AGG0243 - Métodos Matemáticos em Geofísica.

Resolução da Lista de Exercícios

Q1.

a) $\cos x$, $T = ?$

Sendo a freqüência angular fundamental definida por $\omega = \frac{2\pi}{T}$, podemos reescrevê-la de tal forma que isolemos o período fundamental:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Dessa forma, para $\cos x$, $\omega = 1$. Assim, $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ é o período fundamental de $\cos x$

$\sin x$, $T = ?$

Como $\omega = 1$, então $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$. Portanto, $T = 2\pi$ é o período fundamental de $\sin x$

$\cos 2x$, $T = ?$

$\omega = 2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi}$ //

$\sin \pi x$, $T = ?$

$\omega = \pi \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2}$ //

$\sin 2\pi x$, $T = ?$

$\omega = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1}$ //

b) $\cos nx$, $\cos \frac{2\pi}{k}x$, $\cos \frac{2\pi n}{k}x$

$\cos nx$, $T = ?$

$\omega = n$ $\quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{n}}$ //

$\cos \frac{2\pi}{k}x$, $T = ?$

$\omega = \frac{2\pi}{k}$ $\quad \boxed{T = \frac{2\pi}{2\pi} \cdot k = k}$ //

$\cos \frac{2\pi}{k} n x$, $T = ?$

$\omega = \frac{2\pi n}{k}$ $\quad \boxed{T = \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi} n} \cdot k = \frac{k}{n}}$ //

Q2.

$f(t) = t$, $\quad$ para $-\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2}$

A série de Fourier de $f(t)$ pode ser escrita na seguinte forma:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$$, onde os coeficientes de Fourier

serão dados por:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt, \quad a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).\cos k\omega t\,dt \quad e \quad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t).\sin k\omega t\,dt$$

sendo $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e T o período da função.

Suponhamos que desconhecemos a paridade da função $f(t) = t$, ou seja, se a mesma é par ou ímpar.

Assim, o coeficiente a_0 é determinado como a seguir:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t\,dt = \frac{1}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{2T}\left(\frac{T^2}{4} - \frac{T^2}{4}\right) = 0.$$

$$\therefore\ a_0 = 0$$

Os coeficientes a_K, com $K \in \mathbb{N}$ e $K > 0$, podem ser determinados como a seguir

$$a_K = \boxed{\frac{2}{T}\int_{T/2}^{-T/2} t.\cos K\omega t\,dt} \to \mathrm{I}$$

Essa integral pode ser resolvida pelo método de integração por partes.

Dada duas funções $g(x)$ e $h(x)$, definidas num intervalo $[a, b]$, deriváveis neste intervalo e com derivadas contínuas no mesmo intervalo, o método de integração por partes nos permite escrever a integração do produto de $g(x)$ por $h'(x)$ da seguinte forma:

$$\int_a^b g(x)\,h'(x)\,dx = \left[g(x)\,h(x)\right]_a^b - \int_a^b g'(x)\,h(x)\,dx.$$

Aplicando esta fórmula na integral I, obtemos:

$$a_K = \frac{2}{T}\int_{T/2}^{-T/2} t.\cos K\omega t\,dt = \frac{2}{T}\left\{\left[\frac{t}{K\omega}\sin K\omega t\right]_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2}\frac{\sin K\omega t}{K\omega}\,dt\right\}.$$

$$a_K = \frac{2}{T}\left\{\left(\frac{T}{2K\omega}\sin\left(K\omega\frac{T}{2}\right) + \frac{T}{2K\omega}\sin\left(-K\omega\frac{T}{2}\right)\right) - \left(\left[-\frac{\cos K\omega t}{(K\omega)^2}\right]_{-T/2}^{T/2}\right)\right\}$$

Como a função seno tem paridade ímpar, $\sin\left(-K\omega\frac{T}{2}\right) = -\sin\left(K\omega\frac{T}{2}\right)$. Dessa forma,

$$a_K = \frac{2}{T}\left\{\underbrace{\left(\left(\frac{T}{2K\omega}\sin\left(K\omega\frac{T}{2}\right) - \frac{T}{2K\omega}\sin\left(K\omega\frac{T}{2}\right)\right)\right)}_{=0} - \left(\frac{-\cos\left(K\omega\frac{T}{2}\right)}{(K\omega)^2} + \frac{\cos\left(-K\omega\frac{T}{2}\right)}{(K\omega)^2}\right)\right\}$$

Como a função cosseno é par, $\cos\left(-K\omega\frac{T}{2}\right) = \cos\left(K\omega\frac{T}{2}\right)$. Logo,

$$a_K = \frac{2}{T}\left\{-\left(\frac{-\cos\left(K\omega\frac{T}{2}\right)}{(K\omega)^2} + \frac{\cos\left(K\omega\frac{T}{2}\right)}{(K\omega)^2}\right)\right\} = 0$$

Esse resultado já era esperado, não? Como vimos em aula, o termo a_K é igual a zero para funções ímpares. Assim, nos resta agora determinar o termo b_K, o qual irá ditar a série de Fourier da função $f(t) = t$.

$$b_K = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t.\sin K\omega t\,dt$$ → Aqui, novamente, será necessário o emprego da fórmula por separação por partes. Assim:

$$b_K = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t.\sin K\omega t\,dt = \frac{2}{T}\left\{\left[-\frac{t.\cos K\omega t}{K\omega}\right]_{-T/2}^{T/2} - \int_{-T/2}^{T/2}\left(-\frac{\cos K\omega t}{K\omega}\right)dt\right. \Rightarrow$$

$$b_K = \frac{2}{T}\left\{\left[\left(-\frac{T}{2K\omega}.\cos\left(K\omega\frac{T}{2}\right)\right) - \left(+\frac{T}{2K\omega}.\overset{\text{par}}{\cos}\left(-K\omega\frac{T}{2}\right)\right)\right] - \left[-\frac{\sin K\omega t}{(K\omega)^2}\right]_{-T/2}^{T/2}\right\}$$

$$b_K = \frac{2}{T}\left\{\left(-\frac{T}{K\omega}.\cos K\omega\frac{T}{2}\right) - \left[-\frac{1}{(K\omega)^2}\sin\left(K\omega\frac{T}{2}\right) - \left(-\frac{1}{(K\omega)^2}\overset{\text{ímpar}}{\sin}\left(-K\omega\frac{T}{2}\right)\right)\right]\right\}$$

$$b_K = \frac{2}{T}\left\{-\frac{T}{K\omega}.\cos K\omega\frac{T}{2} + \frac{2}{K\omega^2}\sin\left(K\omega\frac{T}{2}\right)\right\}$$

Como $T = \frac{2\pi}{\omega}$, temos: $b_K = \frac{2\omega}{2\pi}\left\{-\frac{2\pi}{K\omega^2}.\cos K\omega\frac{2\pi}{2\omega} + \frac{2}{K\omega^2}\sin K\omega\frac{2\pi}{2\omega}\right\}$

$$b_K = \frac{\omega}{\pi}\left\{ -\frac{2\pi}{k\omega^2}\cos k\pi + \frac{2}{k\omega^2}\sin k\pi \right\} \Rightarrow$$

$b_K = -\frac{2}{k\omega}\cos k\pi + \frac{2}{\pi k\omega}\sin k\pi$. No entanto, como $K \in \mathbb{N}$ e $k \geq 1$, o termo $\sin k\pi$ é zero $\forall K$. Logo,

$$\boxed{b_K = -\frac{2}{k\omega}\cos k\pi}$$

↳ Uma forma mais "elegante" matematicamente de se escrever o termo b_K, é analizando-se novamente o que ocorre com o termo $\cos k\pi$ para o intervalo no qual K pertence. Para k igual a números ímpares, $\cos k\pi = -1$. Para K igual a números pares, $\cos k\pi = 1$. Dessa forma, $\cos k\pi$ pode ser reescrito como:

$$\cos k\pi = (-1)^K, \text{ onde } K \in \mathbb{N} \text{ e } K \geq 1.$$

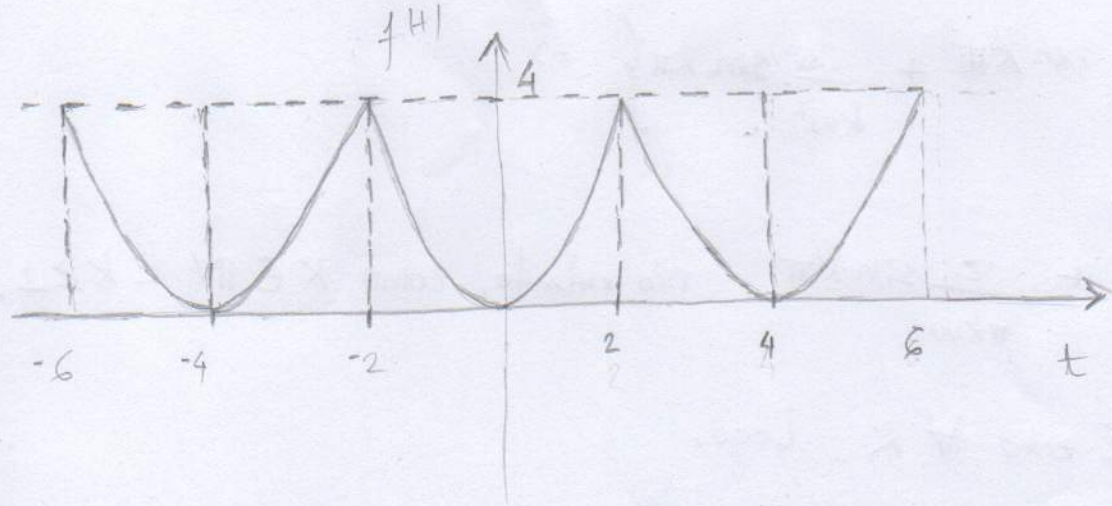
Assim, temos todos os coeficientes de Fourier calculados e podemos, dessa forma, a série de Fourier de $f(t)$ como:

$$\boxed{f(t) = -2\sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^K}{K\omega} \cdot \sin k\omega t}$$

Q3.

$f(t) = t^2$, para $-2 \leq t < 2$, com $T = 4$

(a)



b) Qual a paridade à função $f(t) = t^2$? A função $f(t) = t^2$ é uma função par. Logo, não é necessário que calculemos o coeficiente b_K, pois o mesmo é zero.

$$a_K = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} t^2 . \cos K\omega t \, dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} t^2 \cos K\omega t \, dt$$

A integral acima pode ser resolvida utilizando a fórmula da integração por partes.

$$a_K = \frac{1}{2}\left\{ \underbrace{\left[\frac{t^2 \sin K\omega t}{K\omega}\right]_{-2}^{2}}_{I} - \underbrace{\int_{-2}^{2} \frac{2t \sin K\omega t}{K\omega} dt}_{=II} \right\}$$

Para resolvermos a integral II será necessário, novamente, utilizarmos a fórmula de integração por partes. Assim:

$$II \rightarrow \int_{-2}^{2} \frac{2t \sin K\omega t}{K\omega} dt = \left[-\frac{2t \cos K\omega t}{(K\omega)^2}\right]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2}\left(-\frac{2 \cos K\omega t}{(K\omega)^2}\right) dt =$$

$$\left[-\frac{2t . \cos K\omega t}{(K\omega)^2}\right]_{-2}^{2} - \left[-\frac{2 \sin K\omega t}{(K\omega)^3}\right]_{-2}^{2} = \left[\left(-\frac{4 \cos 2K\omega}{(K\omega)^2}\right) - \left(\frac{4 \cos(-2K\omega)}{(K\omega)^2}\right)\right] -$$

$$\left[\left(-\frac{2 \sin 2K\omega}{(K\omega)^3}\right) - \left(-\frac{2 \sin(-2K\omega)}{(K\omega)^3}\right)\right] = -\frac{8 \cos 2K\omega}{(K\omega)^2} + \frac{4 \sin 2K\omega}{(K\omega)^3}$$

$$\textcircled{I} \rightarrow \left[\frac{t^2 \sin k\omega t}{k\omega}\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{4\sin 2k\omega}{k\omega}\right) - \left(\frac{4\sin\overset{\text{Impar}}{(-2k\omega)}}{k\omega}\right) = \frac{4\sin 2k\omega}{k\omega} + \frac{4\sin 2k\omega}{k\omega} =$$

$$\frac{8\sin 2k\omega}{k\omega}$$

$$a_k = \frac{1}{2}\left\{ \textcircled{I} - \textcircled{II} \right\} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{8\sin 2k\omega}{k\omega} + \frac{8\cos 2k\omega}{(k\omega)^2} - \frac{4\sin 2k\omega}{(k\omega)^3}\right.$$

Como $T = 4$, então $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, Logo

$$a_k = \frac{1}{2}\left\{ \frac{16\sin k\pi}{k\pi} + \frac{32\cos k\pi}{(k\pi)^2} - \frac{32\sin k\pi}{(k\pi)^3} \right\}$$

$$a_k = \frac{8\sin k\pi}{k\pi} + \frac{16\cos k\pi}{(k\pi)^2} - \frac{16\sin k\pi}{(k\pi)^3}$$

Para $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 1$, $\sin k\pi = 0$ e $\cos k\pi = (-1)^k$. Assim,

$$a_k = \frac{16}{k^2\pi^2}(-1)^k$$

O coeficiente a_0 é dado por

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} t^2\,dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{4}\left[\frac{8}{3} + \frac{8}{3}\right] = \frac{4}{3}$$

Dessa forma, a série de Fourier de $f(t) = t^2$ é dada por:

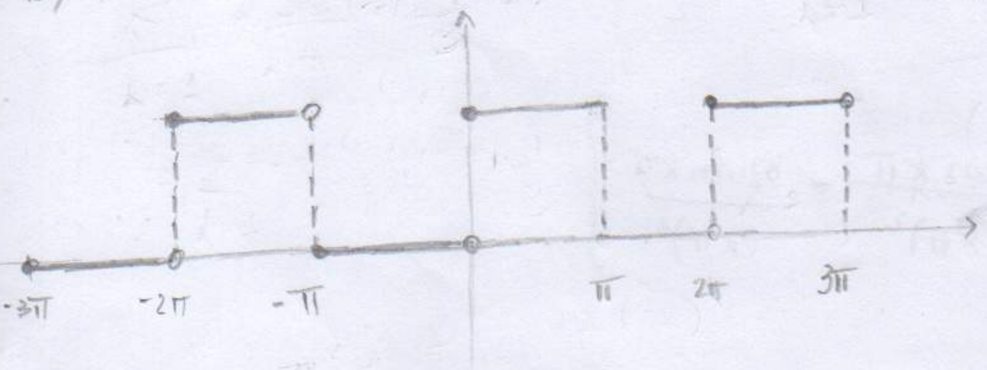
$$\boxed{f(t) = \frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{k^2\pi^2}(-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)}$$

Questão 4

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } 0 \le x < \pi \\ 0, & \text{para } -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

(a)

$-3\pi < x < 3\pi$



(b)

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 0.dx + \int_{0}^{\pi} 1dx\right\} = \frac{1}{2\pi}\Big[x\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos k\omega x\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 0.\cos k\omega x\,dx + \int_{0}^{\pi} 1.\cos k\omega x\,dx\right\} = \left[\frac{1}{\pi}\frac{\sin k\omega x}{k\omega}\right]_0^{\pi}$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\pi}\frac{\sin k\omega\pi}{k\omega}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\frac{\sin k\pi}{k}$$

Como $k \in \mathbb{N}$ e $k \ge 1$, então: $\sin k\pi = 0$, Logo $a_k = 0$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin k\omega x\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} 0.\sin k\omega x\,dx + \int_{0}^{\pi} 1.\sin k\omega x\,dx\right\} \Rightarrow$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos k\omega x}{k\omega}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos k\omega\pi}{k\omega} + \frac{1}{k\omega}\right]$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k\omega} - \frac{\cos k\omega\pi}{k\omega}\right].$$ Como $\omega = 1$, então

$b_k = \frac{1}{\pi k} - \frac{\cos k\pi}{\pi k}$. Repare que quando k é par, $b_k = 0$. Assim,

podemos reescrever b_k com termos onde k é ímpar:

$$\boxed{b_{(2k-1)} = \frac{2}{\pi(2k-1)}}$$, já que sabemos que $\forall\, k$ ímpar, $\cos k\pi = -1$

De posse dos coeficientes de Fourier, $f(x)$ pode ser escrita como:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)}.\sin(2k-1)x}$$

(c) No ponto $\frac{\pi}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, logo

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin\left[(2k-1)\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)}.\sin\left[(2k-1).\frac{\pi}{2}\right]}$$

(d) Para $k = 2$

$$\pi\Big|_{k=2} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

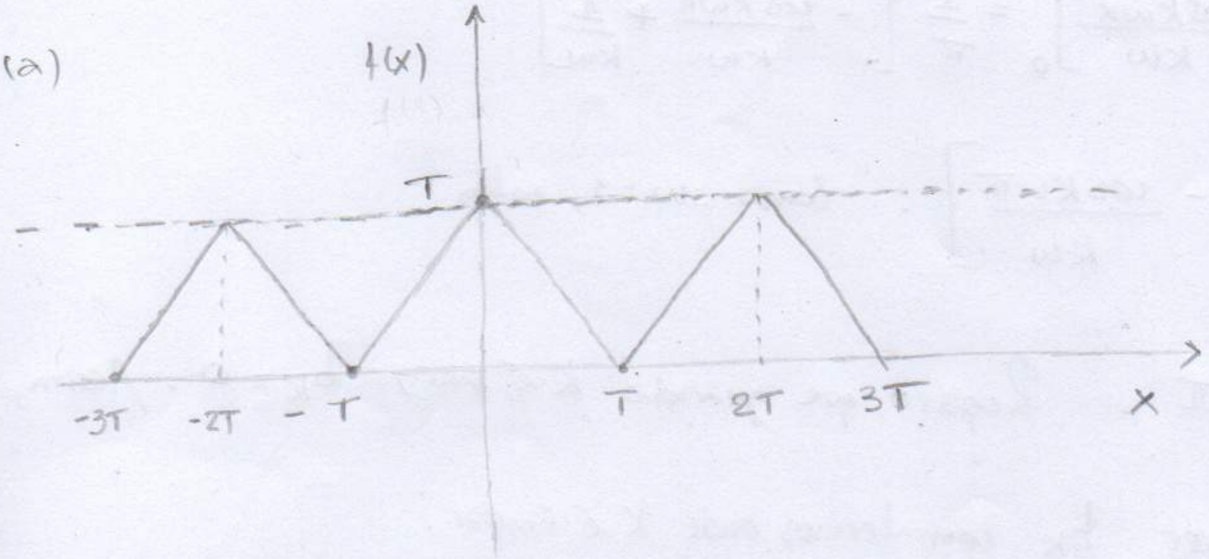
Para $k = 3$

$$\pi\Big|_{k=3} = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5}$$

85.

$$f(x) = \begin{cases} T-x, & \text{para } 0 \le x \le T \\ T+x, & \text{para } -T \le x \le 0 \end{cases}$$

(a)



(b) Trata-se de uma função par. Veja a simetria do gráfico acima.

(c) Como a função $f(x) = \begin{cases} T-x, & \text{para } 0 \le x \le T \\ T+x, & \text{para } -T \le x \le 0 \end{cases}$ é par, nós não precisaremos calcular os coeficientes b_K.

$$a_0 = \frac{1}{2T}\left\{\int_{-T}^{0}(T+x)\,dx + \int_{0}^{T}(T-x)\,dx = \frac{1}{2T}\left\{\left[Tx + \frac{x^2}{2}\right]_{-T}^{0} + \left[\left(Tx - \frac{x^2}{2}\right)\right]_{0}^{T}\right.\right.$$

$$a_0 = \frac{1}{2T}\left\{-\left[-T^2 + \frac{T^2}{2}\right] + \left[T^2 - \frac{T^2}{2}\right]\right\} = \frac{1}{2T}\left(\frac{T^2}{2} + \frac{T^2}{2}\right) = \frac{T}{2}$$

$$a_K = \frac{1}{T}\left\{\int_{-T}^{0}(T+x).\cos K\omega x\,dx + \int_{0}^{T}(T-x).\cos K\omega x\,dx\right\} \Rightarrow$$

$$a_K = \frac{1}{T}\left\{\int_{-T}^{0}(T.\cos K\omega x + x.\cos K\omega x)\,dx + \int_{0}^{T}(T.\cos K\omega x - x.\cos K\omega x)\,dx\right\} = IV$$

$$a_K = \frac{1}{T}\left\{\underbrace{\int_{-T}^{0} T.\cos K\omega x\,dx}_{=I} + \underbrace{\int_{-T}^{0} x.\cos K\omega x\,dx}_{=II} + \underbrace{\int_{0}^{T} T\cos K\omega x\,dx}_{=III} + \int_{0}^{T}(-x.\cos K\omega x)\,dx\right\}$$

(I) $\to \displaystyle\int_{-T}^{0} T.\cos k\omega x\, dx = \left[\frac{T}{k\omega}\sin k\omega x\right]_{-T}^{0} = \left[\left(\frac{T}{k\omega}\sin k\omega.0\right) - \left(\frac{T}{k\omega}\sin(-k\omega T)\right)\right]$ ímpar

(I) $\to \dfrac{T\sin k\omega T}{k\omega}$. Como $\omega = \dfrac{2\pi}{P} = \dfrac{2\pi}{2T} = \dfrac{\pi}{T}$

↳ período é o período $P = 2T$,

(I) $\to \dfrac{T^2 \sin k\pi}{k\pi}$. Como $k \in \mathbb{N}$ e para $k \geq 1$, $\sin k\pi = 0$. Logo (I) $= 0$

(II) $\to \displaystyle\int_{-T}^{0} x.\cos k\omega x\, dx$. Aqui devemos utilizar a fórmula de integral por partes:

$$\int_{-T}^{0} x\cos k\omega x\, dx = \left[\frac{x\sin k\omega x}{k\omega}\right]_{-T}^{0} - \int_{-T}^{0}\frac{\sin k\omega x}{k\omega}dx = \left[\frac{x\sin k\omega x}{k\omega}\right]_{-T}^{0} - \left[-\frac{\cos k\omega x}{(k\omega)^2}\right]_{-T}^{0}$$

$$= \left[\left(\frac{0.\sin k\omega.0}{k\omega}\right) - \left(\frac{-T.\overset{\text{ímpar}}{\sin(-k\omega T)}}{k\omega}\right)\right] - \left[\left(-\frac{\cos k\omega.0}{(k\omega)^2}\right) - \left(\frac{-\overset{\text{par}}{\cos(-k\omega T)}}{(k\omega)^2}\right)\right] =$$

$$\left(-\frac{T.\sin k\omega T}{k\omega}\right) - \left[\left(-\frac{1}{(k\omega)^2} + \frac{\cos k\omega T}{(k\omega)^2}\right)\right]$$

→ Como vimos acima, este termo é zero $\forall\, k$

$$\text{(II)} = -\frac{T^2 \sin k\pi}{k\pi} + \frac{T^2}{(k\pi)^2} - \frac{T^2\cos k\pi}{(k\pi)^2} = \frac{T^2}{(k\pi)^2}\left(1 - \cos k\pi\right)$$

$=$? Vamos analisar

Veja que $1 - \cos k\pi$ é zero, quando $\cos k\pi = 1$. Isso só ocorre quando k é par. Para k ímpar, $(1 - \cos k\pi) = 2$. Portanto, podemos reescrever (II) da seguinte forma

$$\boxed{\text{II} = \frac{2T^2}{(2k-1)^2\pi^2}}$$

Como vimos acima, esse termo é zero $\forall\, k$

$$\text{III} = \int_{0}^{T} T\cos k\omega x\, dx = \left[\frac{T}{k\omega}\sin k\omega x\right]_{0}^{T} = \frac{T^2 \sin k\pi}{k\pi}$$

(IV) $\int_0^T (-x.\cos k\omega x)\,dx = \left[-\frac{x.\sin k\omega x}{k\omega} \right]_0^T - \int_0^T \frac{(-\sin k\omega x)dx}{(k\omega)}$

$$\left[-\frac{x.\sin k\omega x}{k\omega} \right]_0^T - \left[\frac{\cos k\omega x}{(k\omega)^2} \right]_0^T = -\left[\frac{\cos k\omega T}{(k\omega)^2} - \frac{1}{(k\omega)^2} \right] = \frac{1}{(k\omega)^2}(1-\cos k\omega T)$$

↳ Como já mostramos, este termo é zero para o período em questão e $\forall k$

Como em (II), (IV) $= \frac{2T^2}{(2k-1)^2\pi^2}$. Substituindo (I), (II), (III) e (IV) em a_k, temos:

$$a_{2k-1} = \frac{1}{T}\left[\frac{4T^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right] = \frac{4T}{(2k-1)^2\pi^2}$$

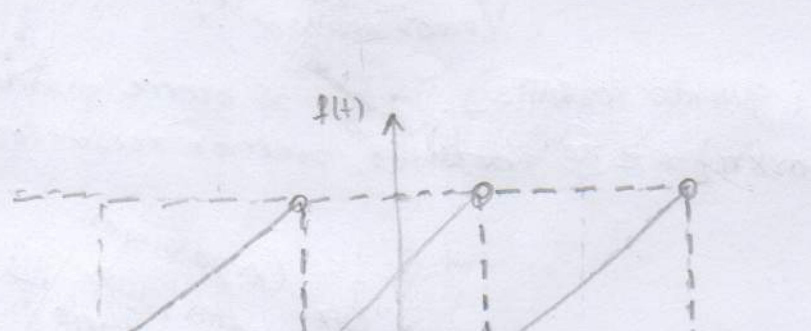
Logo, a série de Fourier será dada por:

$$\boxed{f(x) = \frac{T}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4T}{(2k-1)^2\pi^2} \cdot \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{T}x\right]}$$

Q6. $f(t) = t+\pi$, para $-\pi \leq t < \pi$ e $f(t+2\pi) = f(t)$

(a) O período da função é 2π, já que $f(t) = f(t+2\pi)$

(b)



(c)

Nós podemos escrever a função $f(t)$ como a soma de duas outras funções:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t), \text{ sendo } f_1(t) = t \text{ e } f_2(t) = \pi.$$

Como $f_1(t) = t$ é uma função ímpar, não é necessário que calculemos os coeficientes a_K.

$$b_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t.\sin k\omega t\,dt = \left[\frac{-t\cos k\omega t}{k\omega}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{\cos k\omega t}{k\omega}\right)dt = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{-t\cos k\omega t}{k\omega}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin k\omega t}{(k\omega)^2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\left[\left(\frac{-\pi\cos k\omega\pi}{k\omega}\right) - \left(\frac{\overbrace{\pi\cos(-k\omega\pi)}^{\text{par}}}{k\omega}\right)\right] + \left[\left(\frac{\sin k\omega\pi}{(k\omega)^2}\right) - \left(\frac{\overbrace{\sin(-k\omega\pi)}^{\text{ímpar}}}{(k\omega)^2}\right)\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{2\pi\cos k\omega\pi}{k\omega} + \frac{2\sin k\omega\pi}{(k\omega)^2}\right\}.$$ Como $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$, então:

$$b_K = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi\cos k\pi}{K} + \frac{2\sin k\pi}{k^2}\right).$$ Analisando $\sin k\pi$ é zero $\forall K$. Assim,

$$b_K = \frac{-2\cos k\pi}{k}.$$ Como $\cos k\pi = 1$ quando K é par e $\cos k\pi = -1$ quando K é ímpar, podemos escrever $\cos k\pi = (-1)^k$ $\forall K$, $K \in \mathbb{N}$ e $K \geq 1$. Dessa forma; $b_K = \frac{-2(-1)^k}{k}$ e $f_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^k}{k}\sin kt$

$f_2(t) = \pi$ é uma função constante. Logo, terá somente o coeficiente de Fourier a_0.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\pi t\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2+\pi^2}{2\pi} = \pi \;\therefore\; f_2(t) = \pi$$

Assim, $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \boxed{\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2(-1)^k}{k}\sin kt}$ //

47.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_f x + b_n \sin n\omega_f x$$

$$kf(x) = ka_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ka_n \cos n\omega_f x + kb_n \sin n\omega_f x$$

$$g(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos n\omega_g x + d_n \sin n\omega_g x$$

$$mg(x) = mc_0 + \sum_{n=1}^{\infty} mc_n \cos n\omega_g x + md_n \sin n\omega_g x$$

$$kf(x) + mg(x) = ka_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ka_n \cos n\omega_f x + kb_n \sin n\omega_f x + mc_0 + \sum_{n=1}^{\infty} mc_n \cos n\omega_g x +$$

Se o período $f(x)$ for igual ao período de $g(x)$, então $\omega_f = \omega_g = \omega$.

Logo,

$$kf(x) + mg(x) = (ka_0 + mc_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (ka_n + mc_n) \cdot \cos n\omega x + (kb_n + md_n) \sin n\omega x,$$

ou seja, a função $kf(x)+mg(x)$ tem os seguintes coeficientes de Fourier

$\boxed{ka_0 + mc_0}$, $\boxed{ka_n + mc_n}$, e $\boxed{kb_n + md_n}$, c.q.d