

Transformações Geométricas 2D

SCC0250/0650 - Computação Gráfica

Prof^a. Rosane Minghim

<https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=61213>

<https://edisciplinas.usp.br/course/view.php?id=61210>

rminghim@icmc.usp.br

P.A.E. Diego Cintra e Fábio Felix

diegocintra@usp.br, f_diasfabio@usp.br

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC)
Universidade de São Paulo (USP)

12 de março de 2018



Sumário

- 1 Introdução
- 2 Transformações Básicas
- 3 Coordenadas Homogêneas
- 4 Transformações Inversas
- 5 Transformações 2D Compostas
- 6 Outras Transformações 2D

Sumário

- ➊ Introdução
- ➋ Transformações Básicas
- ➌ Coordenadas Homogêneas
- ➍ Transformações Inversas
- ➎ Transformações 2D Compostas
- ➏ Outras Transformações 2D

Introdução

- **Transformações Geométricas** são operações aplicadas à descrição geométrica de um objeto para mudar sua
 - posição (translação)
 - orientação (rotação)
 - tamanho (escala)
- Além dessas **transformações básicas**, existem outras
 - reflexão
 - cisalhamento

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Transformações Básicas
- 3 Coordenadas Homogêneas
- 4 Transformações Inversas
- 5 Transformações 2D Compostas
- 6 Outras Transformações 2D

Translação

Translação

- A translação consiste em adicionar *offsets* às coordenadas que definem um objeto

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

- Usando notação matricial, uma translação 2D pode ser descrita como

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{T}$$

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

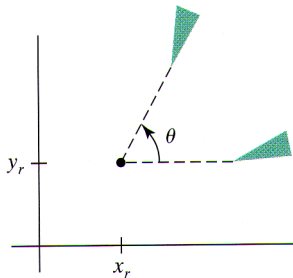
Rotação

Rotação

- Define-se uma transformação de rotação por meio de um **eixo de rotação** e um **ângulo de rotação**
- Em 2D a rotação se dá em um caminho circular no plano, rotacionando o objeto considerando-se um eixo perpendicular ao plano xy

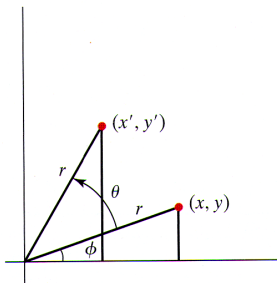
Rotação

- Parâmetros de rotação 2D são o ângulo θ de rotação e o ponto (x_r, y_r) de rotação, que é a intersecção do eixo de rotação com o plano xy
 - Se $\theta > 0$ a rotação é anti-horária
 - Se $\theta < 0$ a rotação é horária



Rotação

- Para simplificar considera-se que o ponto de rotação está na origem do sistema de coordenadas
 - O raio r é constante, ϕ é o ângulo original de $\mathbf{P} = (x, y)$ e θ é o ângulo de rotação



Rotação

- Sabendo que

$$\cos(\phi + \theta) = \frac{x'}{r} \Rightarrow x' = r \cdot \cos(\phi + \theta)$$

$$\sin(\phi + \theta) = \frac{y'}{r} \Rightarrow y' = r \cdot \sin(\phi + \theta)$$

- como

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

- então

$$x' = r \cdot \cos \phi \cdot \cos \theta - r \cdot \sin \phi \cdot \sin \theta$$

$$y' = r \cdot \cos \phi \cdot \sin \theta + r \cdot \sin \phi \cdot \cos \theta$$

Rotação

- $\mathbf{P} = (x, y)$ pode ser descrito por meio de coordenadas polares

$$x = r \cdot \cos \phi, \quad y = r \cdot \sin \phi$$

- Então por substituição

$$x' = x \cdot \cos \theta - y \cdot \sin \theta$$

$$y' = x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta$$

- Escrevendo na forma matricial temos

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformação de Corpo Rígido

Transformação de Corpo Rígido

- A **rotação** e a **translação** é uma **Transformação de Corpo Rígido** pois direcionam ou movem um objeto sem deformá-lo
 - Mantém ângulos e distâncias entre as coordenadas do objeto

Escala

Escala

- Para alterar o tamanho de um objeto aplica-se o operador de escala
- Multiplica-se as coordenadas de um objeto por fatores de escala

$$x' = x \cdot s_x, \quad y' = y \cdot s_y$$

- Na forma matricial

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Escala

- Propriedades de s_x e s_y
 - s_x e s_y devem ser maiores que zero
 - Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ o objeto aumenta
 - Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ o objeto diminui
 - Se $s_x = s_y$ a escala é uniforme
 - Se $s_x \neq s_y$ a escala é diferencial

Escala

- Pela formulação definida, o objeto é escalado e movido

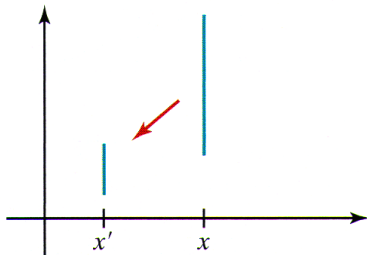


Figura: Escala de uma linha usando $s_x = s_y = 0.5$

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Transformações Básicas
- 3 Coordenadas Homogêneas**
- 4 Transformações Inversas
- 5 Transformações 2D Compostas
- 6 Outras Transformações 2D

Coordenadas Homogêneas

- As três transformações básicas podem ser expressas por

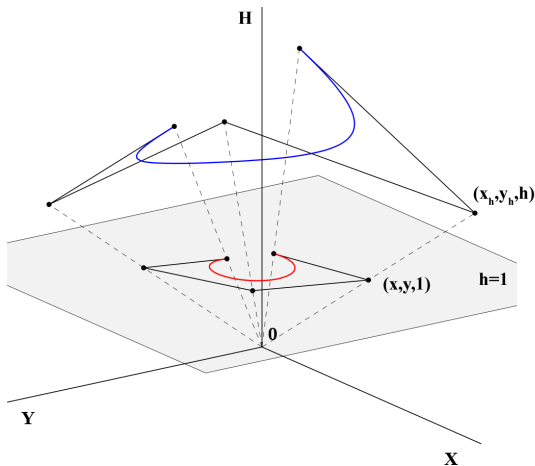
$$\mathbf{P}' = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{P} + \mathbf{M}_2$$

- \mathbf{M}_1 : matriz 2×2 com fatores multiplicativos
 - \mathbf{M}_2 : matriz coluna com termos para translação
-
- Para se aplicar uma sequencia de transformações, esse formato não ajuda
 - Eliminar a adição de matrizes permite escrever uma sequencia de transformações como uma multiplicação de matrizes

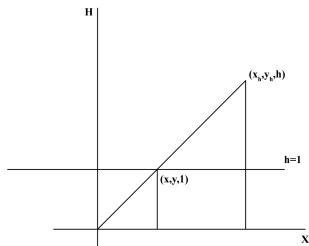
Coordenadas Homogêneas

- Isso pode ser feito expandindo-se o espaço **Cartesiano 2D** para o espaço de **Coordenadas Homogêneas 3D**
- Nessa expansão um ponto (x, y) é expandido para (x_h, y_h, h) , onde h é o parâmetro homogêneo ($h \neq 0$)
- As coordenadas cartesianas são recuperados projetando as coordenadas homogêneas no plano $h = 1$

Coordenadas Homogêneas



Coordenadas Homogêneas



- Por semelhança de triângulos, a projeção do sistema homogêneo para o sistema Cartesiano se dá pela seguinte relação

$$x = \frac{x_h}{h}, \quad y = \frac{y_h}{h}$$

- Nas coordenadas homogêneas, h pode ser qualquer valor diferente de zero, mas escolhemos $h = 1$ para a transformação ser mais simples

Coordenadas Homogêneas – Translação 2D

- Usando coordenadas homogêneas, as transformações são convertidas em multiplicações de matrizes

- A translação no espaço homogêneo é dada por

$$x'_h = 1 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + t_x \cdot h$$

$$y'_h = 0 \cdot x_h + 1 \cdot y_h + t_y \cdot h$$

$$h = 0 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + 1 \cdot h$$

Coordenadas Homogêneas – Translação 2D

- Definindo na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ h \end{bmatrix}$$

- Voltando ao espaço Cartesiano

$$x'_h/h = (1 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + t_x \cdot h)/h \Rightarrow x' = x + t_x$$

$$y'_h/h = (0 \cdot x_h + 1 \cdot y_h + t_y \cdot h)/h \Rightarrow y' = y + t_y$$

$$h/h = (0 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + 1 \cdot h)/h \Rightarrow 1 = 1$$

Coordenadas Homogêneas – Translação 2D

- Por conveniência, com $h = 1$, definimos a translação no espaço Cartesiano como

$$\mathbf{P}_h' = \mathbf{T}(t_x, t_y) \cdot \mathbf{P}_h$$

$$\begin{bmatrix} x_h' \\ y_h' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas – Rotação 2D

- Uma rotação pode ser definida usando coordenadas homogêneas da seguinte forma

$$\mathbf{P}_h' = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{P}_h$$

$$\begin{bmatrix} x_h' \\ y_h' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas – Escala 2D

- Uma escala pode ser definida usando coordenadas homogêneas da seguinte forma

$$\mathbf{P}_h' = \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{P}_h$$

$$\begin{bmatrix} x_h' \\ y_h' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformando Vértices

- Exemplo de utilização de uma matriz de transformação

```
1 #version 150
2
3 in vec3 a_position;
4
5 void main(void)
6 {
7     //criando uma matriz de escala 2D
8     mat3 model = mat3(1.5, 0.0, 0.0, //primeira coluna
9                       0.0, 1.5, 0.0, //segunda coluna
10                      0.0, 0.0, 1.0); //terceira coluna
11
12     //multiplicando a matriz de transformacao pelo vetor
13     //em coordenadas homogeneas
14     vec3 pos = model * vec3(a_position[0], a_position[1], 1.0);
15
16     //convertendo as coordenadas homogeneas para euclideanas
17     gl_Position = vec4(pos[0]/pos[2], pos[1]/pos[2], 0.0, 1.0);
18 }
```

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Transformações Básicas
- 3 Coordenadas Homogêneas
- 4 Transformações Inversas**
- 5 Transformações 2D Compostas
- 6 Outras Transformações 2D

Translação Inversa

- Para a translação, inverte-se o sinal das translações

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação Inversa

- Uma rotação inversa é obtida trocando o ângulo de rotação por seu negativo

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Isso rotaciona no sentido horário
- $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$

Escala Inversa

- O inverso da escala é obtido trocando os parâmetros por seus inversos

$$\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Transformações Básicas
- 3 Coordenadas Homogêneas
- 4 Transformações Inversas
- 5 Transformações 2D Compostas**
- 6 Outras Transformações 2D

Introdução

- Usando representações matriciais homogêneas, uma sequência de transformações pode ser representada como uma única matriz obtida a partir de multiplicações de matrizes de transformação

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'_h &= \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{P}_h \\ &= (\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1) \cdot \mathbf{P} \\ &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_h \end{aligned}$$

- A transformação é dada por \mathbf{M} ao invés de \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2

Compondo Translações

- Para se compor duas translações podemos fazer

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'_{\mathbf{h}} &= \mathbf{T}(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot \{\mathbf{T}(t_{1_x}, t_{1_y}) \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{h}}\} \\ &= \{\mathbf{T}(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot \mathbf{T}(t_{1_x}, t_{1_y})\} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{h}} \\ &= \mathbf{T}(t_{2_x} + t_{1_x}, t_{2_y} + t_{1_y}) \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{h}}\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{2_x} \\ 0 & 1 & t_{2_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1_x} \\ 0 & 1 & t_{1_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1_x} + t_{2_x} \\ 0 & 1 & t_{1_y} + t_{2_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Compondo Rotações

- Para se compor duas rotações podemos fazer

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'_h &= \mathbf{R}(\theta_2) \cdot \{\mathbf{R}(\theta_1) \cdot \mathbf{P}_h\} \\ &= \{\mathbf{R}(\theta_2) \cdot \mathbf{R}(\theta_1)\} \cdot \mathbf{P}_h \\ &= \mathbf{R}(\theta_1 + \theta_2) \cdot \mathbf{P}_h\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Compondo Escalas

- Para se compor duas escalas podemos fazer

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'_h &= \mathbf{S}(s_{2x}, s_{2y}) \cdot \{\mathbf{S}(s_{1x}, s_{1y}) \cdot \mathbf{P}_h\} \\ &= \{\mathbf{S}(s_{2x}, s_{2y}) \cdot \mathbf{S}(s_{1x}, s_{1y})\} \cdot \mathbf{P}_h \\ &= \mathbf{S}(s_{1x} \cdot s_{2x}, s_{1y} \cdot s_{2y}) \cdot \mathbf{P}_h\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} s_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1x} \cdot s_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{1y} \cdot s_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 2D com Ponto de Rotação

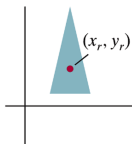
- Rotação com ponto de rotação é feita combinando-se múltiplas transformações
 - Movo o ponto de rotação para a origem
 - Executo a rotação
 - Movo o ponto de rotação para a posição inicial

$$\mathbf{R}(x_r, y_r, \theta) = \mathbf{T}(x_r, y_r) \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{T}(-x_r, -y_r)$$

Rotação 2D com Ponto de Rotação

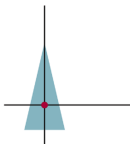
$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_r - x_r \cos \theta + y_r \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & y_r - y_r \cos \theta - x_r \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rotação 2D com Ponto de Rotação



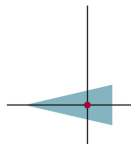
(a)

Original Position
of Object and
Pivot Point



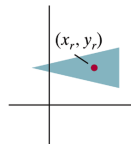
(b)

Translation of
Object so that
Pivot Point
(x_r, y_r) is at
Origin



(c)

Rotation
about
Origin



(d)

Translation of
Object so that
the Pivot Point
is Returned
to Position
(x_r, y_r)

Escala 2D com Ponto Fixo

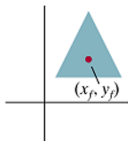
- Escala com ponto fixo é feita combinando-se múltiplas transformações
 - Movo o ponto fixo para a origem
 - Executo a escala
 - Movo o ponto fixo para sua posição original

$$\mathbf{S}(x_f, y_f, s_x, s_y) = \mathbf{T}(x_f, y_f) \cdot \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{T}(-x_f, -y_f)$$

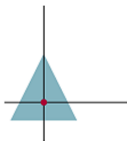
Escala 2D com Ponto Fixo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_f(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_f(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala 2D com Ponto Fixo



(a)
Original Position
of Object and
Fixed Point



(b)
Translate Object
so that Fixed Point
 (x_f, y_f) is at Origin



(c)
Scale Object
with Respect
to Origin



(d)
Translate Object
so that the Fixed
Point is Returned
to Position (x_f, y_f)

Propriedade da Concatenação de Matrizes

- Multiplicação de matriz é associativa

$$\mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1 = (\mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{M}_2) \cdot \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_3 \cdot (\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1)$$

- Multiplicação nos dois sentidos é possível, da esquerda para a direita e da direita para a esquerda
 - **Pré-multiplicação:** da esquerda para a direita – as transformação são especificadas na ordem em que são aplicadas ($\mathbf{M}_1 \rightarrow \mathbf{M}_2 \rightarrow \mathbf{M}_3$)
 - **Pós-multiplicação:** da direita para a esquerda – as transformação são especificadas na ordem inversa em que são aplicadas ($\mathbf{M}_3 \rightarrow \mathbf{M}_2 \rightarrow \mathbf{M}_1$)
 - OpenGL usa pós-multiplicação

Propriedade da Concatenação de Matrizes

- Multiplicação de matrizes não é comutativa $M_2 \cdot M_1 \neq M_1 \cdot M_2$

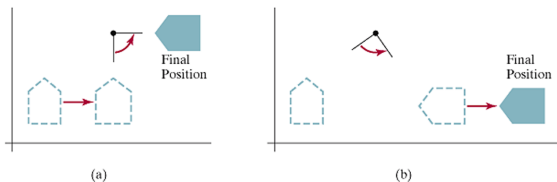


Figura: (a) primeiro o objeto é transladado depois rotacionado em 45^0 (b) primeiro o objeto é rotacionado em 45^0 , depois transladado.

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Transformações Básicas
- 3 Coordenadas Homogêneas
- 4 Transformações Inversas
- 5 Transformações 2D Compostas
- 6 Outras Transformações 2D**

Reflexão

- Espelha-se as coordenadas de um objeto relativo a um eixo de reflexão, rotacionando em um ângulo de 180^0
- Reflexão com relação ao eixo x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão

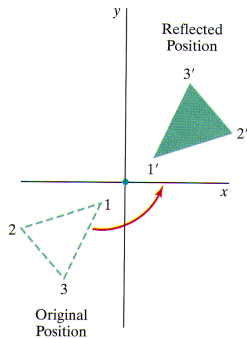
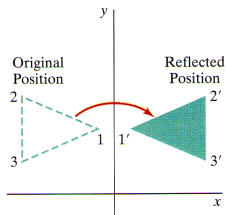
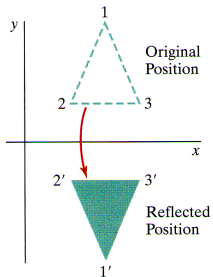
- Reflexão com relação ao eixo y

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Reflexão em x e y

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão



Cisalhamento

- Distorce o formato do objeto na direção de x ou y
- Cisalhamento na direção de x

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- O que transforma as coordenadas como

$$x' = x + sh_x \cdot y$$

$$y' = y$$

Cisalhamento

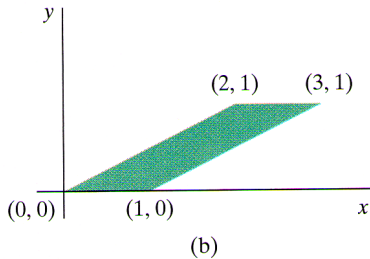
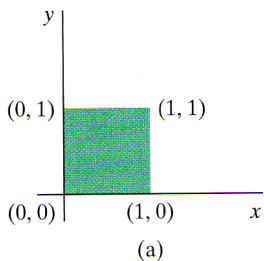


Figura: Convertendo um quadrado em um paralelogramo usando $sh_x = 2$.

Bibliografia

- **Básica:**

- Hearn, D. Baker, M. P. Computer Graphics with OpenGL, Prentice Hall, 2004. **(livro texto)**
- Neider, J. Davis, T. Woo, M. OpenGL programming guide, 2007.
- Angel, E. Interactive computer graphics: a top-down approach with OpenGL, Addison Wesley, 2000.
- Foley, J. et. al. Introduction to Computer Graphics, Addison-Wesley, 1993.

Bibliografia

- **Complementar:**

- Computer Graphics Comes of Age: An Interview with Andries van Dam. CACM, vol. 27, no. 7. 1982
- The RenderMan – And the Oscar Goes to... IEEE Spectrum, vol. 38, no. 4, abril de 2001.
- Material do ano passado:
<https://sites.google.com/site/computacaograficaicmc2017t2/>
- Apostilas antigas da disciplina Computação Gráfica
 - <http://www.gbdi.icmc.usp.br/material?q=system/files/apostilas.pdf>
- Curso da ACM SIGGRAPH (on line)