

# Fundamentos de Processamento Gráfico

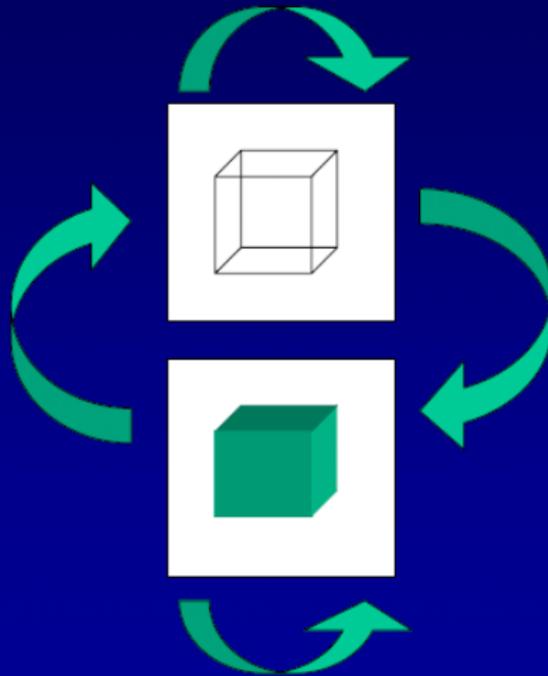
Helton H. BÍscaro ; Fátima Nunes

19 de março de 2018

# Áreas Correlatas

Modelagem Geométrica

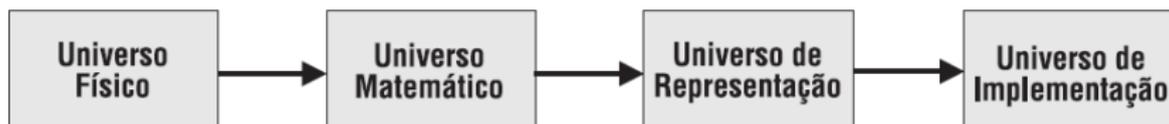
Visão  
Computacional



Computação  
Gráfica

Processamento de Imagens

# Paradigma dos Quatro Universos

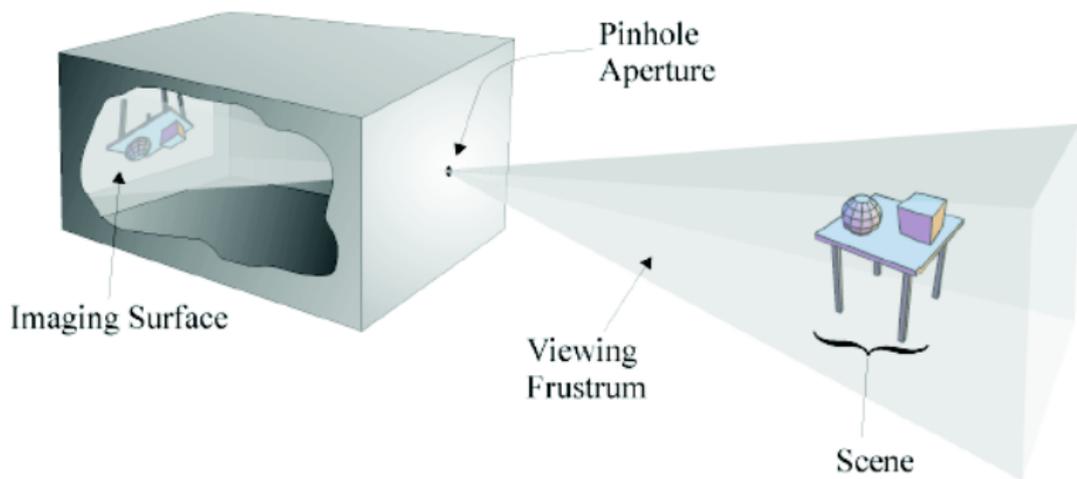


# Paradigma dos Quatro Universos

- **Físico:** Contém objetos do mundo real que pretendemos estudar;
- **Matemático:** Contém uma descrição abstrata dos objetos do universo físico;
- **Representação:** Contém representações simbólicas e finitas associadas aos objetos do universo matemático ;
- **Implementação:** Contém particularidades da linguagem de programação escolhida para a implementação do problema.

# Síntese de imagem

Modelo clássico de câmera de furo



# Geometria

Do grego : **Geo** - “terra ”+ **metria** - “medida ”.

“Ramo da matemática preocupado com questões de forma, tamanho e posição relativa de figuras e com as propriedades dos espaços... ”.

# Geometria

Euclides:

- Considerado o pai da geometria.
- Grego, viveu em 300 AC, e acredita-se que esteve ativo em Alexandria (Egito) durante o reinado de Ptolomeu (323-283 AC).
- **Os Elementos** é o livro mais bem sucedido da história da Matemática.
  - É um tratado geométrico escrito em 13 volumes.
  - Compreende uma coleção de definições, postulados (axiomas), proposições (teoremas e construções), e provas matemáticas das proposições.
  - O 13º livro cobre a geometria Euclideana e uma versão Grega antiga e elementar da teoria dos números.

# Geometria

## Os Elementos

- Impresso pela primeira vez em Veneza em 1482.
  - Foi um dos primeiros trabalhos sobre matemática a ser impresso após a invenção da imprensa, perdendo apenas para a bíblia, quanto ao número de edições (mais de 1.000).
- Foi usado como texto básico de geometria no mundo Ocidental por cerca de 2.000 anos.

# Geometria

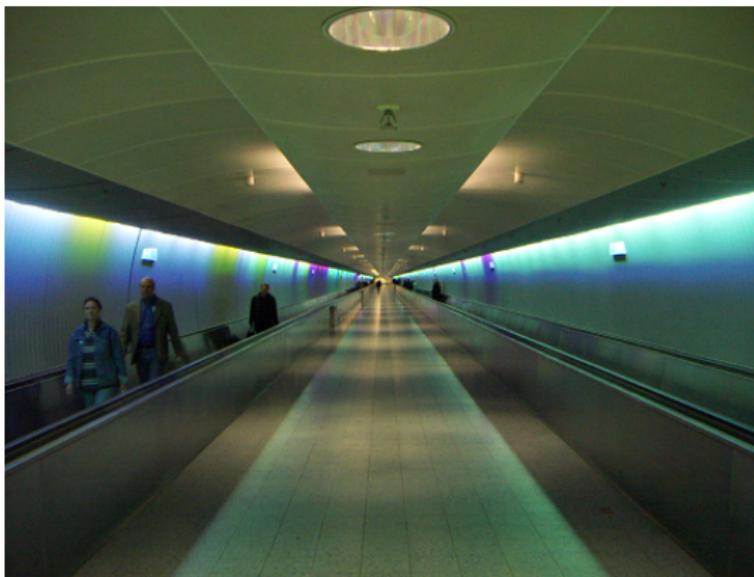
- Representação eficiente de objetos (coordenadas);
- Transformações necessárias à manipulação dos mesmos;
  - Operações de Posicionamento;
  - Operações de modelagem;
  - Operações de Visualização.

# Geometria

- **Operações de Posicionamento:** As transformações Euclidianas são operações básicas de posicionamento e movimento de objetos geométricos num cenário 2D ou 3D;
- **Operações de Modelagem:**
  - As transformações afins são operações básicas de modelagem de objetos geométricos num cenário 2D ou 3D;
  - Permitem a definição de um objeto no seu próprio sistema de coordenadas locais (modeling coordinates)
  - Permite usar a definição de um objeto várias vezes numa cena com um sistema de coordenadas globais (world coordinates)
- **Operações de Visualização:** Permitem montar um cenário que envolve o observador, o plano de projeção e a cena (os vários objetos da cena)

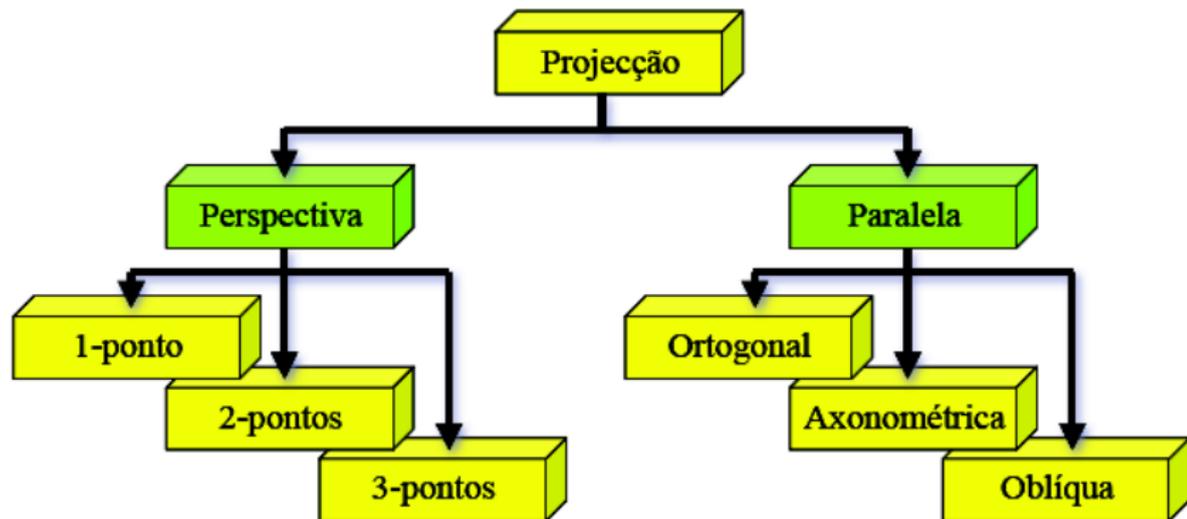
# Projeções

Transformações de visualização via de regra não preservam paralelismo



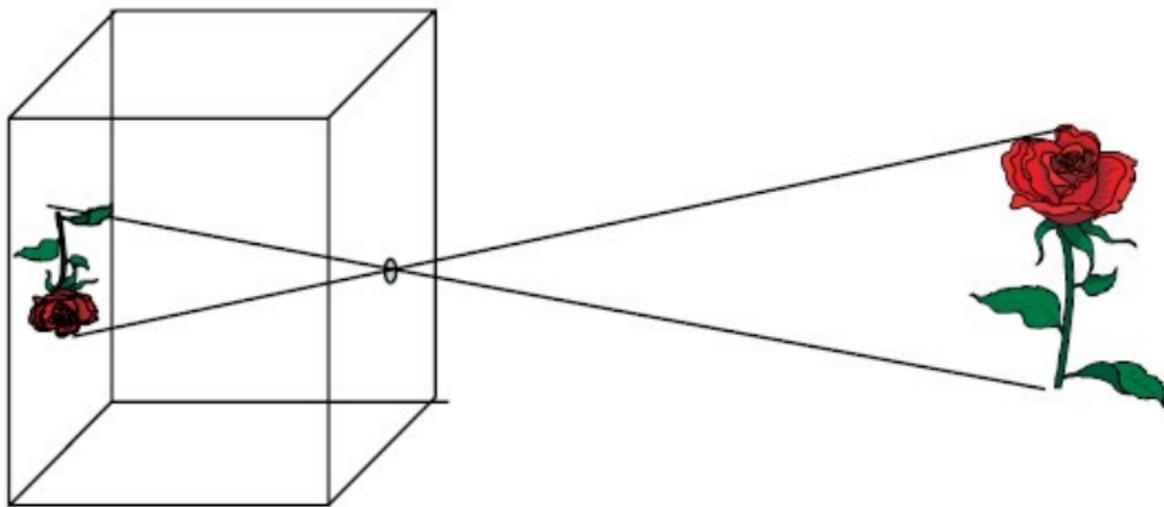
# Projeções

## Tipos de projeções



# Exemplo

## Câmera Digital



Modelo de Câmera de furo com projeção perspectiva.

# Geometrias não Euclidianas

## O quinto postulado

“Por um ponto exterior a uma reta dada, pode ser traçada uma única reta paralela...”

- Durante séculos se tentou deduzir este axioma, a partir dos outros axiomas.
- **Pergunta:** pode-se construir uma geometria sem o quinto axioma?
- Várias tentativas foram feitas, mas até o meio do século 19, o pensamento matemático não estava maduro o suficiente.
- Diferentes geometrias (não Euclidianas) foram criadas baseadas na negação do quinto axioma:
- Por exemplo: A geometria Hiperbólica admite uma infinidade de retas paralelas.

# Geometrias não Euclidianas

## O quinto postulado

“Por um ponto exterior a uma reta dada, pode ser traçada uma única reta paralela...”

- Durante séculos se tentou deduzir este axioma, a partir dos outros axiomas.
- **Pergunta:** pode-se construir uma geometria sem o quinto axioma?
- Várias tentativas foram feitas, mas até o meio do século 19, o pensamento matemático não estava maduro o suficiente.
- Diferentes geometrias (não Euclidianas) foram criadas baseadas na negação do quinto axioma:
- Por exemplo: A geometria Hiperbólica admite uma infinidade de retas paralelas.

# Geometrias não Euclidianas

## O quinto postulado

“Por um ponto exterior a uma reta dada, pode ser traçada uma única reta paralela...”

- Durante séculos se tentou deduzir este axioma, a partir dos outros axiomas.
- **Pergunta:** pode-se construir uma geometria sem o quinto axioma?
- Várias tentativas foram feitas, mas até o meio do século 19, o pensamento matemático não estava maduro o suficiente.
- Diferentes geometrias (não Euclidianas) foram criadas baseadas na negação do quinto axioma:
- Por exemplo: A geometria Hiperbólica admite uma infinidade de retas paralelas.

# Geometrias não Euclidianas

## O quinto postulado

“Por um ponto exterior a uma reta dada, pode ser traçada uma única reta paralela...”

- Durante séculos se tentou deduzir este axioma, a partir dos outros axiomas.
- **Pergunta:** pode-se construir uma geometria sem o quinto axioma?
- Várias tentativas foram feitas, mas até o meio do século 19, o pensamento matemático não estava maduro o suficiente.
- Diferentes geometrias (não Euclidianas) foram criadas baseadas na negação do quinto axioma:
- Por exemplo: A geometria Hiperbólica admite uma infinidade de retas paralelas.

# Geometrias não Euclidianas

## O quinto postulado

“Por um ponto exterior a uma reta dada, pode ser traçada uma única reta paralela...”

- Durante séculos se tentou deduzir este axioma, a partir dos outros axiomas.
- **Pergunta:** pode-se construir uma geometria sem o quinto axioma?
- Várias tentativas foram feitas, mas até o meio do século 19, o pensamento matemático não estava maduro o suficiente.
- Diferentes geometrias (não Euclidianas) foram criadas baseadas na negação do quinto axioma:
- Por exemplo: A geometria Hiperbólica admite uma infinidade de retas paralelas.

# Geometrias não Euclidianas

## O quinto postulado

“Por um ponto exterior a uma reta dada, pode ser traçada uma única reta paralela...”

- Durante séculos se tentou deduzir este axioma, a partir dos outros axiomas.
- **Pergunta:** pode-se construir uma geometria sem o quinto axioma?
- Várias tentativas foram feitas, mas até o meio do século 19, o pensamento matemático não estava maduro o suficiente.
- Diferentes geometrias (não Euclidianas) foram criadas baseadas na negação do quinto axioma:
- Por exemplo: A geometria Hiperbólica admite uma infinidade de retas paralelas.

# Projeção Perspectiva

- Do latim **perspicere**, ou “ver através”, é uma representação aproximada de uma imagem, como percebida pelo olho, sobre uma superfície plana.
- Objetos são desenhados menores a medida que a distância aumenta.
- As dimensões de um objeto ao longo da linha de visão são relativamente menores que as dimensões perpendiculares à linha de visão.

# Projeção Perspectiva

## Histórico

- Na idade Média, arte era para ser lida como um grupo de símbolos, ao invés de ser vista como uma figura coerente.
  - O único método de retratar distâncias era por sobreposição de personagens.
- Sobreposição é um método ruim para retratar arquitetura.
- Pinturas medievais de cidades são um amontoado de linhas em todas as direções.

# Exemplo

Ausência de perspectiva



Ilustração de “A Batalha - Crusader Bible - 1240”

# Projeção Perspectiva

## Histórico

- Em 1415, **Filippo Brunelleschi** demonstrou o método geométrico da perspectiva, usado atualmente pelos artistas, pintando esboços de vários prédios Florentinos sobre um espelho
- Logo após, quase todo artista em Florença usava perspectiva geométrica nas suas pinturas, notadamente **Donatello**, que começou a esculpir pisos quadriculados elaborados.

# Exemplo



Anunciação, de Botticelli (1489-1490)

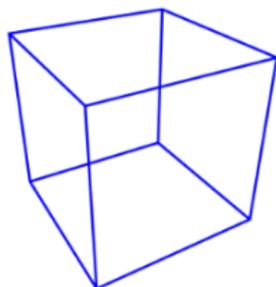
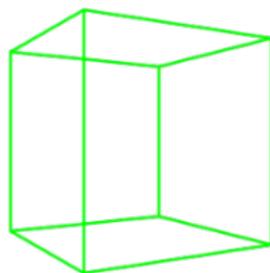
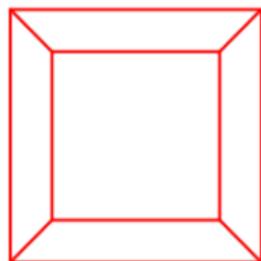
## Exemplo



Afresco da Capela Cistina (1481-1482)

# Exemplo

Perspectivas com 1, 2 e 3 pontos de fuga...



# Moral da História...

- Transformações Lineares preservam paralelismo.
- Transformação perspectiva **NÃO** é linear
- Visão humana funciona com uma câmera.
- Câmera virtual precisa de um modelo de geometria distinto da Euclideana.

# Geometria Projetiva

O espaço projetivo real de dimensão  $n$ ,  $RP^n$  é o conjunto de todas as retas em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que passam pela origem, excluindo a origem.

Um ponto projetivo  $p \in RP^n$  é uma classe de equivalência.

$$p = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, \lambda x_{n+1}), \lambda \neq 0$$

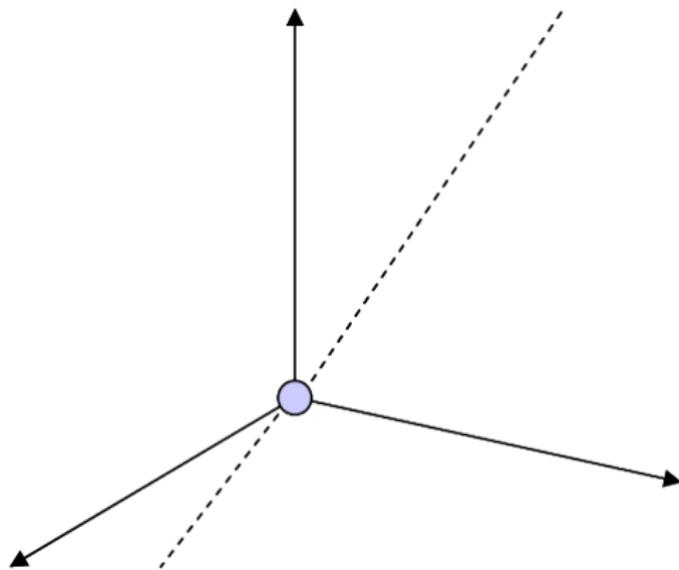
Ou Seja:

$$p = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \equiv \lambda p$$

# Geometria Projetiva

Associa-se o espaço  $RP^n$  com o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^{n+1}$

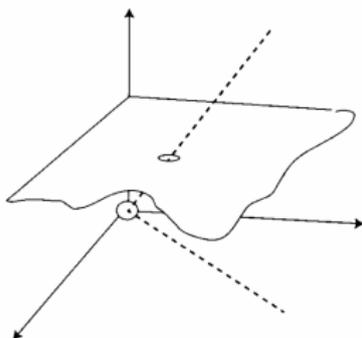
$$RP^n \leftarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{(0, 0, \dots, 0)\}$$



# Geometria Projetiva

O espaço projetivo pode ser decomposto em dois conjuntos: o hiperplano de  $\mathbb{R}^{n+1}$  onde  $x_{n+1} = 1$  e o hiperplano em que  $x_{n+1} = 0$ . Em outras palavras:

$$RP^n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}), x_{n+1} \neq 0\} \cup \{(x_1, \dots, x_n, 0)\}$$



# Geometria Projetiva

- Pontos Afins:

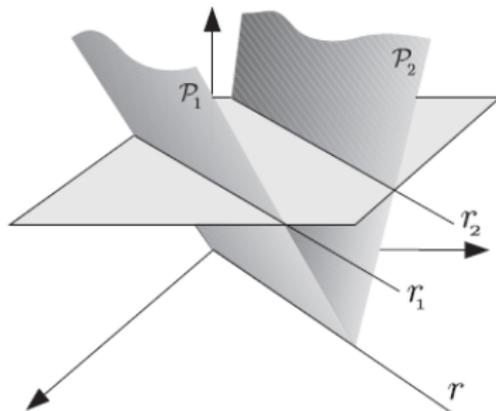
$$p_a = (x_1, \dots, x_n, 1), x_{n+1} \neq 0, \lambda = \frac{1}{x_{n+1}} \quad (\text{Coordenadas Homogêneas})$$

- Pontos do Infinito , ou Pontos Ideais

$$p_i = (x_1, \dots, x_n, 0), x_{n+1} = 0, \lambda = 1$$

OBS: Uma reta no plano projetivo  $RP^2$  é o conjunto dos pontos  $[x; y; z]$  que satisfazem a uma equação linear  $ax + by + cz = 0$

## Paralelismo no Espaço Projetivo



# Transformações Projetivas em $RP^3$

Uma Transformação Projetiva em  $RP^3$  é uma Transformação Linear em  $\mathbb{R}^4$

$$T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$T$  pode ser representada por uma matriz  $M_{4 \times 4}$  e pode ser avaliada como

$$T(p) = Mp.$$

# Anatomia de uma Transformação Projetiva

Podemos dividir a Matriz  $M$  em quatro blocos distintos:

$$M = \begin{bmatrix} A & T \\ P & S \end{bmatrix}$$

- $A$ - Bloco Linear  $3 \times 3$ ;
- $T$ - Bloco de Translação  $3 \times 1$ ;
- $P$ - Bloco de Perspectiva  $1 \times 3$ ;
- $S$ - Bloco de Escala  $1 \times 1$ ;

# Anatomia de uma Transformação Projetiva

## Matriz de Translação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta_x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta_y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \Delta_x \\ y + \Delta_y \\ z + \Delta_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Anatomia de uma Transformação Projetiva

Matriz de Transformação Linear

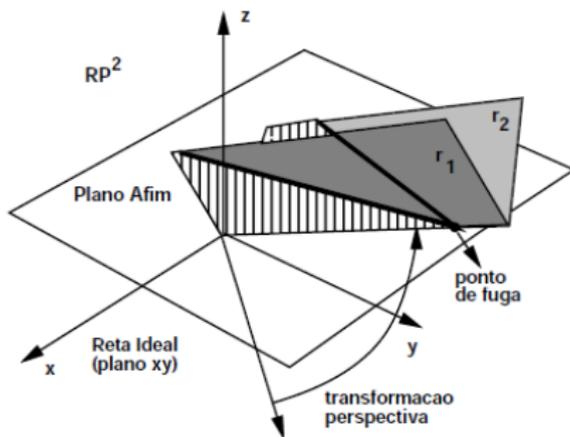
$$\begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Anatomia de uma Transformação Projetiva

## Matriz de Transformação Perspectiva

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p & q & r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ px + qy + rz + 1 \end{bmatrix}$$

## Exemplo



Efeito da transformação perspectiva

# Anatomia de uma Transformação Projetiva

## Matriz de Escala

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{bmatrix}$$

# Rotações em $RP^3$

Rotação em torno do eixo  $z$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação em torno do eixo  $y$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

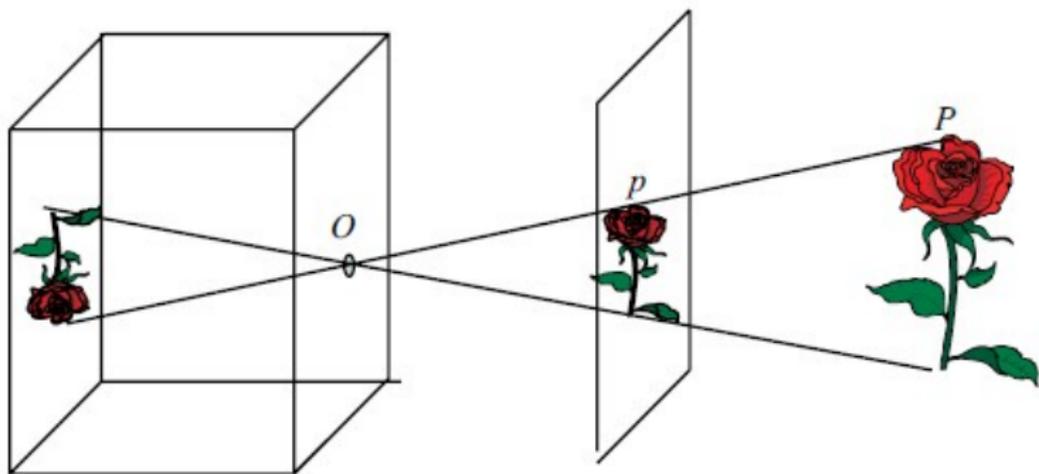
Rotação em torno do eixo  $x$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Modelo de Câmera Virtual

Um ponto de fuga

## Câmera Digital



Modelo de Câmera de furo com projeção perspectiva.

# Modelo de Câmera Virtual

Dados:

- Um centro ótico  $O$ .
- um plano de projeção  $\pi$  a uma distância  $f$  de  $O$ .
- Um sistema de coordenadas cuja origem esteja em  $O$  e que tenha os eixos perpendiculares a  $\pi$ .

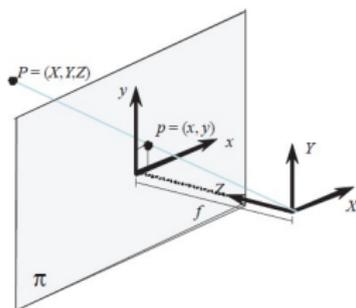


Figura: Determinação da projeção perspectiva

# Modelo de Câmera Virtual

Neste sistema, se  $P = (X, Y, Z)$ :

- A reta passando por  $P$  é  $\alpha(X, Y, Z)$ .
- O ponto que está em  $\pi$  tem última coordenada  $f$ , logo: .
- $\alpha = \frac{f}{Z}$ ,  $x = \frac{fX}{Z}$ ,  $y = \frac{fY}{Z}$ .

**OBS:** Esta operação não está definida para os pontos tais que  $Z = 0$ .

# Modelo de Câmera Virtual

Exemplo: retas paralelas ao eixo  $Z \longrightarrow \{(X_0, Y_0, Z)/Z \in \mathbb{R}\}$

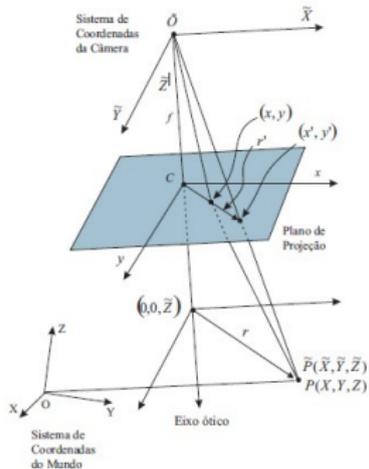
- A projeção de um ponto genérico  $(X_0, Y_0, Z_0)$  dessas retas é dado por  $(\frac{fX_0}{Z_0}, \frac{fY_0}{Z_0})$ .
- A projeção para o ponto  $(X_0, Y_0, 0)$  não está definida .
- O conjunto de todos esses pontos formam uma reta que passa por  $(0, 0)$ , com esse ponto excluído.
- O ponto  $(0, 0, 0)$  pode ser visto como “ponto no infinito”.

# Sistemas de Coordenadas

- 1 Sistemas de Coordenadas do Mundo (SCM)
- 2 Sistemas de Coordenadas de Câmera (SCC)
- 3 Sistemas de Coordenadas de Imagem (SCI)
- 4 Sistemas de coordenadas de Pixel (SCP)

# Transformações de Câmera

## Sistemas de coordenadas



# Transformações de Câmera

Do SCM ao SCC, Mudança de referencial.

Dados  $(X, Y, Z)$  no SCM, devemos expressar essas coordenadas no SCC.

Seja  $T$  o vetor que fornece a origem  $O$  do mundo no SCC.

Seja  $R$  a matriz cujas colunas  $r_1, r_2$  e  $r_3$  são as coordenadas dos vetores  $i, j$  e  $k$  dos eixos do SCM com relação a base  $\tilde{i}, \tilde{j}$  e  $\tilde{k}$  dos eixos do SCC.

# Transformações de Câmera

Do SCM ao SCC, Mudança de referencial.

$$(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = T + Xr_1 + Yr_2 + Zr_3; \text{ ou}$$

$$\tilde{P} = RP + T;$$

Ou ainda em coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Transformações de Câmera

Do SCM ao SCC, Mudança de referencial (**forma de Rodriguez**).

$w = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$  representa a direção do eixo de rotação e o ângulo de em torno

deste eixo (através de sua norma)

matriz de rotação  $R$  associada a  $w$  é dada por:

$$R = \cos(\theta)I + \frac{\text{sen}(\theta)}{\theta} [w]_x + \frac{(1 - \cos[\theta])}{\theta^2} ww^t \quad (1)$$

Onde  $\theta = \|w\|$  e  $[w]_x = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}$ .

# Transformações de Câmera

Do SCM ao SCC, Mudança de referencial .

Outras formas de se obter a matriz  $R$ :

- 1 Ângulos de Euler: ou seja dos ângulos sucessivos de rotação em torno dos eixos.
- 2 Quaternions: generalização de números complexos para  $\mathbb{R}^3$

# Transformações de Câmera

Do SCC ao SCI, Projeção Perspectiva.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Essa Transformação não é inversível.

# Transformações de Câmera

Do SCI ao SCP, Registro no Sensor.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & \tau & u_c \\ 0 & s_y & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $s_x$  e  $s_y$  representam o número de pixels por unidade de comprimento, nas direções horizontal;
- $u_c$  e  $v_c$  fornecem a posição, em pixels, da projeção ortogonal  $C$  da origem sobre o plano de projeção; na maior parte das câmeras,  $C$  está no centro da imagem e os valores de  $u_c$  e  $v_c$  são idealmente iguais à metade das dimensões da imagem;
- $\tau$  é a tangente do ângulo que as colunas de pixels formam com a perpendicular às linhas; (Idealmente 0)

# Transformações de Câmera

Compondo as Transformações.

$$[p] \approx \begin{bmatrix} s_x & \tau & u_c \\ 0 & s_y & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [P];$$

ou ainda

$$[p] \approx \begin{bmatrix} fs_x & f\tau & u_c \\ 0 & fs_y & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [R \ T] [P]$$

# Transformações de Câmera

## Exercícios.

- 1) Continuar a implementação do programa de processamento de imagens da aula anterior: implementar o filtro passa-alta e mais dois métodos de detecção de bordas (você pode escolher). Devem ser entregues em um arquivo PDF: o programa fonte e um exemplo de imagem processada (incluir imagem original e imagem resultante) para cada um dos três métodos implementados
- 2) Encontre as transformações de visualização de um sistema cuja câmera está posicionada na posição  $(3, 3, 3)$ , o plano de projeção é definido pelo ponto  $(1, 1, 1)$  e pelo vetor  $(-1, -1, -1)$  e o espaço de imagem é definido por um quadrado de lado 20 centrado na origem do plano de projeção.<sup>1</sup>
- 3) Considere este mesmo modelo de câmera e ainda  $s_x = s_y = 1$ ,  $u_c = 600$  e  $v_c = 400$  e encontre as coordenadas da projeção do ponto  $(0, 0.5, 0.5) \in \mathbb{R}^3$
- 4) Descreva como fica a transformação projetiva com mais de um ponto de fuga.

<sup>1</sup>DICA: Use ângulos de Euler para determinar a matriz de rotação  $R$ .

FIMM