derivação*.

Agora há **4 Funções de Rede** :

$$\begin{array}{cc} Y_1(s) / U_1(s) & Y_1(s) / U_2(s) \\ Y_2(s) / U_1(s) & Y_2(s) / U_2(s) \end{array}$$

A *equação característica* é:

$$D(s) = \begin{vmatrix} a_{11}s + b_{11} & a_{12}s + b_{12} \\ a_{21}s + b_{21} & a_{22}s + b_{22} \end{vmatrix} = 0$$

LQO

Procedimento para a obtenção da Função de Rede

- 1- Escrever a equação do circuito
(relação entrada-saída entre $y(t)$ e $u(t)$)
 - *Equação diferencial ordinária*
 - *Equação íntegro-diferencial*
 - *Sistema de equações diferenciais*
- 2- Aplicar Laplace com condições iniciais nulas
- 3- Resolver com relação a $Y(s)$
- 4- Determinar a relação: $Y(s) / U(s)$

TEOREMA DO VALOR INICIAL

Se $F(s) = \mathcal{L} [f (t)]$, vale

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [s F(s)] = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = f(0_+)$$

TEOREMA DO VALOR FINAL

Se $F(s) = \mathcal{L} [f (t)]$, vale

$$\lim_{s \rightarrow 0} [s F(s)] = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

Nota:

Os dois teoremas são *fracos!*
Só valem se existirem os limites indicados!

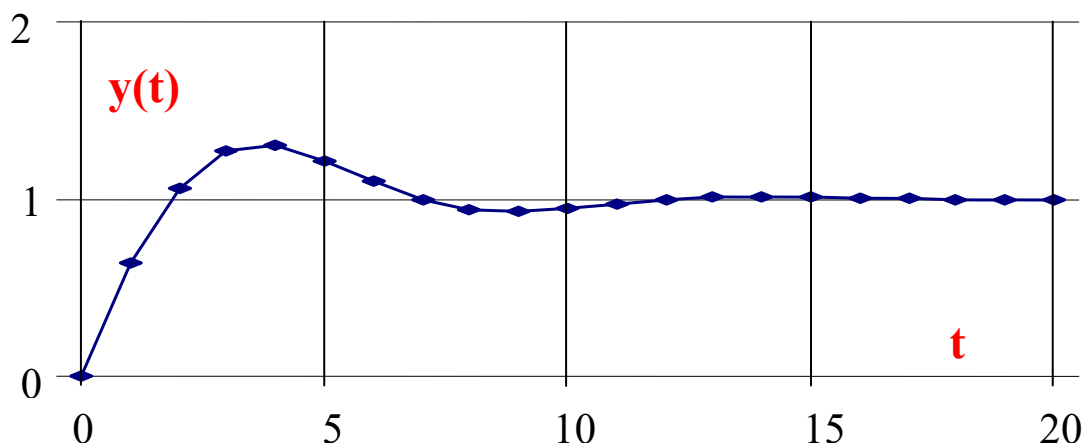
LQO

Exemplo dos Teoremas dos valores inicial e final

$t := 0, 0.05, 20$

$$Y(s) := \frac{s^2 + 3s + 2}{s^4 + 5s^3 + 3s^2 + 2s}$$

$$y(t) := 1 - 0,11 \cdot \exp(-4,4 \cdot t) - 0,89 \cdot \exp(-0,29 \cdot t) \cdot \cos(0,61 \cdot t) + 0,44 \cdot \exp(-0,29 \cdot t) \cdot \sin(0,61 \cdot t)$$

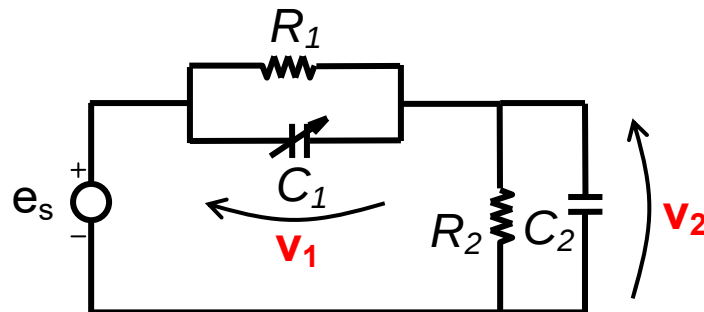


$$y(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) = 0$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s) = 1$$

LQO

Exemplo de Circuito Redutível



$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_1}{dt} + G_1 v_1 - C_2 \frac{dv_2}{dt} - G_2 v_2 = 0 & (1^a \text{ L.K.}) \\ v_1 + v_2 = e_s & (2^a \text{ L.K.}) \end{cases}$$

Em Laplace:

$$\begin{bmatrix} s C_1 + G_1 & -(s C_2 + G_2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 v_{10} - C_2 v_{20} \\ E_s(s) \end{bmatrix}$$

$D(s) \rightarrow$ polinômio característico

$D(s) = 0 \rightarrow$ equação característica

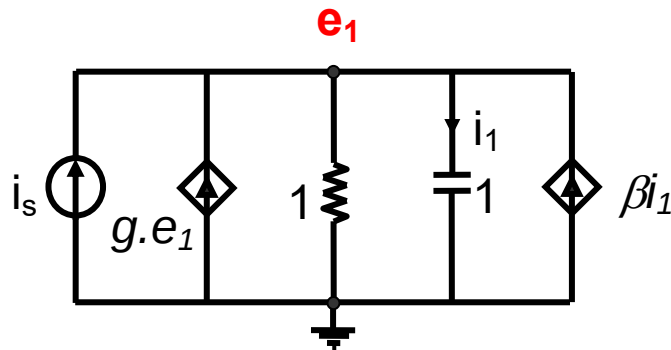
$$D(s) = s (C_1 + C_2) + G_1 + G_2$$

2 elementos armazenadores de energia

1 só polo :

$$s_1 = -\frac{(G_1 + G_2)}{(C_1 + C_2)}$$

Exemplo de Circuito Degenerado



1ª. L. K. :

$$-g.e_1 + e_1 + \frac{de_1}{dt} - \beta \frac{de_1}{dt} = i_s$$

$$\left[(1 - \beta) \frac{de_1}{dt} + (1 - g) e_1 \right] = i_s$$

Em Laplace:

$$[(1 - \beta) s + (1 - g)] E_1(s) = I_s(s) + (1 - \beta). e_1(0_-)$$



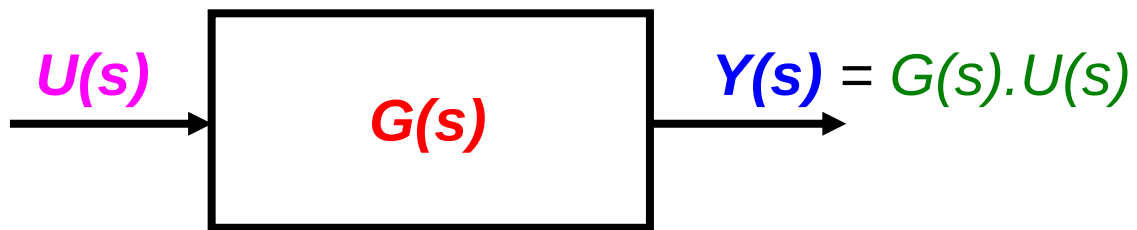
$$E_1(s) = \frac{I_s(s)}{[(1 - \beta) s + (1 - g)]} + \frac{(1 - \beta). e_1(0_-)}{[(1 - \beta) s + (1 - g)]}$$

$$D(s) = (1 - \beta) s + (1 - g)$$

Para $\beta = 1$ e $g = 1 \Rightarrow D(s) = 0$

Se $I_s(s) = 0 \Rightarrow \infty$ soluções

FUNÇÃO DE REDE E REGIME PERMANENTE SENOIDAL



FUNÇÃO DE REDE : $G(s) = Y(s) / U(s) \mid_{\text{c.i.n.}}$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [G(s) . U(s)]$$

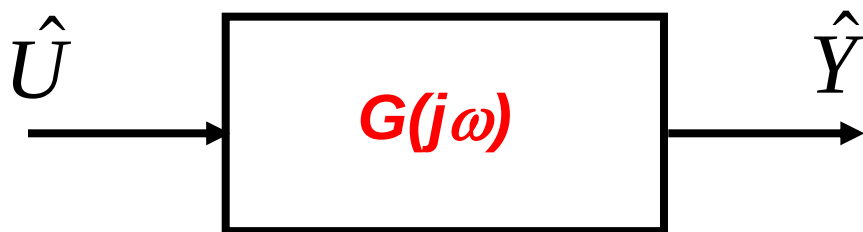


**resposta forçada (transitório +
permanente)**

FUNÇÃO DE REDE E REGIME PERMANENTE SENOIDAL

TEOREMÃO

RPS $s \rightarrow j\omega$



$$G(j\omega) = \frac{\hat{Y}}{\hat{U}}$$

$$\hat{Y} = G(j\omega) \cdot \hat{U}$$

$$y(t) = \text{Re}[\hat{Y} \cdot e^{j\omega t}]$$

resposta permanente

Cálculo da Resposta em **Regime** **P**ermanente **S**enoidal

- Excitação senoidal com frequência ω
- Todos os transitórios decaem a zero
- Na expressão $G(s) = Y(s) / U(s)$ substituir:

$$U(s) \text{ por } \hat{U}$$

$$Y(s) \text{ por } \hat{Y}$$

$$G(s) \text{ por } G(j\omega)$$

$\hat{Y}$ será o **fasor** da resposta em
R.P.S. do circuito

Função de Rede em Regime Permanente Senoidal

$$G(j\omega) = \frac{\hat{Y}}{\hat{U}}$$

Função complexa

Pode ser representada por duas curvas:

1- Curva de **Resposta em frequência**

$$M(\omega) = |G(j\omega)| \times \omega$$

2- Curva de **Defasagem**

$$\phi(\omega) = \arg[G(j\omega)] \times \omega$$

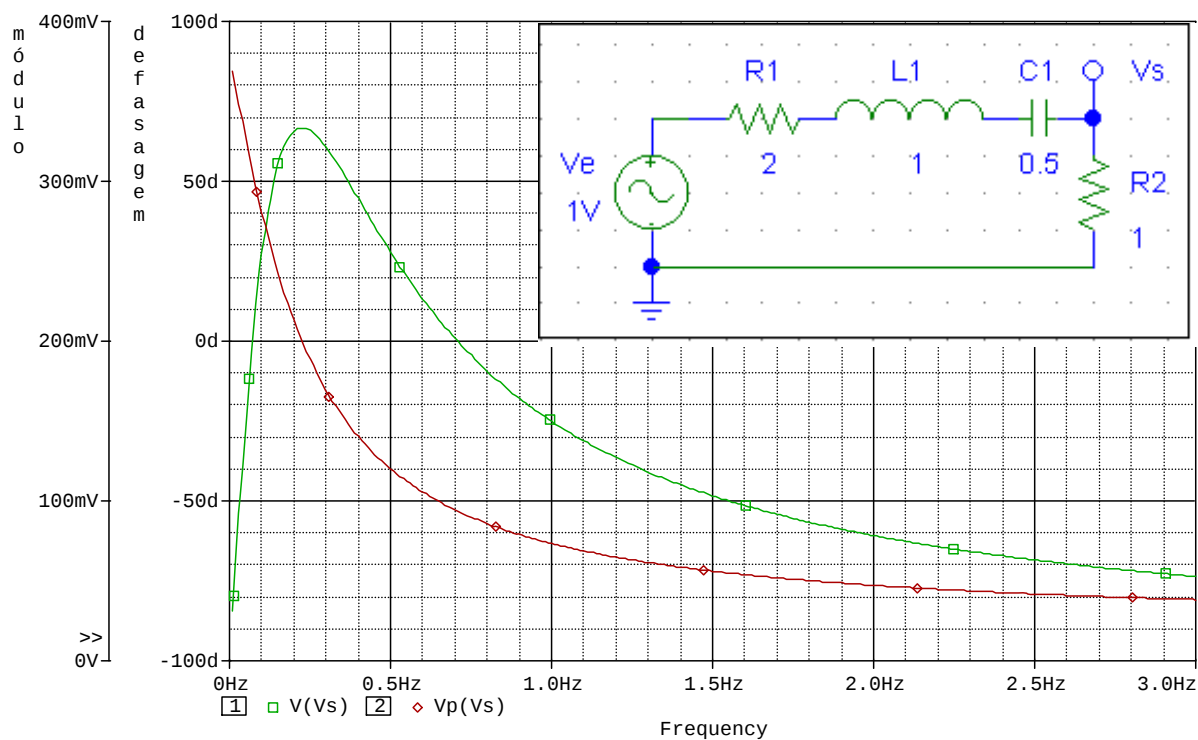
$$G(j\omega) = M(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$$

Função de Rede em Regime Permanente Senoidal

Exemplo – Circuito de 2ª ordem

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}$$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{2 - \omega^2 + 3j\omega}$$



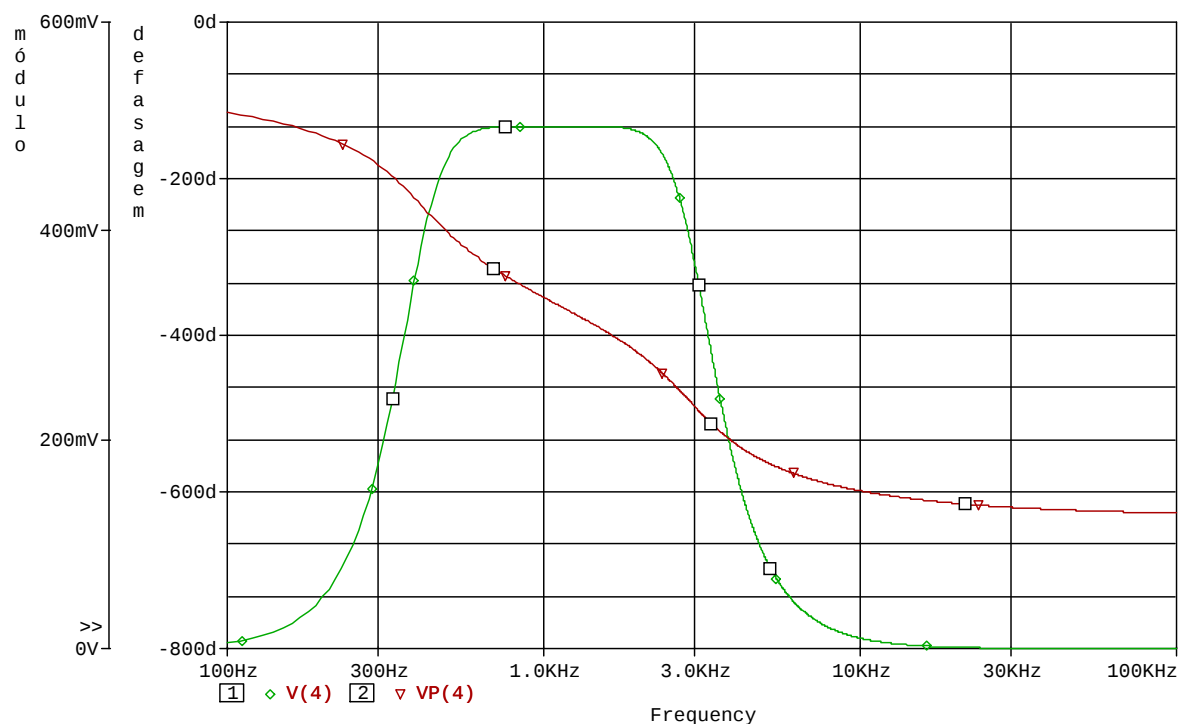
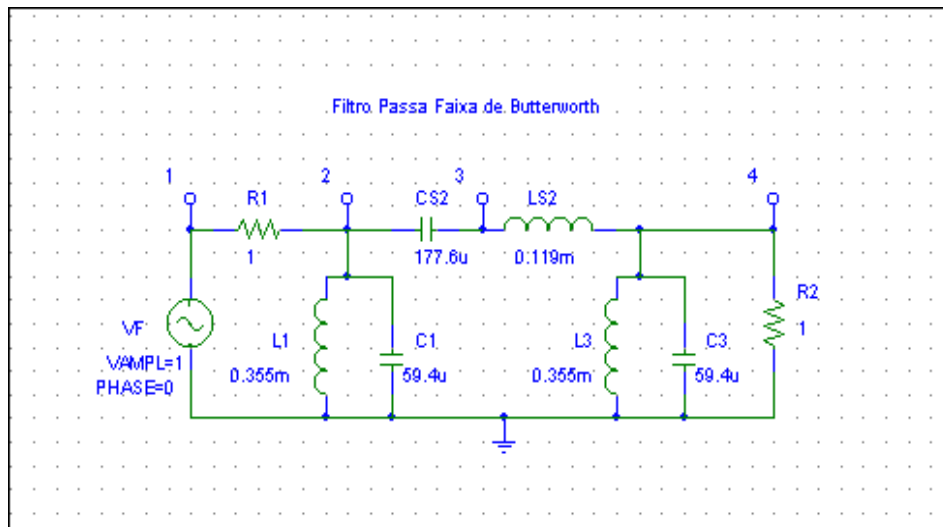
$M(\omega)$

e

$\phi(\omega)$

Função de Rede em Regime Permanente Senoidal

Exemplo - Filtro Passa-Faixa



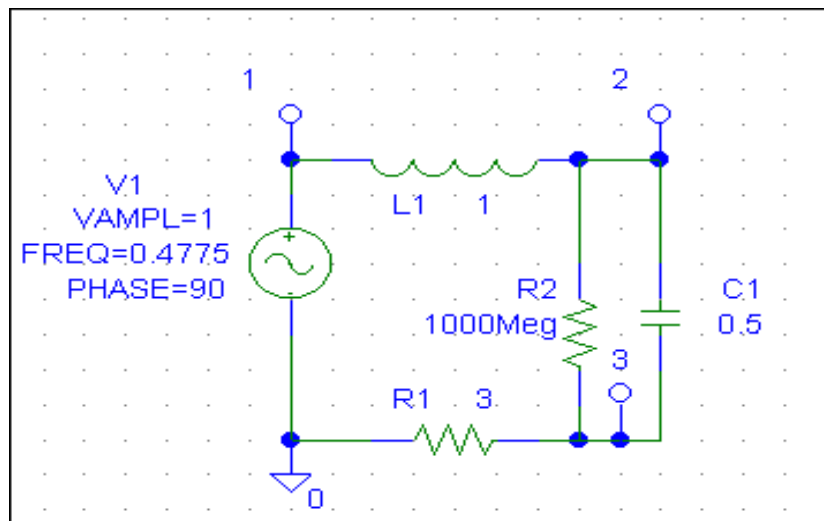
$M(\omega)$

e

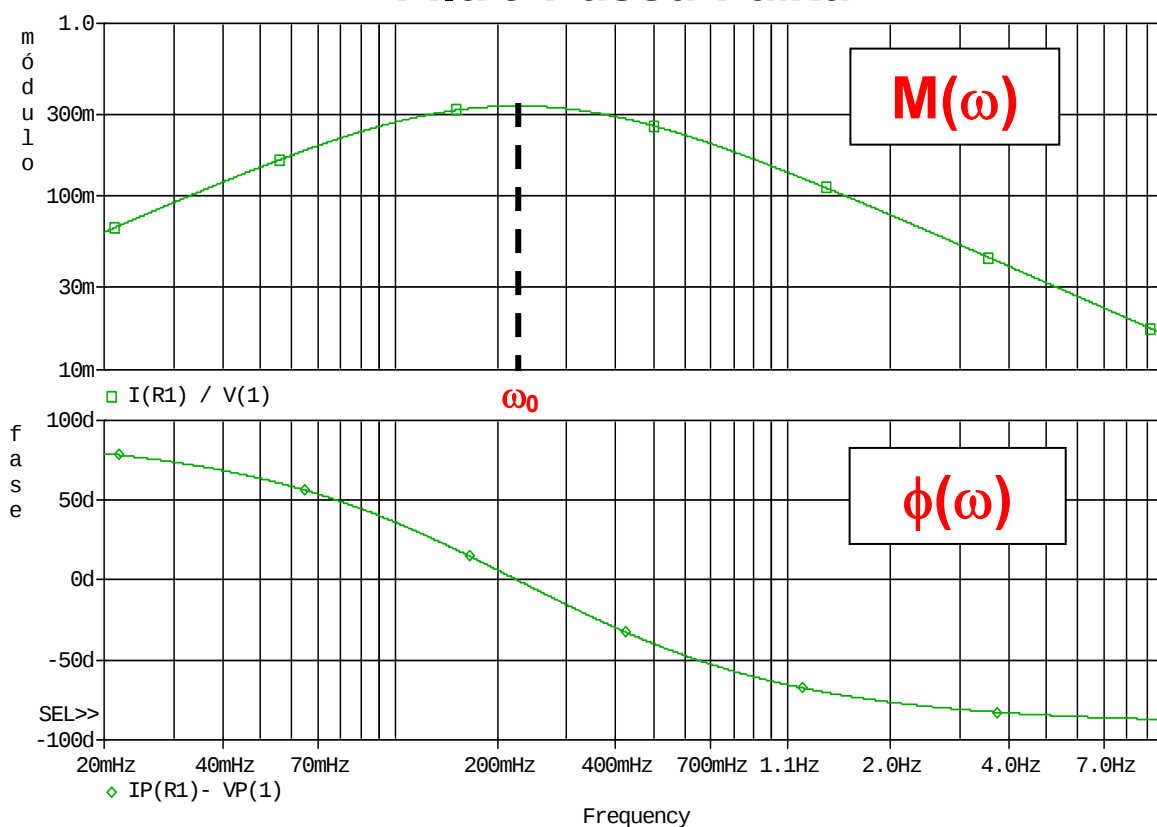
$\phi(\omega)$

Função de Rede e RPS

Resposta em Frequência



Filtro Passa-Faixa



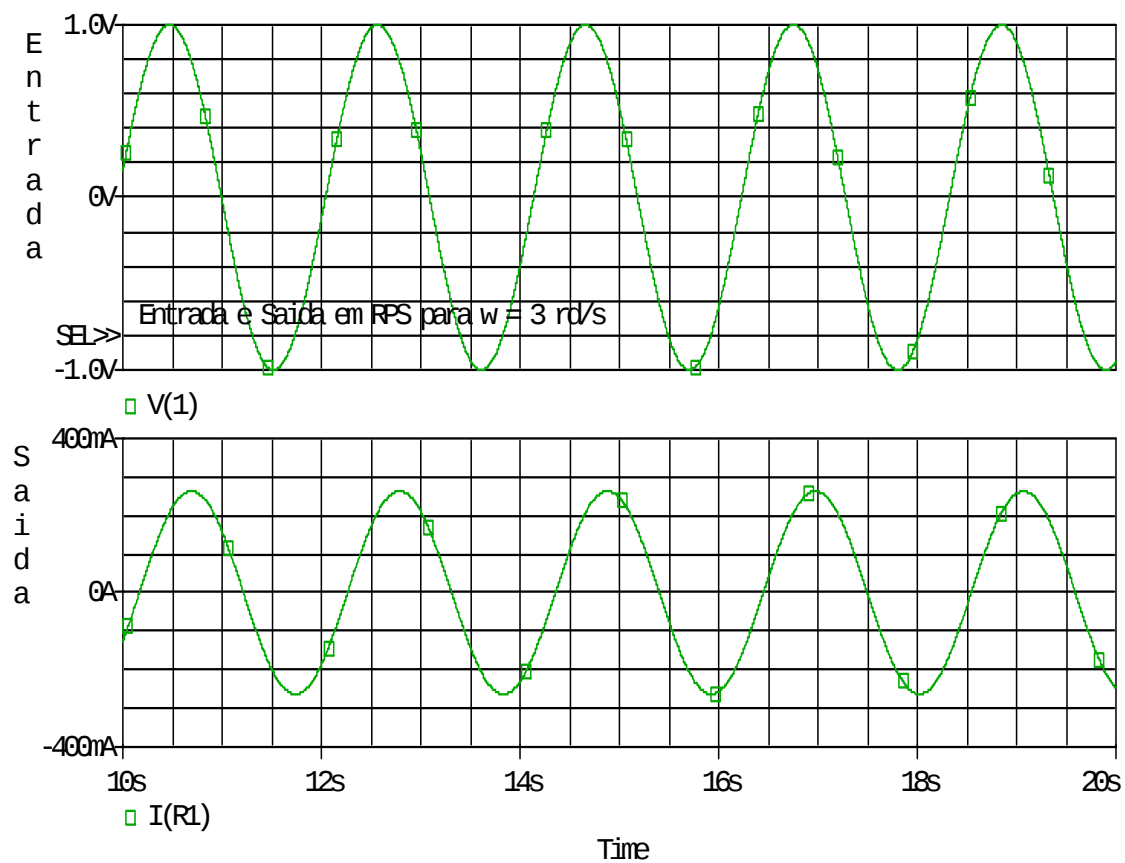
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1,41 \text{ rad / s}$$

V.H.N.

Função de Rede e RPS

Entrada e Saída para :

$$e_s(t) = \cos(3t)$$

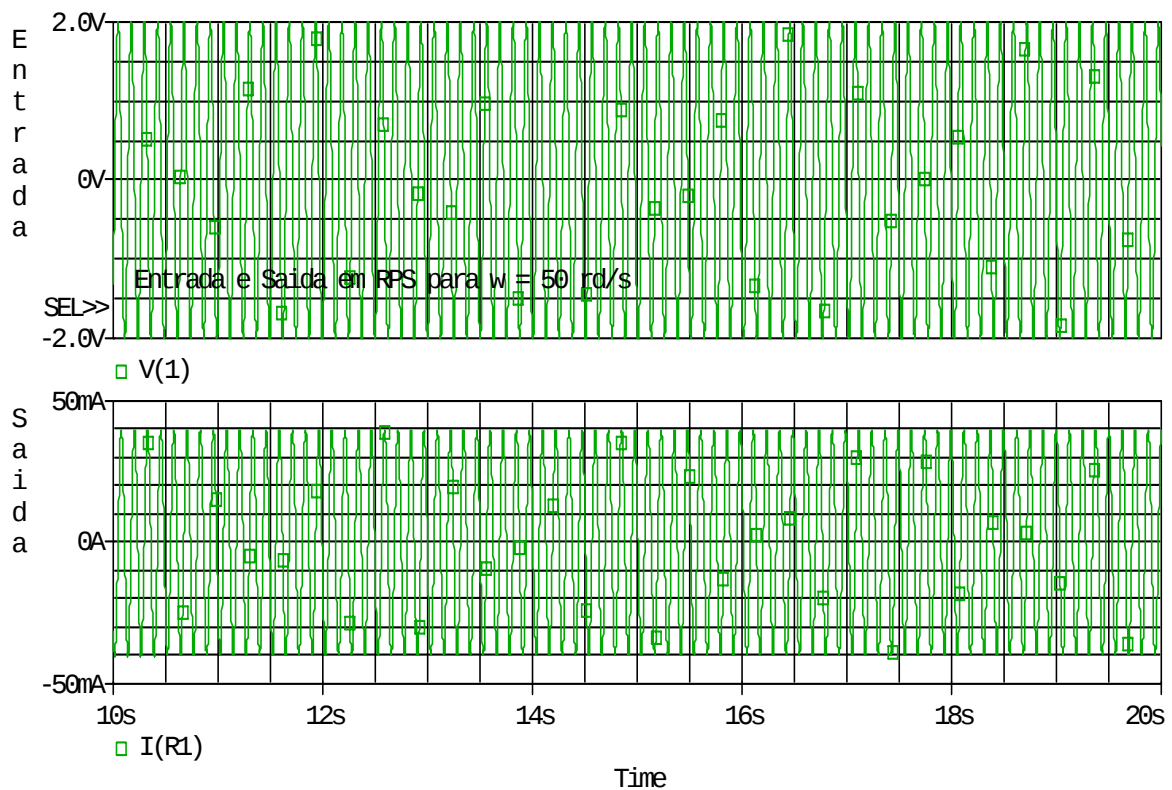


V.H.N.

Função de Rede e RPS

Entrada e Saída para :

$$e_s(t) = 2\cos(50 t + 20^\circ)$$

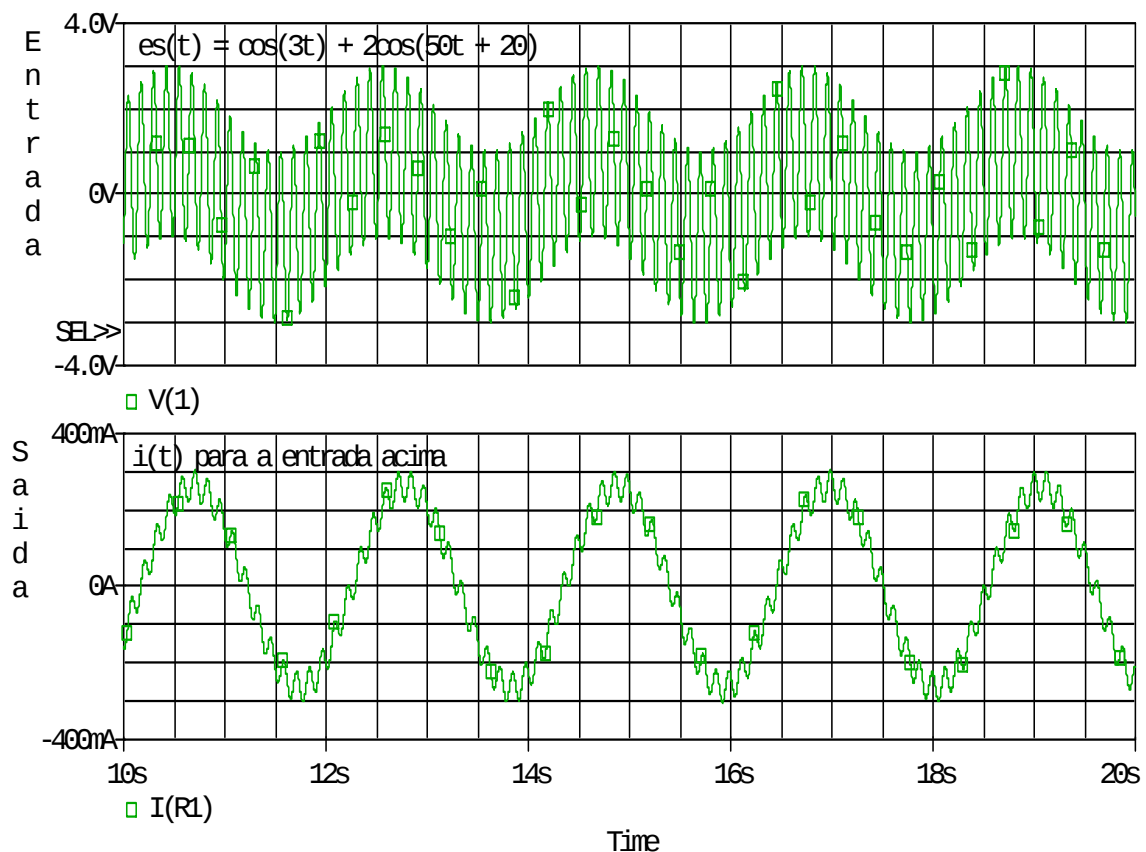


V.H.N.

Função de Rede e RPS

Entrada e Saída para :

$$e_s(t) = \cos(3t) + 2\cos(50t + 20^\circ)$$



V.H.N.