Programa de Pós-Graduação em Eng Mecânica – PPGEM

PME-5015 - Tópicos da Teoria da Elasticidade

3ª Lista de Exercícios – Estudo das Deformações

1) A figura abaixo ilustra uma chapa de aço submetida a um estado uniforme de tensões, todas expressas em MPa. Considere que o estado tensional é o mesmo em todos os pontos da chapa (ou seja, trata-se de um estado uniforme de tensões) e considere também válidas as hipóteses de homogeneidade, isotropia e de comportamento elástico-linear do material (sendo as constantes elásticas do material E = 200 GPa e ν= 0,3). Determine:

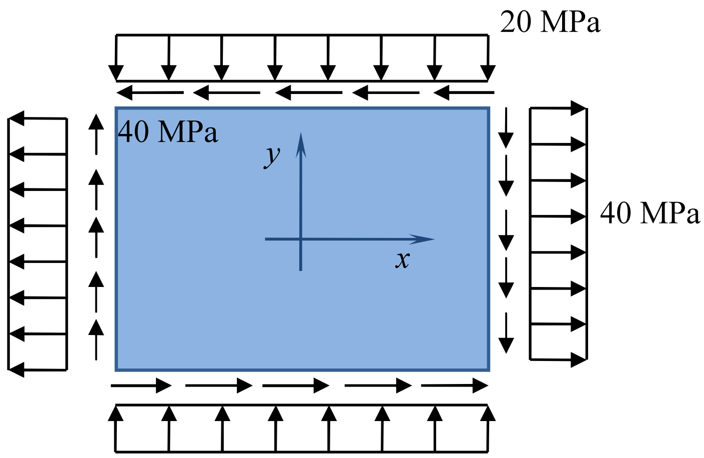
a) o tensor das tensões na base $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$;

b) o correspondente tensor das deformações na mesma base $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$;;

c) as tensões principais e as direções principais de tensão;

d) as deformações principais e as direções principais de deformação, obtidas a partir do cálculo dos auto-valores e auto-vetores do tensor das deformações indicado no item (b) (verifique que, neste caso, as direções principais de tensão e de deformação são as mesmas);

e) verifique que, alternativamente, as deformações principais podem ser obtidas diretamente a partir das tensões principais e da Lei de Hooke.



2) Considere que num dado ponto P de um sólido deformável o estado de deformações seja dado pelo seguinte tensor das deformações:

$$[E]_b = \begin{bmatrix} 0{,}0003 & 0 & -0{,}0003 \\ 0 & 0{,}00004 & 0 \\ -0{,}0003 & 0 & 0{,}0002 \end{bmatrix}$$

Pede-se:

a) determinar a magnitude e a direção de ocorrência do maior alongamento em valor algébrico;

b) o alongamento (local) da fibra que passa por este ponto e cujo versor tangente (no ponto), na configuração inicial é: $\vec{n} = (0{,}6;\ \ 0;\ \ 0{,}8)_b$;

c) a magnitude da máxima distorção que a fibra mencionada em (b) poderá ter com outras que, na configuração inicial, são ortogonais a ela;

d) a máxima distorção possível, considerando todas as possibilidades de fibras que passam pelo ponto P e que, na configuração inicial, são ortogonais entre si;

e) as direções das fibras cuja distorção é indicada em (d).

3) Lembrando que o alongamento ε_m é definido (para valores não-nulos de m) por:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{m}.\left(\lambda^m - 1\right),$$

pede-se:

a) obter a relação $\varepsilon_m = \varepsilon_m(\varepsilon)$, onde ε é o alongamento linear (obtido para m = 1);

b) faça a expansão em série de Taylor da relação obtida no item (a), considerando apenas os três primeiros termos da série (termo constante, linear e quadrático), ou seja, desprezando os termos iguais ou superiores à ordem $O(\varepsilon^3)$;

c) determine, a partir da aproximação obtida no item (b), qual seria o maior erro relativo (dado por $(\varepsilon_m - \varepsilon)/\varepsilon$), se considerarmos que $|m| < 2$ e que $|\varepsilon| < 1\%$.

4) Determine o vetor-deformação ($\vec{\delta}$) e suas componentes ($\varepsilon.\vec{n}$ e $(\gamma/2).\vec{t}$) para o ponto P do sólido cujo tensor das deformações é o indicado no ex.2 e para as fibras cujos versores tangentes em P, escritas na base b = $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, são dadas por:

a) $\vec{n} = \left(\sqrt{3}/3,\ \sqrt{3}/3,\ \sqrt{3}/3\right)_b$ e b) $\vec{n} = \left(\sqrt{2}/2,\ \text{-}\sqrt{2}/2,\ 0\right)_b$.

5) Considere que o tensor das deformações em um dado ponto P de um sólido deformável, expresso na base formada pelas direções principais de deformação $b=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, é dado por:

$$[E]_b=\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{bmatrix}$$

Mostre que a distorção, em valor absoluto, entre as fibras que passam pelo ponto, e cujos versores tangentes em P formam ângulos iguais com as direções principais de deformação, é dada por:

$$|\gamma|=\varepsilon_1-\varepsilon_3$$

6) Seja o tensor das deformações de Green num determinado ponto P do sólido dado por:

$$[E]_b=\begin{bmatrix}0{,}3 & 0 & -0{,}1\\ 0 & 0{,}4 & 0\\ -0{,}1 & 0 & 0{,}2\end{bmatrix}$$

a) determine o alongamento quadrático da fibra que passa pelo ponto e cujo versor tangente na configuração inicial é dado por: $\vec{n}=(\sqrt{2}/2,\ 0,\ \sqrt{2}/2)$;

b) determine o alongamento linear correspondente à fibra dada no item (a) e compare-o com o valor do alongamento quadrático obtido no item anterior;

c) obtenha a distorção entre as fibras que passam pelo ponto e cujos versores tangentes, antes da deformação, são dados por: $\vec{n}=(\sqrt{2}/2,\ 0,\ \sqrt{2}/2)$ e $\vec{m}=(-\sqrt{2}/2,\ 0,\ \sqrt{2}/2)$;

d) verifique o erro cometido se, para o cálculo acima, fosse utilizada a aproximação (válida apenas para o caso de pequenas deformações) dada por: $\gamma\cong 2.\{\vec{m}\}^t.[E].\{\vec{n}\}$.

7) Numa deformação homogênea (ver item 80 do livro-texto), o campo de deslocamentos dos pontos do sólido é dado pela seguinte relação:

$$\begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$$

onde $\vec{r}=(x,y,z)_b$ representa o vetor-posição de um dado ponto do sólido na configuração inicial (não-deformada) do mesmo e a_{ij} são constantes. Pede-se:

a) determinar a relação entre a matriz (constante) $A = [a_{ij}]$ e o gradiente dos deslocamentos, $[L]$, dos pontos do sólido;

b) mostre que, neste caso, linhas retas antes da deformação permanecem retas após a deformação;

c) mostre que, neste caso, seções planas antes da deformação permanecem planas após a deformação;

d) mostre que, neste caso, o alongamento (local) de uma fibra passando por um ponto do sólido segundo uma dada direção será sempre o mesmo (ou seja, independe do ponto tomado);

e) mostre que, neste caso, a distorção (local) segundo duas direções inicialmente ortogonais será sempre a mesma para todos os pontos do sólido (uma vez fixadas as direções).

8) Considere a deformação homogênea num sólido deformável dada por:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}05 & -0{,}1 \\ 0{,}03 & -0{,}10 & -0{,}02 \\ 0{,}003 & -0{,}2 & 0{,}03 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Pede-se obter a equação do plano (na configuração deformada) que, na configuração inicial (não-deformada), coincide com o plano *Oxy*.

9) As relações deformações-deslocamentos em coordenadas cartesianas e em condições de linearidade geométrica são dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

Nas mesmas condições (ou seja, considerando linearidade geométrica), mostra-se que as relações análogas em coordenadas cilíndricas são dadas por:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}.\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}.\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \qquad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \qquad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}.\frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$

Pede-se: Obter a segunda das relações deformações-deslocamentos em coordenadas cilíndricas (ε_θ), utilizando para tanto as relações deformações-deslocamentos expressas em coordenadas cartesianas e as relações de transformação de deformação entre os dois sistemas de coordenadas.

10) Novamente considerando condições de linearidade geométrica, é possível mostrar que as relações deformações-deslocamentos em coordenadas esféricas são dadas por:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r}.\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{r}.\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r.\operatorname{sen}\varphi}.\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r.sen\varphi}.\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r}.\text{cotg}\varphi + \frac{u_r}{r} \qquad \gamma_{\varphi\theta} = \frac{1}{r.\operatorname{sen}\varphi}.\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r}.\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta}{r}.\text{cotg}\varphi$$

Pede-se: Obter a primeira das relações deformações-deslocamentos em coordenadas esféricas (ε_r), utilizando para tanto as relações deformações-deslocamentos expressas em coordenadas cartesianas e as relações de transformação de deformação entre os dois sistemas de coordenadas.