FAQ sobre fasores

Clovis Goldemberg
(com a colaboração da Prof. Denise Consonni)
V0.8-Março/2007

1. **Por que usar fasores?**

   A notação fasorial simplifica a resolução de problemas envolvendo funções senoidais no tempo.

2. **O que é um fasor?**

   Um fasor é um número complexo que representa a magnitude e a fase de uma senoide.

3. **Quem inventou fasores?**

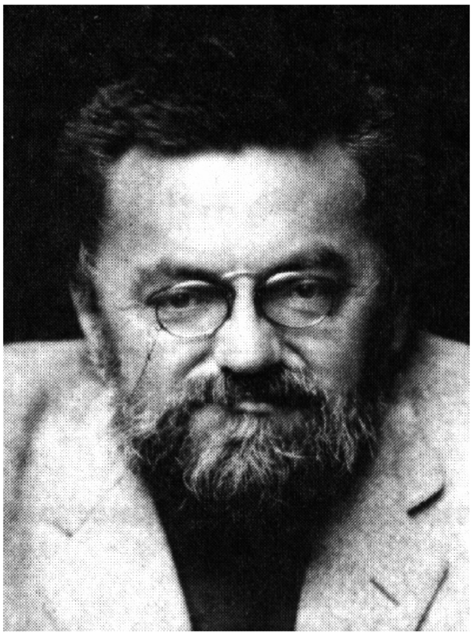

Fig. 1.1 Charles Proteus Steinmetz.

   O uso de números complexos para resolver problemas em circuitos de corrente alternada foi apresentado pela primeira vez por Charles Proteus Steinmetz em um artigo de 1893. Ele nasceu em Breslau, na Alemanha, filho de um ferroviário. Tornou-se um gênio da ciência apesar de ser um deficiente físico de nascença e ter perdido a mãe com apenas 1 ano de idade. Assim como seus trabalhos sobre as leis da histerese atraíram a atenção da comunidade científica, suas atividades políticas na Universidade de Breslau atraíram a polícia política. Foi forçado a fugir da Alemanha sem conseguir concluir seu trabalho de doutorado. Trabalhou em inúmeras pesquisas nos Estados Unidos, principalmente na General Electric Company. A GE havia sido fundada por Thomas Edison, que a dirigiu entre 1876 a 1892. O período de 1892 a 1923 ficou conhecido como sendo a Era Steinmetz, por razões óbvias. Seu "paper" sobre números complexos revolucionou a análise de circuitos AC apesar de terem dito (naquela época) que ninguém, exceto Steinmetz, entendia o método.

4. **Como se escreve um fasor?**

   Esta pergunta deve ser decomposta em várias etapas...

   a. Escreva $y(t)$ no domínio do tempo como sendo uma função cossenoidal com uma fase determinada. Por exemplo:

$$y(t) = Y_M \cos(\omega t + \varphi) \tag{1.1}$$

   Onde: Y_M é a amplitude da onda cossenoidal (sempre ≥ 0)
   φ é a fase da onda cossenoidal [rd]
   ω é a frequência angular da onda cossenoidal [rd/s]

   b. A fórmula de Euler estabelece que:

$$e^{j\beta} = \cos(\beta) + j\sin(\beta) \tag{1.2}$$

   e consequentemente temos:

$$\cos(\beta) = Re\left[e^{j\beta}\right] \quad \textbf{(1.3)}$$

c. Aplicando a Eq. (1.3) em (1.1) resulta:

$$y(t) = Y_M \cos(\omega t + \varphi) = Re\left[Y_M e^{j(\omega t + \varphi)}\right] = Re\left[Y_M e^{j\omega t} e^{j\varphi}\right] \quad \textbf{(1.4)}$$

d. O fasor $\hat{Y}$ é dado por:

$$\hat{Y} = Y_M e^{j\varphi} = Y_M \angle\varphi \quad \textbf{(1.5)}$$

e. **Fasores não giram!** Isto porque o termo $e^{j\omega t}$ da Eq. 1.4 é considerado à parte.

f. A representação do fasor $\hat{Y}$ adotada na Eq. (1.5) é denominada polar. Entretanto seria perfeitamente aceitável uma representação usando números complexos:

$$\hat{Y} = Y_M(\cos\varphi + j\sin\varphi) \quad \textbf{(1.6)}$$

5. Representação gráfica de um fasor

A representação gráfica do fasor $\hat{Y}$ indicado na Eq. (1.5) está dada na Fig. 1.2

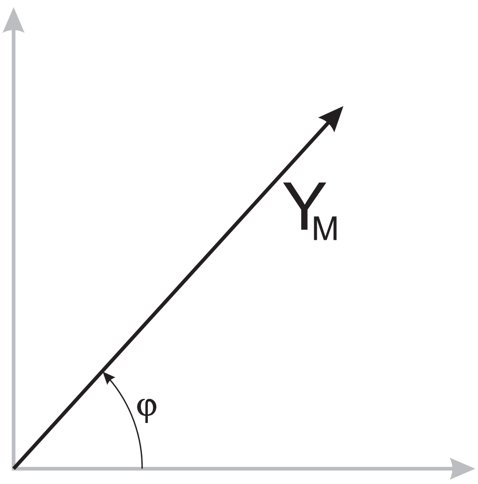

Fig. 1.2 Representação gráfica do fasor $\hat{Y}$.

6. Qual a fase de um fasor?

Não existe uma única resposta a esta pergunta. Como o tempo é relativo (mais que isto, “tudo é relativo...” e o “big-bang” ocorreu há muito tempo atrás...) é necessário arbitrar um instante inicial para definir a fase do fasor $\hat{Y}$. Esta origem dos tempos deve ser a mesma para todos os fasores de um mesmo problema. Como regra prática adota-se um dos fasores como referência. Ou seja, este fasor específico tem fase nula. Os outros fasores podem estar “adiantados”, “atrasados” ou “em fase” em relação à referência de fase estabelecida.

7. Um exemplo de fasor?

Considere uma corrente:

$$i(t) = 5\sin(100t + 2\pi/3) \quad \textbf{(1.7)}$$

Reescreva esta mesma corrente como sendo uma função cossenoidal.

$$i(t) = 5\cos(100t + \pi/6) \quad \textbf{(1.8)}$$

Reescreva como sendo a parte real de um número complexo:

$$i(t) = Re\left[5\, e^{j(100t + \pi/6)}\right] = 5\, Re\left[e^{j(100t + \pi/6)}\right] \tag{1.9}$$

Para simplificar a notação podemos deixar de escrever a funcao $Re[\ \ldots\ ]$:

$$i(t) = 5\, e^{j(100t + \pi/6)} = 5\, e^{j100t}\, e^{j\pi/6} \tag{1.10}$$

Ignore o termo e^{j100t}:

$$\hat{I} = 5\, e^{j\pi/6} \tag{1.11}$$

E finalmente:

$$\hat{I} = 5\ \angle \pi/6 \tag{1.12}$$

Ou seja, o fasor $\hat{I}$ possui amplitude (ou magnitude, ou módulo) 5 e fase $\pi/6$.

8. Como transformar de uma notação fasorial para uma função temporal?

Considere um fasor:

$$\hat{Y} = Y_M\, e^{j\varphi} \tag{1.13}$$

Recoloque o termo $e^{j\omega t}$. Nesta etapa existe uma informação absolutamente necessária: quanto vale ω? Se não soubermos a frequência angular ω o problema não tem solução.

$$y(t) = Re\left[\, Y_M\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi}\, \right] \tag{1.14}$$

Agrupando-se os expoentes temos:

$$y(t) = Re\left[\, Y_M\, e^{j(\omega t + \varphi)}\right] \tag{1.15}$$

E finalmente:

$$y(t) = Y_M \cos(\omega t + \varphi) \tag{1.16}$$

9. Por que usar fasores?

A notação fasorial simplifica a resolução de problemas envolvendo funções senoidais no tempo (isto já havia sido falado na pergunta #1). Ao utilizar notação fasorial torna-se possível transformar as equações diferenciais que representam um circuito elétrico em equações algébricas. Resolver equações algébricas é muito mais simples do que resolver equações diferenciais. A seguir iremos considerar os elementos passivos do tipo resistor, indutor e capacitor.

10. Resistores

A equação básica no domínio do tempo é dada pela Lei de Ohm:

$$v(t) = R\, i(t) \tag{1.17}$$

Considere que a tensão $v(t)$ é dada por:

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi) \tag{1.18}$$

que pode ser reescrito como:

$$v(t) = Re\left[\, V_M\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi}\, \right] \tag{1.19}$$

A corrente também será dada por uma função cossenoidal que possui uma fase β. Portanto:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \beta) \tag{1.20}$$

e também:

$$i(t) = Re\left[I_M e^{j\omega t} e^{j\beta}\right] \quad \textbf{(1.21)}$$

Agrupando as Eqs. (1.17), (1.19) e (1.21) teremos:

$$Re\left[V_M e^{j\omega t} e^{j\varphi}\right] = R \; Re\left[I_M e^{j\omega t} e^{j\beta}\right] \quad \textbf{(1.22)}$$

que pode ser simplificada eliminando-se a função “real” dos dois lados:

$$V_M e^{j\omega t} e^{j\varphi} = R \; I_M e^{j\omega t} e^{j\beta} \quad \textbf{(1.23)}$$

Os dois lados podem ser divididos por $e^{j\omega t}$ resultando:

$$V_M e^{j\varphi} = R \; I_M e^{j\beta} \quad \textbf{(1.24)}$$

Em termos fasoriais temos:

$$\hat{V} = R\,\hat{I} \quad \textbf{(1.25)}$$

onde: $\hat{V} = V_M \angle \varphi$
$\hat{I} = I_M \angle \beta$

No caso de resistores as fases φ e β são iguais bastando comparar as Eqs. (1.19) e (1.20). Ou seja, a tensão $v(t)$ está em fase com a corrente $i(t)$. Observe a Fig. 1.3 abaixo e o diagrama fasorial correspondente na Fig. 1.4.

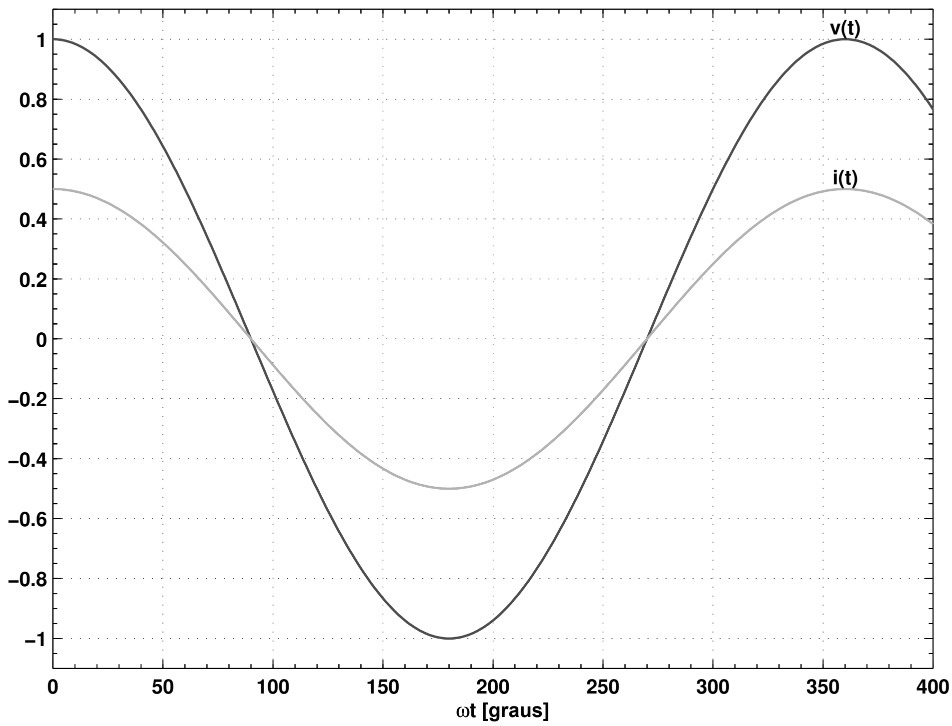

Fig. 1.3 Relação temporal entre corrente e tensão em resistor ideal.

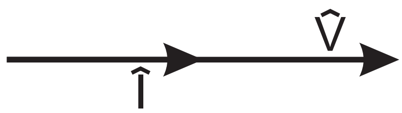

Fig. 1.4 Diagrama fasorial para um elemento resistivo.

11. Indutores

A equação diferencial básica para um indutor ideal é:

$$v(t) = L\,\frac{d[i(t)]}{dt} \qquad \textbf{(1.26)}$$

Considere que a tensão $v(t)$ é dada por:

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi) \qquad \textbf{(1.27)}$$

que pode ser reescrito como:

$$v(t) = Re\left[V_M\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi}\right] \qquad \textbf{(1.28)}$$

A corrente também será dada por uma função cossenoidal que possui uma fase β. Portanto:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \beta) \qquad \textbf{(1.29)}$$

e também:

$$i(t) = Re\left[I_M\, e^{j\omega t}\, e^{j\beta}\right] \qquad \textbf{(1.30)}$$

Agrupando as Eqs. (1.26), (1.28) e (1.30) teremos:

$$Re\left[V_M\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi}\right] = L\,\frac{d\,Re\left[I_M\, e^{j\omega t}\, e^{j\beta}\right]}{dt} = j\omega L\; Re\left[I_M\, e^{j\omega t}\, e^{j\beta}\right] \qquad \textbf{(1.31)}$$

que pode ser simplificada eliminando-se a função "real" dos dois lados:

$$V_M\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi} = j\omega L\; I_M\, e^{j\omega t}\, e^{j\beta} \qquad \textbf{(1.32)}$$

Os dois lados podem ser divididos por $e^{j\omega t}$ resultando:

$$V_M\, e^{j\varphi} = j\omega L\; I_M\, e^{j\beta} \qquad \textbf{(1.33)}$$

Em termos fasoriais temos:

$$\hat{V} = j\omega L\,\hat{I} \qquad \textbf{(1.34)}$$

onde: $\hat{V} = V_M \angle\, \varphi$
$\hat{I} = I_M \angle\, \beta$

A partir da Eq. 1.33 podemos escrever:

$$V_M\, e^{j\varphi} = j\omega L\; I_M\, e^{j\beta} = \omega L\, I_M\, e^{j90^\circ}\, e^{j\beta} = \omega L\, I_M\, e^{j(\beta + 90^\circ)} \qquad \textbf{(1.35)}$$

e portanto:

$$V_M\, e^{j\varphi} = \omega L\, I_M\, e^{j(\beta + 90^\circ)} \qquad \textbf{(1.36)}$$

Conclui-se da Eq. 1.36 que:

$$\varphi = \beta + 90^\circ \qquad \textbf{(1.37)}$$

Neste caso as fases da tensão e corrente são diferentes! A tensão está adiantada de 90° em relação à corrente. Observe a Fig. 1.5 abaixo e o diagrama fasorial correspondente na Fig. 1.6.

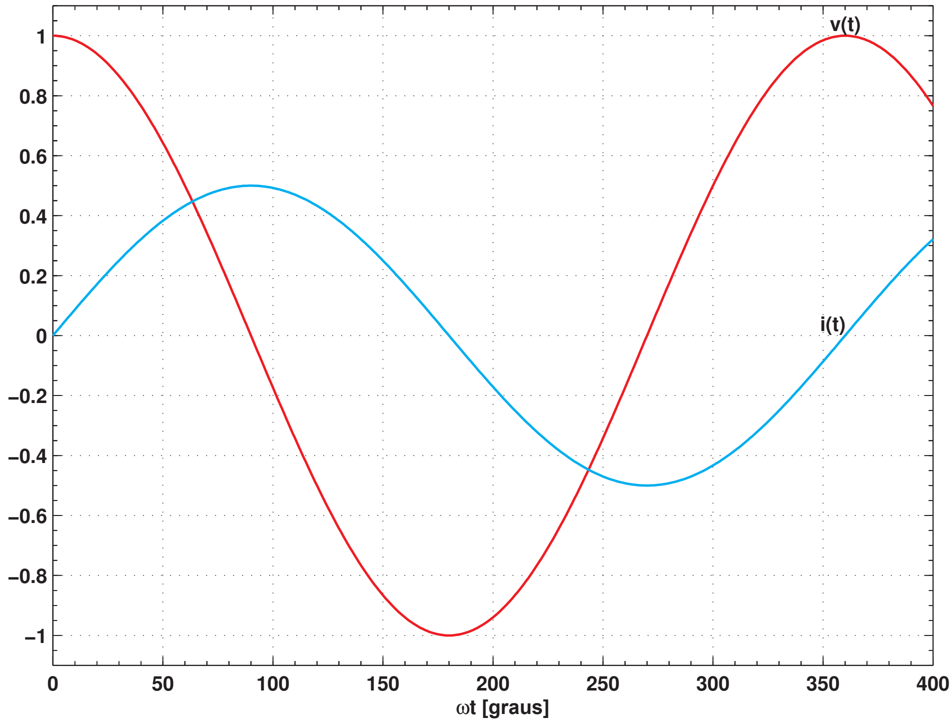

Fig. 1.5 Relação temporal entre corrente e tensão em indutor ideal.

Fig. 1.6 Diagrama fasorial para um elemento indutivo.

12. Capacitores

A equação diferencial básica para um capacitor ideal é:

$$i(t) = C\frac{d[v(t)]}{dt} \tag{1.38}$$

Considere que a tensão $v(t)$ é dada por:

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi) \tag{1.39}$$

que pode ser reescrito como:

$$v(t) = Re\left[V_M e^{j\omega t} e^{j\varphi}\right] \tag{1.40}$$

A corrente também será dada por uma função cossenoidal que possui uma fase β. Portanto:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \beta) \tag{1.41}$$

e também:

$$i(t) = Re\left[I_M e^{j\omega t} e^{j\beta}\right] \tag{1.42}$$

Agrupando as Eqs. (1.38), (1.40) e (1.42) teremos:

$$Re\left[I_M\, e^{j\omega t}\, e^{j\beta}\right] = C\ \frac{d\,Re\left[V_M\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi}\right]}{dt} = j\omega C\ Re\left[V_M\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi}\right] \qquad \textbf{(1.43)}$$

que pode ser simplificada eliminando-se a função "real" dos dois lados:

$$I_M\, e^{j\omega t}\, e^{j\beta} = j\omega C\ V_M\, e^{j\omega t}\, e^{j\varphi} \qquad \textbf{(1.44)}$$

Os dois lados podem ser divididos por $e^{j\omega t}$ resultando:

$$I_M\, e^{j\beta} = j\omega C\ V_M\, e^{j\varphi} \qquad \textbf{(1.45)}$$

Em termos fasoriais temos:

$$\hat{I} = j\omega C\, \hat{V} \qquad \textbf{(1.46)}$$

e também:

$$\hat{V} = \frac{1}{j\omega C}\ \hat{I} \qquad \textbf{(1.47)}$$

onde: $\hat{V} = V_M \angle\ \varphi$
$\hat{I} = I_M \angle\ \beta$

A partir da Eq. 1.46 podemos escrever:

$$I_M\, e^{j\beta} = j\omega C\ V_M\, e^{j\varphi} = \omega C\, V_M\, e^{j90^\circ}\, e^{j\varphi} = \omega C\, V_M\, e^{j(\varphi + 90^\circ)} \qquad \textbf{(1.48)}$$

e portanto:

$$I_M\, e^{j\beta} = \omega C\, V_M\, e^{j(\varphi + 90^\circ)} \qquad \textbf{(1.49)}$$

e finalmente:

$$V_M\, e^{j(\varphi + 90^\circ)} = \frac{1}{\omega C}\ I_M\, e^{j\beta} \qquad \textbf{(1.50)}$$

Conclui-se da Eq. 1.50 que:

$$\varphi + 90^\circ = \beta \qquad \textbf{(1.51)}$$

Neste caso as fases da tensão e corrente são diferentes! A tensão está atrasada de 90° em relação à corrente. Observe a Fig. 1.7 abaixo e o diagrama fasorial correspondente na Fig. 1.8.

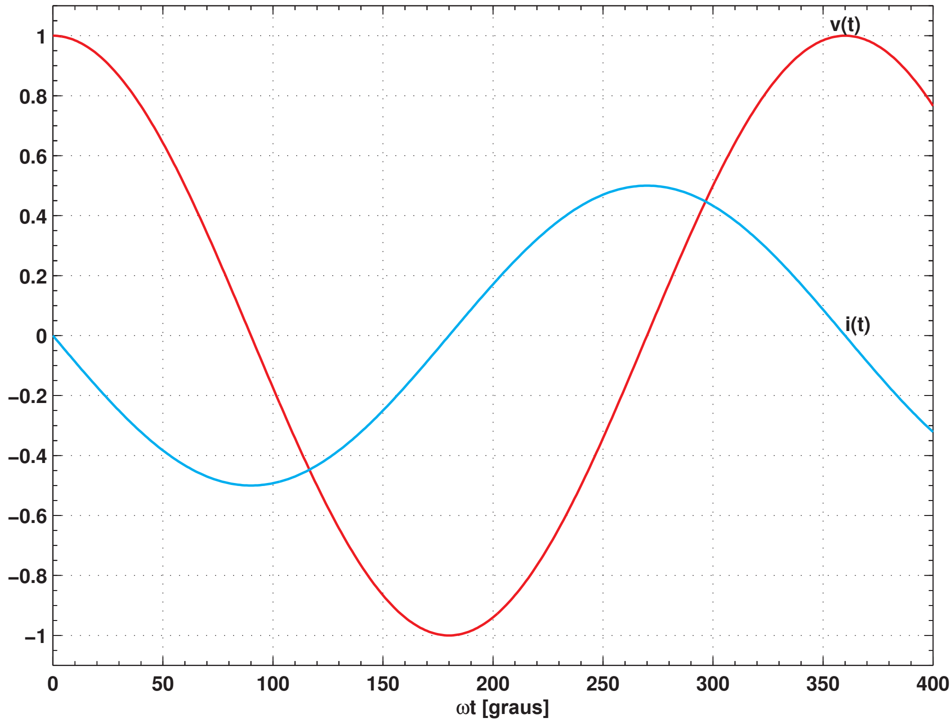

Fig. 1.7 Relação temporal entre corrente e tensão em capacitor ideal.

Fig. 1.8 Diagrama fasorial para um elemento capacitivo.

13. Impedância

Convém comparar as relações fasoriais obtidas para os elementos resistivos, indutivos e capacitivos. As equações estão repetidas a seguir para facilitar tal comparação:

$$\hat{V} = R\,\hat{I} \tag{1.52}$$

$$\hat{V} = j\omega L\,\hat{I} \tag{1.53}$$

$$\hat{V} = \frac{1}{j\omega C}\,\hat{I} \tag{1.54}$$

Podemos generalizar definindo uma impedância Z que é dada pela relação entre os fasores $\hat{V}$ e $\hat{I}$:

$$Z = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} \tag{1.55}$$

Notar que a impedância NÃO é um fasor. Trata-se de um **número complexo** que relaciona um fasor de tensão $\hat{V}$ com um fasor de corrente $\hat{I}$.

14. Admitância

De forma análoga ao que foi feito no item 13, podemos definir uma admitância dada pela relação:

$$Y = \frac{\hat{I}}{\hat{V}} \tag{1.56}$$

Notar que a admitância também NÃO é um fasor. Trata-se de um **número complexo** que relaciona um fasor de corrente $\hat{I}$ com um fasor de tensão $\hat{V}$. Fica evidente a partir das Eqs. (1.55) e (1.56) que:

$$Y = \frac{1}{Z} \tag{1.57}$$

15. Associações de elementos passivos

As associações entre elementos passivos podem ser estudadas através de impedâncias ou admitâncias, conforme a conveniência.

Estudo das associações de elementos passivos através de impedâncias
Considere duas impedâncias Z_1 e Z_2. Impedâncias em série serão simplesmente somadas:

$$Z_{Total} = Z_1 + Z_2 \tag{1.58}$$

lembrando que se trata da soma de dois números complexos! Para impedâncias em paralelo teremos:

$$Z_{Total} = \frac{Z_1 . Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{1.59}$$

Estudo das associações de elementos passivos através de admitâncias
Considere duas admitâncias Y_1 e Y_2. Para admitâncias em série teremos:

$$Y_{Total} = \frac{Y_1 . Y_2}{Y_1 + Y_2} \tag{1.60}$$

Elementos em paralelo terão suas admitâncias somadas:

$$Y_{Total} = Y_1 + Y_2 \tag{1.61}$$

16. Soma de fasores

Considere duas tensões representadas pelos fasores $\hat{V}_1$ e $\hat{V}_2$. Qual é a soma destes fasores? A operação pode ser realizada graficamente tal como mostra a Fig. 1.9:

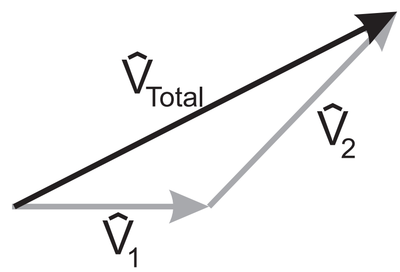

Fig. 1.9 Soma de dois fasores.

A soma de fasores também pode ser realizada usando coordenadas retangulares. Temos:

$$\hat{V}_1 = V_{M1}\left(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\right) \qquad \textbf{(1.62)}$$

$$\hat{V}_2 = V_{M2}\left(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2\right) \qquad \textbf{(1.63)}$$

$$\hat{V}_{Total} = \left(V_{M1}\cos\varphi_1 + V_{M2}\cos\varphi_2\right) + j\left(V_{M1}\sin\varphi_1 + V_{M2}\sin\varphi_2\right) \qquad \textbf{(1.64)}$$

Observando-se a Fig. 1.9 nota-se que a soma de um fasor também é um fasor! Uma generalização imediata é que um número qualquer de fasores podem ser somados, sempre resultando um fasor. Lembrar também que só é possível somar fasores de mesma frequência!

17. Sistema trifásico

Fasores podem ser usados para representar um sistema de tensões trifásico. No caso da Fig. 1.10 temos:

- um sistema trifásico (três tensões), denominadas de **tensões de fase**;
- equilibrado (as tensões possuem a mesma magnitude);
- a defasagem entre as tensões é de 120 graus;
- a sequência de fases é RST ou positiva;

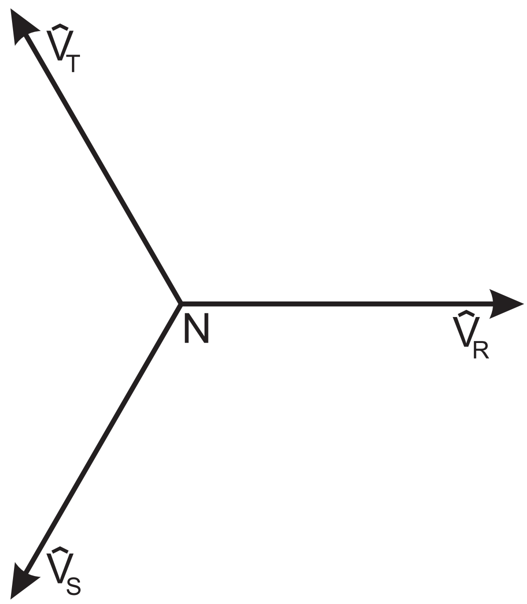

Fig. 1.10 Sistema de tensões trifásico, com ligação estrela.

Na Fig. 1.10 o tipo de ligação indicado é estrela, onde os três fasores possuem um ponto comum, denominado neutro (N).

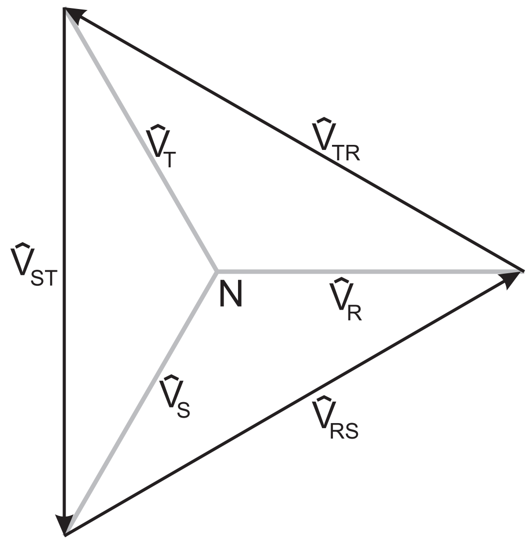

Fig. 1.11 Sistema de tensões trifásico,
com ligação delta.

Na Fig. 1.11 também temos 3 tensões, denominadas de **tensões de linha**, defasadas de 120 graus:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{RS} &= \hat{V}_R - \hat{V}_S \\ \hat{V}_{ST} &= \hat{V}_S - \hat{V}_T \\ \hat{V}_{TR} &= \hat{V}_T - \hat{V}_R \end{aligned} \tag{1.65}$$

No Brasil, os módulos das tensões de linha normalmente valem 220 VRMS. Isto significa que os fasores correspondentes serão:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{RS} &= \left(220\sqrt{2}\right) \angle +30^\circ = 311.1 \angle +30^\circ \\ \hat{V}_{ST} &= \left(220\sqrt{2}\right) \angle -90^\circ = 311.1 \angle -90^\circ \\ \hat{V}_{TR} &= \left(220\sqrt{2}\right) \angle -210^\circ = 311.1 \angle -210^\circ \end{aligned} \tag{1.66}$$

Um cálculo simples é capaz de mostrar que as tensões de fase correspondentes são:

$$\begin{aligned} \hat{V}_R &= 179.6 \angle 0^\circ \\ \hat{V}_S &= 179.6 \angle -120^\circ \\ \hat{V}_T &= 179.6 \angle -240^\circ \end{aligned} \tag{1.67}$$

correspondendo a tensões de fase de 127 VRMS. Este cálculo está baseado na seguinte relação:

$$V_{Fase} = \frac{V_{Linha}}{\sqrt{3}} \tag{1.68}$$

Numericamente resulta:

$$V_{Fase} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \left[VRMS\right] \tag{1.69}$$

18. Como aparece o "coeficiente mágico" $\sqrt{3}$

A dedução mais simples para o coeficiente $\sqrt{3}$ pode ser dada através de uma análise geométrica, tomando-se como base a Fig. 1.12. Tal figura deriva da Fig. 1.11 apresentada anteriormente

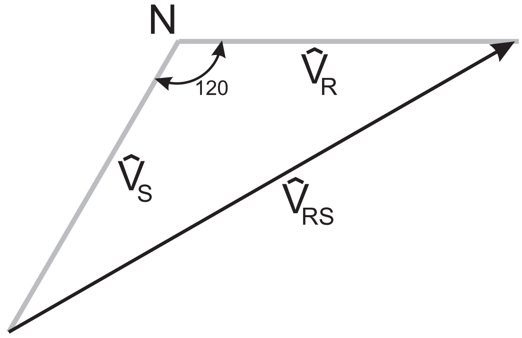

Fig. 1.12 Figura derivada da Fig. 1.11 para deduzir o "coeficiente mágico" $\sqrt{3}$ (Etapa 1).

Considerando-se que os fasores $\hat{V}_R$ e $\hat{V}_S$ possuem amplitude unitária resulta a Fig. 1.13:

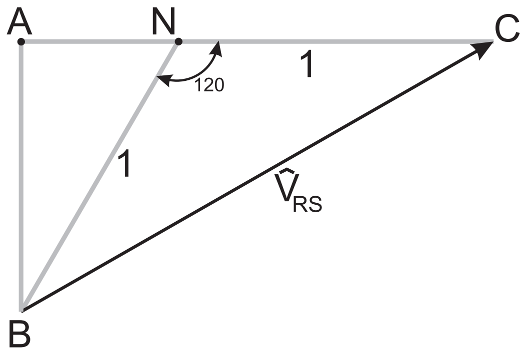

Fig. 1.13 Figura derivada da Fig. 1.12 utilizada para deduzir o "coeficiente mágico" $\sqrt{3}$ (Etapa 2).

O segmento AN possui amplitude: $\cos(60°) = 1/2$
O segmento AB possui amplitude: $\sin(60°) = \sqrt{3}/2$
O segmento AC possui amplitude: $AN + NC = 3/2$

Por Pitágoras conclui-se que:

$$BC = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3} \quad \textbf{(1.70)}$$

19. Potência ativa para um resistor ideal

Apesar do tema original desta apostila ser fasores iremos aproveitar a ocasião para discutir alguns conceitos relacionados à potência ativa, repetindo-se a condição de carga resistiva que havia sido apresentada na Fig. 1.3.

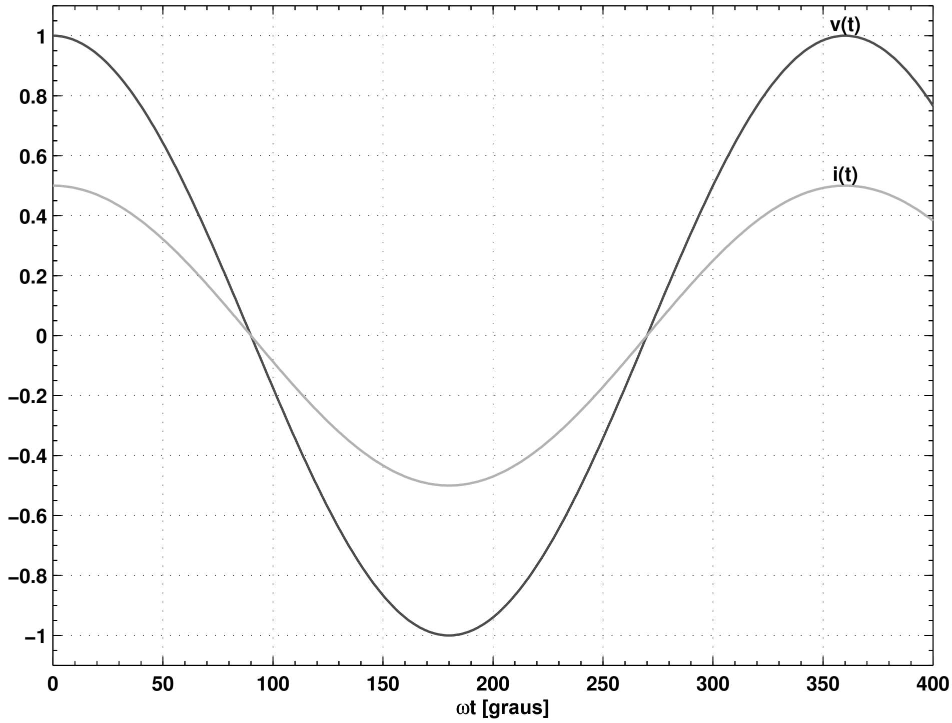

Fig. 1.14 Relação temporal entre corrente e tensão em resistor ideal.

Se multiplicarmos os valores instantâneos de tensão e corrente resulta uma potência instantânea $p(t)$ onde:

$$p(t) = v(t) \times i(t) \tag{1.71}$$

mostrada na Fig. 1.15

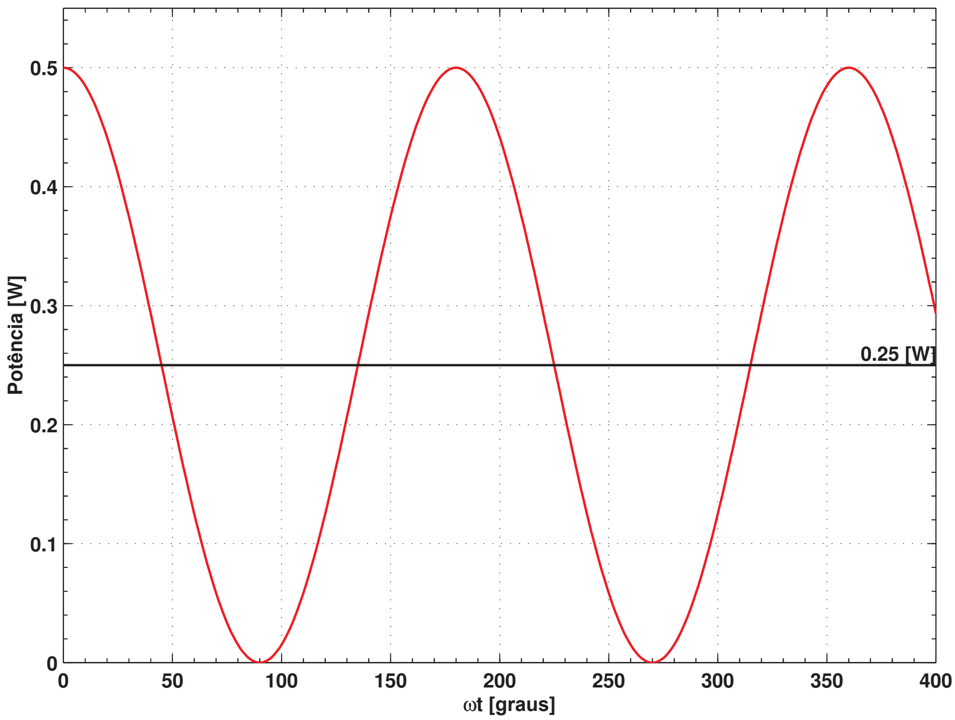

Fig. 1.15 Potência instantânea em um resistor ideal tomando-se como base a Fig. 1.14. O valor médio da potência calculado é de 0.25 [W].

Nota-se na Fig. 1.15 que:

- a potência instantânea é pulsante;
- existem instantes nos quais a potência instantânea chega a se anular (quando $\cos(2\omega t) = -1$);
- a pulsação de potência ocorre com periodicidade de $180°$ (2ω);
- a potência possui um valor médio não nulo (neste caso, 0.25 [W]).

A questão que se coloca é: “como é que se calcula o valor médio da potência?”
Temos, no caso geral:

$$\begin{aligned} v(t) &= V_M \cos(\omega t + \varphi) \\ i(t) &= I_M \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \tag{1.72}$$

Como a corrente e tensão estão em fase podemos adotar uma “nova origem” para a fase, resultando:

$$\begin{aligned} v(t) &= V_M \cos(\omega t) \\ i(t) &= I_M \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{1.73}$$

Agrupando-se as Eqs. (1.71) e (1.73) temos:

$$p(t) = V_M \cos(\omega t) \times I_M \cos(\omega t) \tag{1.74}$$

da qual se deduz:

$$p(t) = \frac{V_M I_M}{2}\left[1 + \cos(2\omega t)\right] \tag{1.75}$$

Ou seja, foram confirmadas as conclusões de que:

- a potência instantânea é pulsante;
- existem instantes nos quais a potência instantânea chega a se anular (quando $\cos(2\omega t) = -1$);
- a pulsação de potência ocorre com periodicidade de 2ω.

Para o exemplo numérico das Figs. 1.14 e 1.15 temos:

V_M= 1 [V]
I_M= 0.5 [A]

resultando a potência média P_M= 0.25 [W]

20. Potência ativa para um indutor ideal

E se a carga fosse uma indutância ideal ?
A tensão e corrente neste caso estão apresentadas na Fig. 1.16 e a potência ativa instantânea é dada na Fig. 1.17.

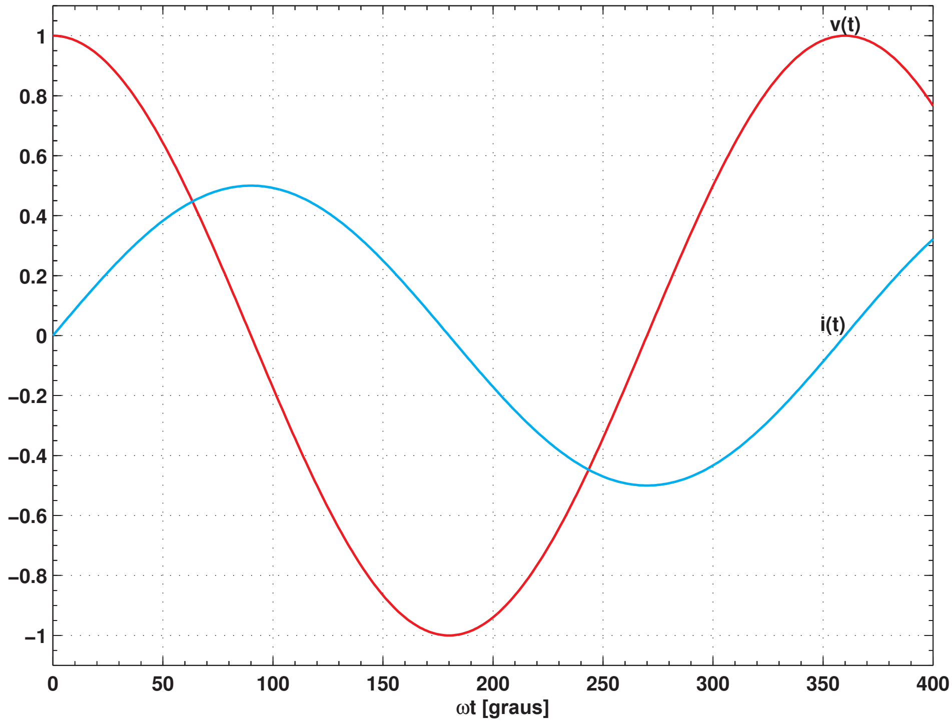

Fig. 1.16 Relação temporal entre corrente e tensão em indutor ideal.

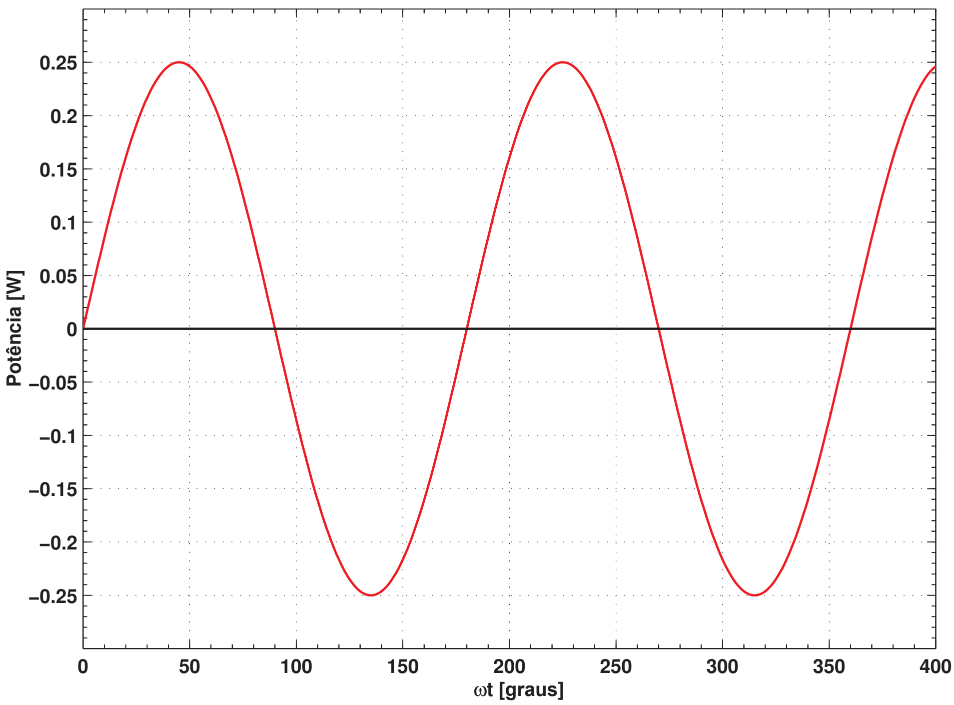

Fig. 1.17 Potência instantânea em um indutor ideal tomando-se como base a Fig. 1.16. O valor médio da potência é nulo.

Nota-se na Fig. 1.17 que:

- a potência instantânea é pulsante;
- a pulsação de potência ocorre com periodicidade de 180° (2ω);
- a potência possui um valor médio **nulo**.

21. Potência ativa para um capacitor ideal

E se a carga fosse um capacitor ideal ?

A tensão e corrente neste caso estão apresentadas na Fig. 1.18 e a potência ativa instantânea é dada na Fig. 1.19.

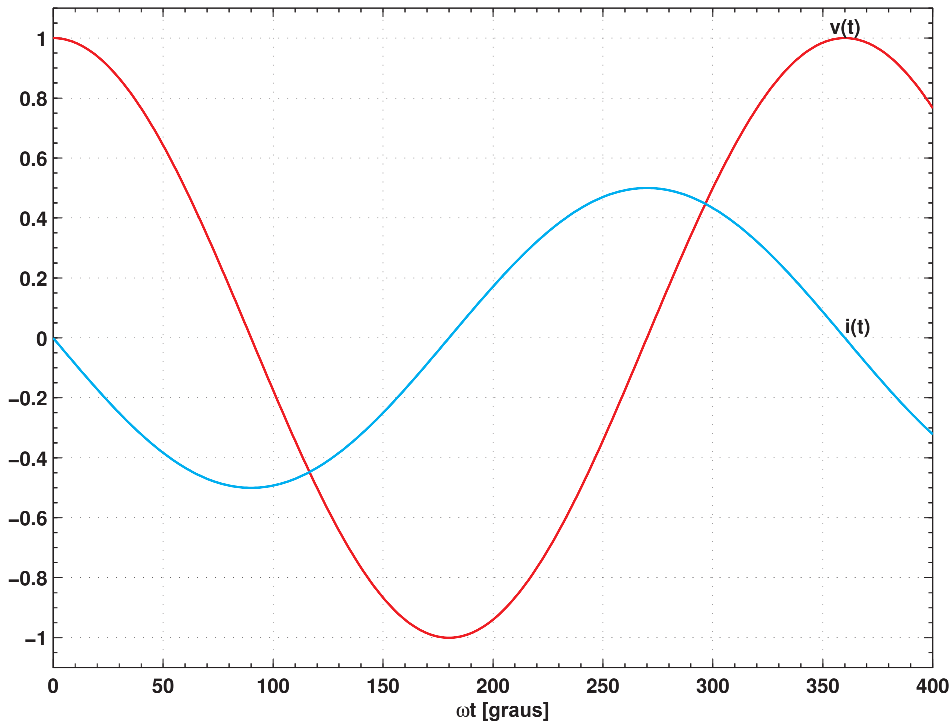

Fig. 1.18 Relação temporal entre corrente e tensão em capacitor ideal.

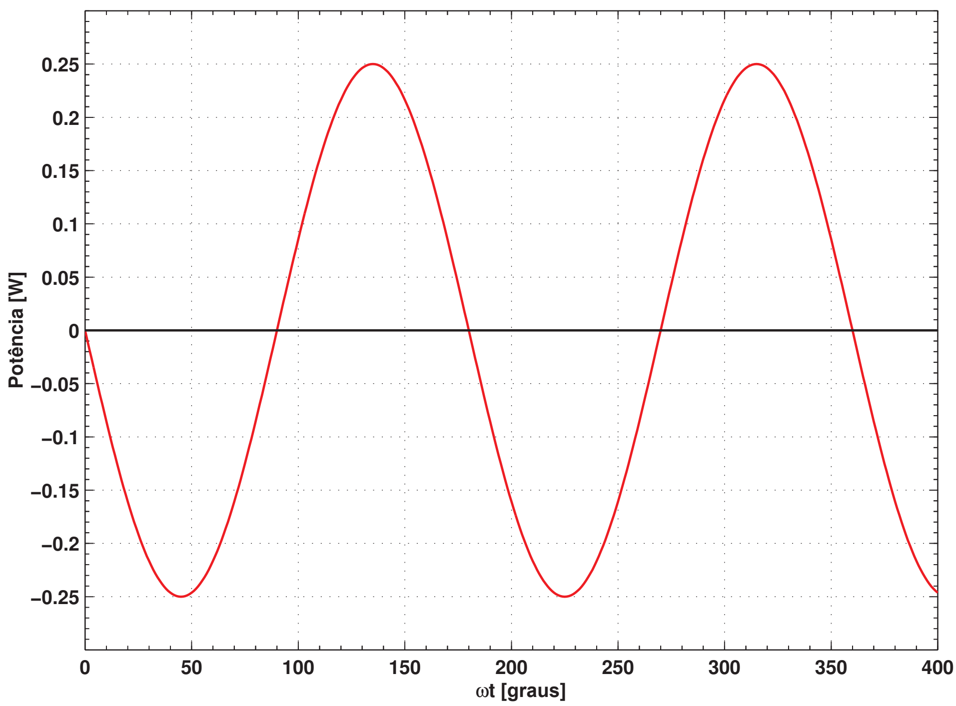

Fig. 1.19 Potência instantânea em um capacitor ideal tomando-se como base a Fig. 1.18. O valor médio da potência é nulo.

Nota-se na Fig. 1.19 que:

- a potência instantânea é pulsante;
- a pulsação de potência ocorre com periodicidade de 180° (2ω);
- a potência possui um valor médio **nulo**.

22. Como é que a potência média pode ter valor nulo se existe corrente e tensão?

Vamos retornar à pergunta: "como é que se calcula o valor médio da potência?"
Temos, no caso geral (para qualquer tipo de carga):

$$\begin{aligned} v(t) &= V_M \cos(\omega t) \\ i(t) &= I_M \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \qquad \textbf{(1.76)}$$

Neste caso existe uma defasagem φ entre a tensão e a corrente. Esta defasagem pode ser, no caso geral, tanto positiva quanto negativa. Calculamos:

$$p(t) = V_M \cos(\omega t) \times I_M \cos(\omega t - \varphi) \qquad \textbf{(1.77)}$$

da qual se deduz:

$$p(t) = \frac{V_M I_M}{2} \cos(\varphi)\left[1 + \cos(2\omega t)\right] + \frac{V_M I_M}{2} \sin(\varphi)\, sen(2\omega t) \qquad \textbf{(1.78)}$$

podemos escrever também:

$$p(t) = P\left[1 + \cos(2\omega t)\right] + Q\, sen(2\omega t) \qquad \textbf{(1.79)}$$

onde os valores de P (Potência ativa) e Q (Potência reativa) são dados por:

$$P = \frac{V_M I_M}{2} \cos(\varphi) \qquad \textbf{(1.80)}$$

$$Q = \frac{V_M I_M}{2} \sin(\varphi) \qquad \textbf{(1.81)}$$

A potência ativa instantânea possui portanto 3 termos (ver Eq. 1.79):

- um valor médio não nulo P dado pela Eq. (1.80), que é a potência média;
- um valor pulsante, com valor médio nulo e periodicidade 2ω, com amplitude P ;
- um valor pulsante, com valor médio nulo e periodicidade 2ω, com amplitude Q.

No caso do capacitor ideal temos φ= -90°, resultando em P=0.
No caso do indutor ideal temos φ= +90°, resultando em P=0.

O termo $\cos(\varphi)$ é denominado de "fator de potência".

23. Mais definições (isto não vai terminar nunca???)

A partir das Eqs. 1.80 e 1.81 é usual definirmos uma potência aparente S:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{V_M I_M}{2} \qquad \textbf{(1.82)}$$

e consequentemente:

$$P = S \cos(\varphi) \qquad \textbf{(1.83)}$$

$$Q = S \sin(\varphi) \qquad \textbf{(1.84)}$$

24. Reescrevendo as equações utilizando valores eficazes (isto não vai terminar nunca???)

Reescrevendo-se a Eq. 1.76 em termos de tensão eficaz e corrente eficaz resulta:

$$\begin{aligned} v(t) &= V_M \cos(\omega t) = \sqrt{2}\, V_{RMS} \cos(\omega t) \\ i(t) &= I_M \cos(\omega t - \varphi) = \sqrt{2}\, I_{RMS} \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad \textbf{(1.85)}$$

$$Q = V_{RMS} I_{RMS} \sin(\varphi) \quad \textbf{(1.86)}$$

$$P = V_{RMS} I_{RMS} \cos(\varphi) \quad \textbf{(1.87)}$$

$$S = V_{RMS} I_{RMS} \quad \textbf{(1.88)}$$

25. Exemplo: cálculo de potência em circuito RL

Considere um circuito do tipo resistor mais indutor colocados em série. A tensão e corrente para este caso são:

$$\begin{aligned} v(t) &= 1 \cos(\omega t) \\ i(t) &= 0.5 \cos(\omega t + 30) \end{aligned} \quad \textbf{(1.89)}$$

A Fig. 1.20 ilustra esta situação:

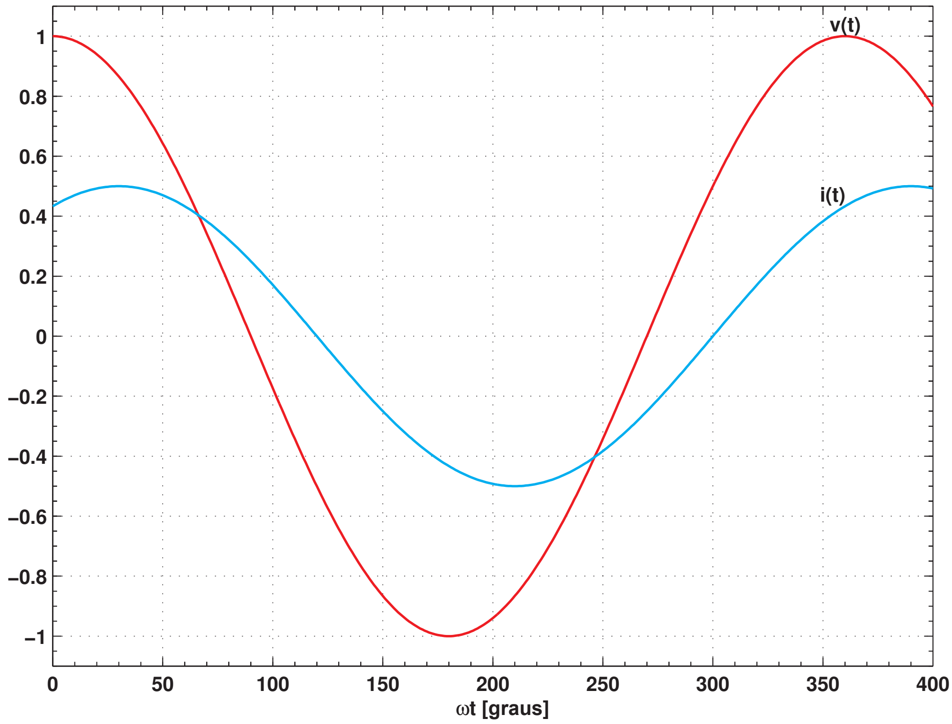

Fig. 1.20 Relação temporal entre corrente e tensão para circuito RL.

A potência instantânea está mostrada na Fig. 1.21 a seguir, notando-se:

- existe uma potência média não nula, cujo valor é de 0.217 [W];
- existe uma pulsação de potência com periodicidade 2ω;
- existem breves períodos nos quais a potência é negativa, significando que a carga está "devolvendo" energia para a fonte de alimentação.

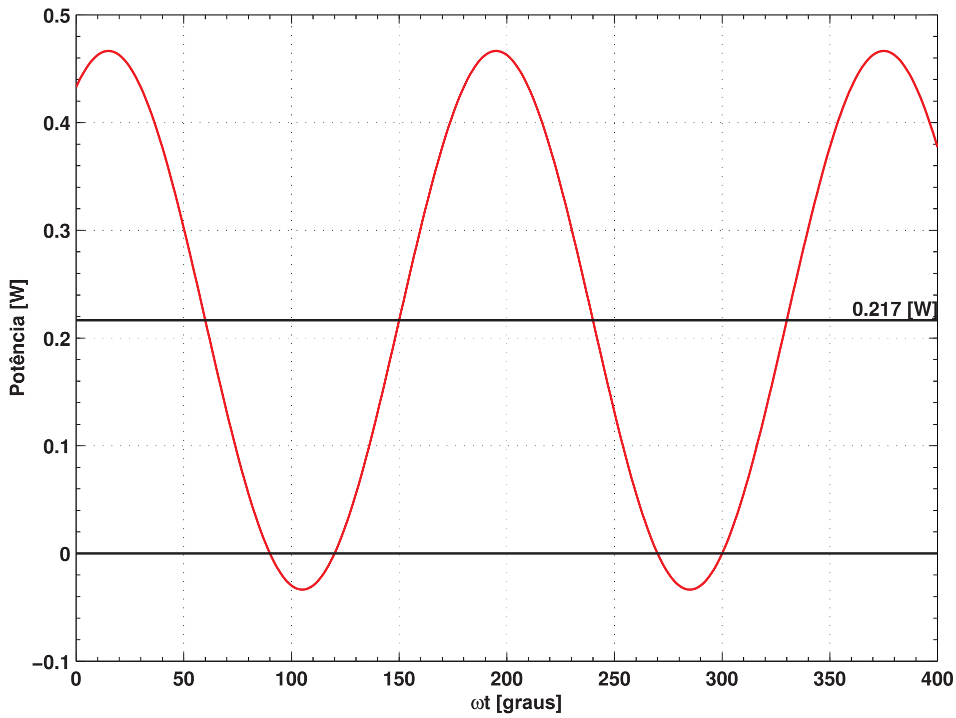

Fig. 1.21 Relação temporal entre corrente e tensão para circuito RL.

O cálculo analítico da potência ativa média resulta:

$$P = \frac{V_M I_M}{2}\cos(\varphi) = \frac{1\times 0.5}{2}\cos(30) = \frac{1}{4}\cos(30) = 0.217\ [W] \quad \textbf{(1.90)}$$

26. Valor médio de uma grandeza senoidal

O valor médio de uma grandeza senoidal é sempre zero! Ao descrevermos uma grandeza senoidal é inútil dizermos que seu valor médio é nulo. Como os semiciclos positivo e negativo são simétricos, o valor médio sempre é nulo.

27. Valor eficaz de uma grandeza senoidal? A origem do fator mágico $\sqrt{2}$.

Em alguns tópicos anteriores já foi utilizado o conceito de valor eficaz mesmo sem uma definição prévia, o que será feito neste item.

Apesar do valor médio de uma senoide ser nulo (ver pergunta 25 acima) esta forma de onda "possui energia", dando origem à noção de valor eficaz. O objetivo é descobrir uma "equivalência energética" entre uma tensão senoidal e uma tensão DC.

Tomaremos como base uma tensão de 1 VDC alimentando um resistor de 1 Ω. Neste caso circula uma corrente de 1 ADC e a potência dissipada pelo resistor será $1\,[VDC]\times 1\,[ADC] = 1\,[W]$.

Se o mesmo resistor for alimentado com tensão alternada certamente existe um valor de tensão que também será capaz de dissipar os mesmos 1 [W] de potência. Considere uma tensão:

$$v(t) = V_M \cos(\omega t) \quad \textbf{(1.91)}$$

Circula portanto uma corrente:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t) = \left(\frac{V_M}{1\ [\Omega]} \right) \cos(\omega t) \quad \textbf{(1.92)}$$

A potência média dissipada deverá ser 1 [W] para que seja mantida a "equivalência energética". A potência instantânea dissipada num circuito puramente resistivo já havia sido deduzida na Eq. 1.75, reproduzida abaixo.

$$p(t) = \frac{V_M I_M}{2} \left[1 + \cos(2\omega t) \right] \quad \textbf{(1.93)}$$

Substituindo a corrente I_M calculada, a Eq. 1.93 se transformará em:

$$p(t) = \frac{V_M^2}{2} \left[1 + \cos(2\omega t) \right] \quad \textbf{(1.94)}$$

cujo valor médio neste exemplo será:

$$P_{Média} = \frac{V_M^2}{2} = 1\,[W] \quad \textbf{(1.95)}$$

Resulta da Eq. 1.95 que:

$$V_M = \sqrt{2}\ [V] \approx 1.41\ [V] \quad \textbf{(1.96)}$$

Ou seja, a tensão com amplitude $V_M = \sqrt{2}\,[V]$ será capaz de produzir a mesma dissipação de potência de uma fonte DC de 1 [V]. Tal raciocínio dá origem ao conceito de valor eficaz.

Portanto, quando dizemos que uma tensão senoidal possui valor eficaz $V_{RMS} = 1\,[VRMS]$ isto significa que sua amplitude é $V_M = \sqrt{2}\,[V]$.

28. Pode-se usar fasores em formas de onda não senoidais?

Não! Entretanto, se a forma de onda original puder ser decomposta em várias componentes espectrais poderemos utilizar fasores para representar cada uma destas raias.

29. Fasores com frequências distintas?

Sim, podem existir fasores com frequências distintas (ver pergunta 28 acima). Só que estes fasores tem que ser tratados **obrigatoriamente** como entidades independentes!

30. Escalas gráficas para representação de fasores

Nas Figs. 1.10 e 1.11 representamos um sistema trifásico de tensões, sendo implícito o uso de uma escala gráfica [cm]/[V] para todos os fasores. Entretanto, quando se tem fasores de tensões e correntes no mesmo gráfico (tal como ocorre nas Figs. 1.4, 1.6 e 1.8) teremos duas escalas gráficas (uma para tensões e outra para correntes).

31. Pode-se usar valores RMS na representação gráfica de um fasor?

Na definição de fasores (ver Eq. 1.5) está presente a **amplitude**! Quando fazemos uma representação gráfica de um fasor somos obrigados a escolher uma escala gráfica qualquer do tipo [cm]/[V] ou [cm]/[A]. Na escolha desta escala gráfica podemos **eventualmente** incluir o termo $\sqrt{2}$ fazendo com que a escala gráfica seja [cm]/[VRMS] ou [cm]/[ARMS].

32. Pode-se usar valores RMS para representar fasores? Burlando as próprias regras?

Na definição de fasores (Eq. 1.5, reproduzida abaixo) está presente a **amplitude**!

$$\hat{Y} = Y_M e^{j\varphi} = Y_M \angle\varphi \qquad \textbf{(1.97)}$$

Ocorre que a amplitude de uma grandeza senoidal está relacionada com seu valor eficaz através de (ver Eq. 1.96):

$$Y_M = Y_{RMS}\sqrt{2} \qquad \textbf{(1.98)}$$

Agrupando-se estas duas ideias, tornou-se relativamente frequente a utilização de valores eficazes para fasores. Desta forma, escrevemos:

$$\hat{Y} = Y_{RMS} e^{j\varphi} = Y_{RMS} \angle\varphi \quad [VRMS] \qquad \textbf{(1.99)}$$

Na Eq. (1.99) tomou-se o cuidado de indicar que o valor expresso é o valor eficaz da tensão!

A Eq. (1.97), que é a **definição rigorosa** de fasores, permite o cálculo da tensão $y(t)$ em qualquer instante através da expressão (ver Eq. 1.22):

$$y(t) = Re\left[Y_M e^{j\omega t} e^{j\varphi}\right] \qquad \textbf{(1.100)}$$

Quando admitimos o uso de valores eficazes para expressar fasores, tal como foi feito na Eq. (1.99), cálculo da tensão $y(t)$ será feito a partir de:

$$y(t) = Re\left[\sqrt{2}\, Y_{RMS} e^{j\omega t} e^{j\varphi}\right] \qquad \textbf{(1.101)}$$

Para tornar mais clara a questão iremos apresentar um exemplo numérico. Considere os fasores abaixo (na frequência angular ω):

$$\begin{aligned} \hat{U} &= 5 \angle 30^\circ \\ \hat{V} &= 5 \angle 30^\circ \quad [VRMS] \end{aligned} \qquad \textbf{(1.102)}$$

Estes fasores correspondem às senoides:

$$\begin{aligned} u(t) &= 5 \cos(\omega t + 30^\circ) \\ v(t) &= \sqrt{2}\times 5 \cos(\omega t + 30^\circ) = 7.07 \cos(\omega t + 30^\circ) \end{aligned} \qquad \textbf{(1.103)}$$

que são claramente distintas!

Em resumo: "ao burlar nossa própria definição de fasores, admitindo sua expressão através de valores eficazes, será importante incluir o fator $\sqrt{2}$ ao recalcular a senoide no domínio do tempo".

33. Quantos fasores podem ser usados simultaneamente?

Infinitos! Se podem existir infinitas senoides **de mesma frequência** também podem existir infinitos fasores!

34. Quem mexeu no meu fasor?

Fasores não giram, não rodam e não podem ser mexidos. Como se trata da representação de uma ou mais senoides de mesma frequência em regime permanente, não há a menor possibilidade de alguém mexer no seu fasor...

35. Existem fasores com amplitude nula? E com amplitude negativa?

Fasores são representados por números complexos, que possuem módulo e fase. Não existe nenhuma razão pela qual a amplitude de um fasor não possa ser nula. Considere a subtração dos dois fasores (iguais) abaixo:

$$\hat{X} = \hat{Y} = 5 \angle 30° \qquad \textbf{(1.104)}$$

Resulta:

$$\hat{Z} = \hat{X} - \hat{Y} = 5 \angle 30° - 5 \angle 30° = 0 \angle 0° \qquad \textbf{(1.105)}$$

O fasor resultante $\hat{Z}$ é definido da mesma forma que todos os outros fasores (ver Eq. 1.5). Só que neste caso específico tanto o módulo quanto fase são nulos.

Entretanto, não faz sentido um fasor possuir amplitude negativa. Isto porque a amplitude de um número complexo sempre será maior ou igual a zero!

36. Quem inventou impedâncias?

Arthur Edwin Kennelly, nasceu em 1861 em Bombaim/India, filho de um oficial naval irlandês. Após frequentar diversas escolas básicas, Kennelly começou a trabalhar como *office-boy* na *London Society of Telegraph Engineers* (predecessora da IEE inglesa) onde permaneceu durante dois anos. Após deixar a Inglaterra procurou aprimorar seus conhecimentos técnicos trabalhando em diversos cargos técnicos em diferentes países. Em 1887 chegou aos Estados Unidos onde começou a trabalhar como principal engenheiro-assistente de Thomas A. Edison.

As contribuições de Kennelly para a engenharia elétrica foram numerosas. Em 1893 apresentou o artigo "*Impedance*" para a AIEE-*American Institute of Electrical Engineers* no qual discutia o uso de números complexos para que a Lei de Ohm pudesse ser aplicada em circuitos de corrente alternada. Assim como Oliver Heaviside, Kennelly propôs a existência de uma camada de ar ionizado na atmosfera superior (atualmente conhecida como camada de Kennelly-Heaviside) que poderia atuar como superfície refletora tornando a comunicação transoceânica sem fios possível.

37. Impedâncias podem ser negativas?

Impedâncias são números complexos que podem ser representados tanto na forma cartesiana quanto polar. Adotando-se a representação cartesiana ($a + jb$) não existe muito sentido em dizer que a impedância é negativa pois tanto a parte real quanto imaginária podem assumir qualquer sinal. Adotando-se a representação polar, a amplitude será necessariamente maior ou igual a zero.