$n! > n^2$ se $n \geq 4$

Ora $\quad n! > n^2 \Leftrightarrow (n-1)! > n$

$(n-1)(n-2) - n = n^2 - 4n + 2 =$

$(n-2)^2 - 2$ e

$(n-2)^2 - 2 > 0$ se $n > 4$

Logo $\boxed{(n-1)(n-2) > n \quad \text{se } n \geq 4}$ (1)

Vamos agora à demonstração do resultado

$(n-1)! > n$ para $n \geq 4$

O resultado vale para $n = 4$ e $n = 5$

assuma que vale para $n = 4, 5, \ldots, t-1$

vamos mostrar que vale para $n = t$:

Ora $(n-1)! = (n-1)(n-2) \cdot (n-3)! \geq$

$(n-1)(n-2)$ se $n \geq 4$ e

$(n-1)(n-2) > n$ logo

$(n-1)! > n$ c.q.d.

$n! > n^3$ para $n \geq 6$

$\Leftrightarrow (n-1)! > n^2$ se $n \geq 6$

Lema: Se $n \geq 6$ então

$$(n-1)(n-2)(n-3) > n^2$$

Ora $(n-1)(n-2)(n-3) - n^2 =$

$$n^3 + 5n^2 + 11n - 6 =$$

$$n^2(n-5) + 11n - 6 > 0 \text{ se } n \geq 6$$

Portanto concluimos o Lema.

Agora vamos mostrar que
$\cancel{(n-1)(n-2)(n-3) > n^2}$

$(n-1)! > n^2$ para $n = 6$ Vale para $n=6$

$$(n-1)! = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)! >$$

$$n^2 (n-4)! \geq n^2$$

c.q.d.

Exercício: (Use calculo i)
Mostre que Existe $t = t(k)$ tal que

se $n > t(k)$ então $n! > n^k$. ▫