

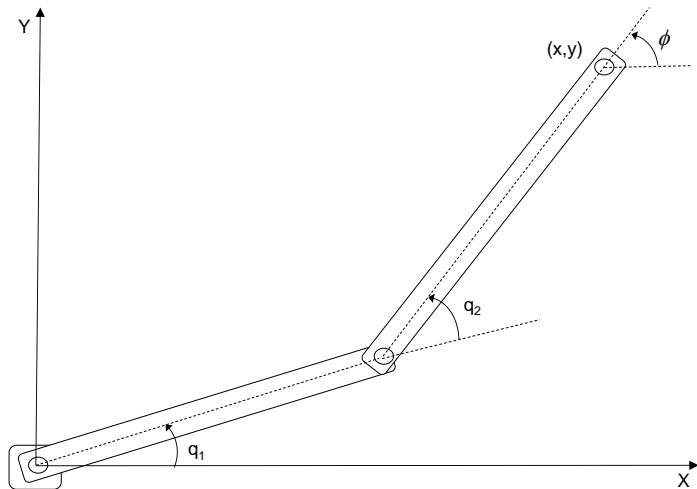
Aula 1 - Revisão de Cinemática, Dinâmica e Propriedades das Matrizes Dinâmicas

SEM5875 - Controle de Sistemas Robóticos

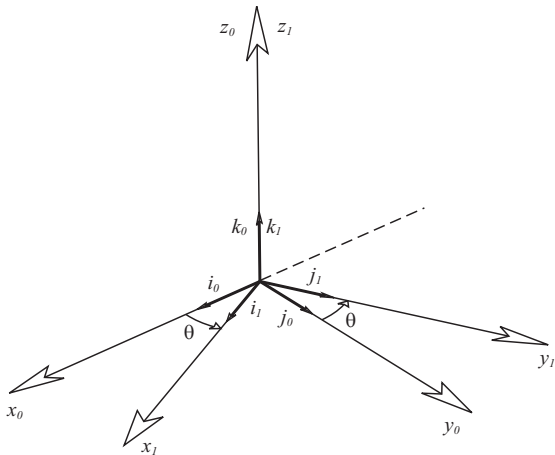
Universidade de São Paulo

Adriano A. G. Siqueira
Thiago Boaventura Cunha

Manipulador Planar de 2 Elos



Matrizes de Rotação Básicas



- Então

$$R_0^1 = R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

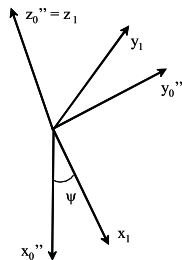
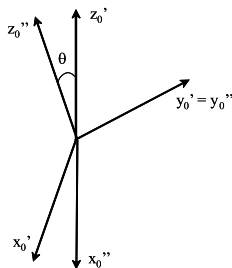
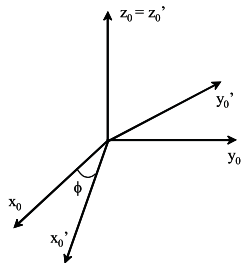
- Rotações básicas em torno dos eixos x e y são dadas por

$$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler

- (ϕ, θ, ψ) - três variáveis independentes.
- Rotação em torno de z_0 pelo ângulo ϕ
- Rotação em torno de y_0' pelo ângulo θ
- Rotação em torno de z_0'' pelo ângulo ψ

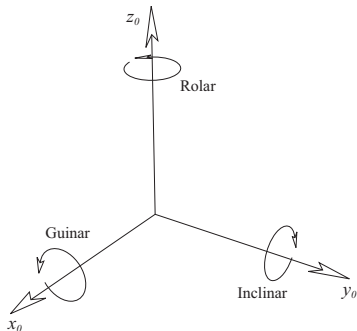


- Matriz de rotação

$$\begin{aligned} R_{z_0, \phi} R_{y'_0, \theta} R_{z''_0, \psi} &= \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi + c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ângulos de Roll, Pitch e Yaw

- Rotações em torno dos eixos coordenados x_0, y_0, z_0
- Rotação em torno de x_0 pelo ângulo ψ , movimento de yaw
- Rotação em torno de y_0 pelo ângulo θ , movimento de pitch
- Rotação em torno de z_0 pelo ângulo ϕ , movimento de roll



Ângulos de Roll, Pitch e Yaw

- Matriz de rotação

$$R_{z_0, \phi} R_{y_0, \theta} R_{x_0, \psi} = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\psi & -s_\psi \\ 0 & s_\psi & c_\psi \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta & -s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi \\ s_\phi c_\theta & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

Transformações Homogêneas

- Transformação homogênea

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} R_0^1 & \mathbf{d}_0^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

- A transformação homogênea mais geral

$$H = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & \mathbf{d}_{3 \times 1} \\ \mathbf{f}_{1 \times 3} & s_{1 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textit{Rotacao} & \textit{Translacao} \\ \textit{perspectiva} & \textit{fator de escala} \end{bmatrix}$$

utilizada para a interface de um sistema de visão ou para simulação gráfica.

Transformações Homogêneas

- **Exemplo:** Rotação de α graus em torno de x_0
- Translação de a unidades ao longo do eixo x_0
- Translação de d unidades ao longo do eixo z_0
- Rotação de θ graus em torno de z_0

$$H = Rot_{z_0, \theta} Trans_{z_0, d} Trans_{x_0, a} Rot_{x_0, \alpha}$$
$$= \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta c_\alpha & s_\theta s_\alpha & a c_\theta \\ s_\theta & c_\theta c_\alpha & -c_\theta s_\alpha & a s_\theta \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dado: variáveis das juntas (ângulos ou deslocamentos)
- Procurado: posição e orientação do efetuador
- Transformação homogênea entre os sistemas de coordenadas da base (0) e do efetuador (n)

$$T_0^n = \begin{bmatrix} R_0^n & \mathbf{d}_0^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_0 & \mathbf{s}_0 & \mathbf{a}_0 & \mathbf{d}_0^n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & d_x \\ n_y & s_y & a_y & d_y \\ n_z & s_z & a_z & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Representação Denavit-Hartenberg

- Defina o eixo z_i ao longo do eixo da junta $i + 1$. O eixo z_n é definido na direção do eixo z_{n-1} se a junta n é rotacional.
- Defina O_0 no eixo z_0 e x_0 convenientemente.
- Para $i = 1, \dots, n - 1$:
 - Posicionar a origem O_i onde a normal comum a z_i e z_{i-1} intersecta z_i . Se z_i intersecta z_{i-1} posicionar O_i nesta intersecção. Se z_i e z_{i-1} são paralelos, posicionar O_i na junta $i + 1$.
 - Defina x_i ao longo da normal comum a z_i e z_{i-1} com direção da junta i para $i + 1$, ou na direção normal ao plano $z_{i-1} - z_i$ se z_{i-1} e z_i se intersectam.
- Defina O_n convenientemente ao longo do eixo z_n (no centro da garra) e x_n normal ao eixo $z_n - 1$.
- Escolha y_i para completar a “regra da mão direita”

Representação Denavit-Hartenberg

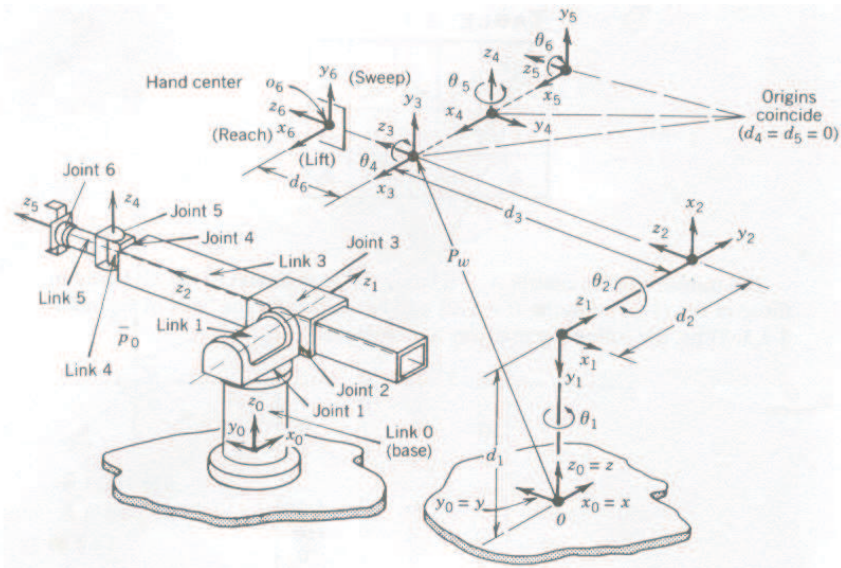
- Criar uma tabela dos parâmetros dos elos, a_i , d_i , α_i e θ_i .
 - a_i = distância ao longo de x_i da intersecção dos eixos x_i e z_{i-1} até O_i .
 - d_i = distância ao longo z_{i-1} de O_{i-1} até a intersecção dos eixos x_i e z_{i-1} . d_i é variável se a junta i é prismática.
 - α_i = o ângulo entre z_{i-1} e z_i medido em torno de x_i .
 - θ_i = o ângulo entre x_{i-1} e x_i medido em torno de z_{i-1} . θ_i é variável se a junta i é rotativa.
- Calcular as matrizes de transformação homogêneas H_{i-1}^i substituindo os parâmetros acima em (1).
- Calcular $T_0^n = H_0^1 \cdots H_{n-1}^n$.

- Transformação homogênea entre os sistemas de coordenadas i e $i - 1$

$$H_{i-1}^i = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

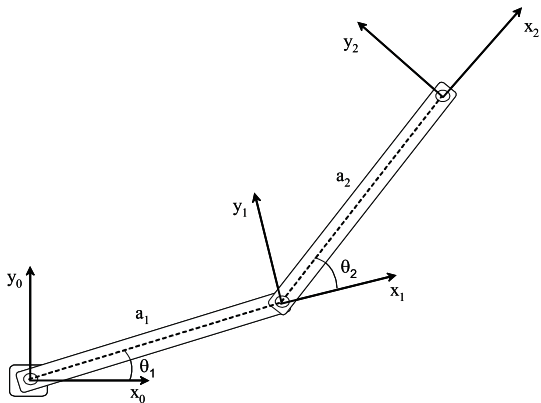
sendo θ_i , a_i , d_i , α_i parâmetros do elo i e junta i .

Exemplo: Stanford



Exemplo

- Considere um manipulador planar de dois elos.



- Parâmetros de D-H:

Elo	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2

- Matrizes homogêneas

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matriz de transformação homogênea T_0^2 :

$$T_0^2 = H_0^1 H_1^2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- As seguintes relações trigonométricas são utilizadas:

$$c_{12} = c_1 c_2 - s_1 s_2 \text{ e } s_{12} = s_1 c_2 + s_2 c_1.$$

- Posição da origem O_2 :

$$d_x = a_1 c_1 + a_2 c_{12}$$

$$d_y = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

- Orientação: $\phi = \theta_1 + \theta_2$.

Espaços das juntas e das posições

- Espaço das juntas:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad \begin{cases} q_i = \theta_i, \text{ para junta rotacional} \\ q_i = d_i, \text{ para junta prismática} \end{cases}$$

- Espaço das posições e orientações: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0^n \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$

- Cinemática direta: $\mathbf{x} = f(\mathbf{q})$

- Dado: posição e orientação do efetuador
- Procurado: variáveis das juntas (ângulos ou deslocamentos)
- Funções não lineares
- Múltiplas soluções
- Pode ser que não existam soluções admissíveis.
- Soluções analíticas
 - + pouco tempo de cálculo
 - – aplicáveis para um único tipo de robô
 - – não existe procedimento padrão
- Soluções numéricas iterativas
 - + aplicáveis para robôs diferentes
 - – não apropriadas para aplicações em tempo real
 - – problemas de convergência nas proximidades de singularidades

- Considere o manipulador de dois elos

$$d_x = a_1 c_1 + a_2 c_{12}$$

$$d_y = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

- Elevando ao quadrado as duas equações e somando

$$d_x^2 + d_y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 c_2$$

- Então

$$c_2 = \frac{d_x^2 + d_y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1 a_2}$$

- Existência de solução: $-1 \leq c_2 \leq 1 \Rightarrow$ fora do espaço de trabalho

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}$$

- O sinal está relacionado com as duas possibilidades de valor para θ_2

$$\theta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2)$$

$$\gamma = \text{atan2}(n, d) = \begin{cases} \text{indefinido para } n = d = 0 \\ 90^\circ \text{ para } n > 0 \text{ e } d = 0 \\ -90^\circ \text{ para } n < 0 \text{ e } d = 0 \\ 0^\circ \leq \gamma < 90^\circ \text{ para } n \geq 0 \text{ e } d > 0 \\ 90^\circ \leq \gamma < 180^\circ \text{ para } n \geq 0 \text{ e } d < 0 \\ -180^\circ \leq \gamma < -90^\circ \text{ para } n \leq 0 \text{ e } d < 0 \\ -90^\circ \leq \gamma < 0^\circ \text{ para } n \leq 0 \text{ e } d > 0 \end{cases}$$

- Substituindo θ_2 nas equações

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2)d_y - a_2 s_2 d_x}{d_x^2 + d_y^2}$$

$$c_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2)d_x + a_2 s_2 d_y}{d_x^2 + d_y^2}$$

- Portanto $\theta_1 = \text{atan2}(s_1, c_1)$
- Se a orientação, $\phi = \theta_1 + \theta_2$, é dada \Rightarrow única solução

Ângulos de Euler

- (ϕ, θ, ψ) - três variáveis independentes.
- Rotação em torno de z_0 pelo ângulo ϕ
- Rotação em torno de y_0' pelo ângulo θ
- Rotação em torno de z_0'' pelo ângulo ψ
- Matriz de rotação

$$R_{z_0, \phi} R_{y_0', \theta} R_{z_0'', \psi} = \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta c_\psi - s_\phi s_\psi & -c_\phi c_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & -s_\phi c_\theta s_\psi - c_\phi c_\psi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Ângulos de Euler

- Se $r_{13} \neq 0$ e $r_{23} \neq 0$.

$$\phi = \text{atan2}(r_{23}, r_{13})$$

$$\theta = \text{atan2}(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33})$$

$$\psi = \text{atan2}(r_{32}, -r_{31})$$

- O ângulo θ é limitado a $(0, \pi)$. Se $s\theta = 0$, ou seja, $\theta = 0$ ou π , é possível determinar somente a soma ou diferença entre os ângulos ϕ e ψ .

Espaços das juntas e das posições

- Espaço das juntas:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} q_i = \theta_i, \text{ para junta rotacional} \\ q_i = d_i, \text{ para junta prismática} \end{array} \right.$$

- Espaço das posições e orientações: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0^n \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}$

- Velocidade angular do SC do efetuador: $\mathbf{w}_0^n = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}$

- Relação entre as velocidades das juntas e velocidades (linear e angular) do efetuador
- **Matriz Jacobiana geométrica**

$$\dot{\mathbf{d}}_0^n = J_d(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{w}_0^n = J_w(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

- Sendo $J_d(\mathbf{q})$ e $J_w(\mathbf{q})$ matrizes $3 \times n$. Ainda

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}}_0^n \\ \mathbf{w}_0^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_d(\mathbf{q}) \\ J_w(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

- Sendo $J(\mathbf{q})$ uma matriz $6 \times n$.

- **Matriz Jacobiana analítica**

$$\dot{\mathbf{d}}_0^n = J_d(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{d}_0^n}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$$

$$\dot{\Phi} = J_\Phi(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}$$

- Assim

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}}_0^n \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_d(\mathbf{q}) \\ J_\Phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = J_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

Exemplo: Jacobiana analítica

- Manipulador planar com dois elos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ \theta_1 + \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{d}_x \\ \dot{d}_y \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 \dot{\theta}_1 - a_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ a_1 c_1 \dot{\theta}_1 + a_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

- Matriz Jacobiana analítica

$$J_A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_d(\mathbf{q}) \\ J_\phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Resumo

- Junta prismática
$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_{d_i} \\ \mathbf{j}_{w_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Junta rotacional
$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_{d_i} \\ \mathbf{j}_{w_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{d}_0^n - \mathbf{d}_0^{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix}$$

- Cálculo de \mathbf{z}_{i-1} :

$$\mathbf{z}_{i-1} = R_0^1(\mathbf{q}_1) \cdots R_{i-2}^{i-1}(\mathbf{q}_{i-1}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de \mathbf{d}_0^n :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_0^n \\ 1 \end{bmatrix} = H_0^1(\mathbf{q}_1) \cdots H_{n-1}^n(\mathbf{q}_n) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de \mathbf{d}_0^{i-1} :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_0^{i-1} \\ 1 \end{bmatrix} = H_0^1(\mathbf{q}_1) \cdots H_{i-2}^{i-1}(\mathbf{q}_{i-1}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Jacobiana geométrica

- Manipulador planar com dois elos

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{d}_0^2 - \mathbf{d}_0^0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{d}_0^2 - \mathbf{d}_0^1) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_0^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_0^1 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d}_0^2 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Matriz Jacobiana geométrica

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J_d(\mathbf{q}) \\ J_w(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ângulos de Euler ZYZ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_x & \mathbf{w}_y & \mathbf{w}_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \dot{\phi}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_x & \mathbf{w}_y & \mathbf{w}_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -s_\phi & c_\phi & 0 \end{bmatrix}^T \dot{\theta}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_x & \mathbf{w}_y & \mathbf{w}_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} c_\phi s_\theta & s_\phi s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}^T \dot{\psi}$$

- Portanto

$$\begin{bmatrix} \mathbf{w}_x \\ \mathbf{w}_y \\ \mathbf{w}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -s_\phi & c_\phi s_\theta \\ 0 & c_\phi & s_\phi s_\theta \\ 1 & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

- Relação entre \mathbf{w}_0^n e $\dot{\Phi}$

$$\mathbf{w}_0^n = T(\Phi)\dot{\Phi}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T(\Phi) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = T_A(\Phi)\dot{\mathbf{x}}$$

- Relação entre Jacobiana geométrica e Jacobiana analítica

$$J = T_A(\Phi)J_A$$

Cinemática inversa da posição via J

- Cinemática inversa da velocidade

$$\dot{\mathbf{q}} = J(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{v}$$

- Cálculo das variáveis das juntas

$$\mathbf{q} = \int_{T=0}^t \dot{\mathbf{q}}(T)dT + \mathbf{q}_0$$

- Usando a integração de Euler

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \dot{\mathbf{q}}(t_k)\Delta t$$

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + J(\mathbf{q}(t_k))^{-1}\mathbf{v}(t_k)\Delta t$$

- A matriz Jacobiana precisa ser invertível e \mathbf{q}_0 precisa ser conhecida.

Singularidades

- Configurações nas quais a mobilidade fica reduzida
- Infinitas soluções podem existir para o problema da cinemática inversa
- Pequenas velocidades no espaço operacional podem causar grandes velocidades no espaço das juntas
- Correspondem, na maioria dos casos, a pontos nos limites do espaço de trabalho
- Determinação de singularidade:

$$\det(J(\mathbf{q})) = 0$$

Exemplo: Singularidades

- Manipulador planar com dois elos

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

- Cálculo do determinante

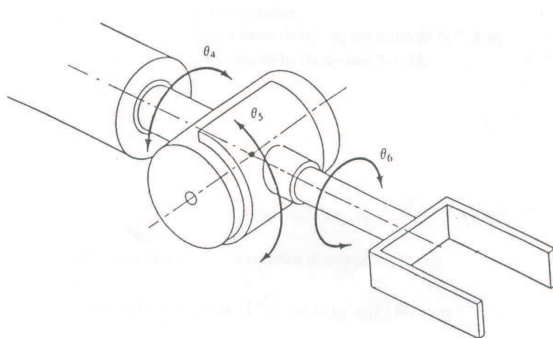
$$\det(J(\mathbf{q})) = a_1 a_2 s_2$$

- Singularidade:

$$s_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta_2 = 0 \\ \theta_2 = \pi \end{cases}$$

Exemplo: Singularidades

- Punho esférico



- Relação entre as forças e torques aplicados nas juntas e o movimento do manipulador ao longo do tempo
- Dinâmica direta (simulação)
 - Dados: posições e velocidades iniciais (t_0)
forças e torques aplicados para $t > t_0$
 - Procurado: posições e velocidades para $t > t_0$ (movimento resultante)
- Dinâmica inversa (controle)
 - Dados: posições, velocidades e acelerações desejadas para $t > t_0$
forças e momentos de contato
 - Procurado: forças e torques necessários nas juntas



- Newton-Euler

- Cada elo é considerado separadamente
- Forças de ação e reação nas juntas são consideradas
- Cálculo dos termos inerciais feito através das acelerações



- Lagrange

- Sistema considerado por completo
- Forças de ação e reação nas juntas **NÃO** são consideradas
- Cálculo dos termos inerciais feito através da derivada da energia cinética

- Kane

- Sistema considerado por completo
- Forças de ação e reação nas juntas **NÃO** são consideradas
- Cálculo dos termos inerciais feito através das acelerações e de produtos escalares com velocidade parciais

- Equação de Lagrange do movimento

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (2)$$

sendo $L = K - P$ o Lagrangeano do sistema.

- $K \Rightarrow$ Energia Cinética
- $P \Rightarrow$ Energia Potencial
- $\mathbf{q} \Rightarrow$ Coordenadas generalizadas
- $\boldsymbol{\tau} \Rightarrow$ Forças generalizadas

- Centro de massa (\mathbf{r}_c)

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m} \int_B \mathbf{r} dm$$

sendo \mathbf{r} o vetor de coordenadas de um ponto do corpo e m a massa total do corpo

- Sistema de coordenadas (SC) com origem no centro de massa
- Fórmula geral da Energia Cinética para um corpo rígido

$$K = \frac{1}{2} \int_B \mathbf{v}^T \mathbf{v} dm$$

- Depois de algumas simplificações
- Dois termos

$$K_T = \frac{1}{2} \int_B \mathbf{v}_c^T \mathbf{v}_c dm = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_c^T \mathbf{v}_c$$

$$K_R = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T I \mathbf{w}$$

sendo

$$I = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & - \int xy dm & - \int xz dm \\ - \int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & - \int yz dm \\ - \int xz dm & - \int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

- Momentos de inércia: I_{xx} , I_{yy} e I_{zz}
- Produtos de inércia: I_{xy} , I_{xz} e I_{yz}
- Depende da posição e orientação do SC
- A soma dos momentos de inércia permanece constante (independe do SC)
- Se $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0 \Rightarrow$ eixos do SC são os eixos principais de inércia e I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} são os momentos principais de inércia
- Os autovalores do tensor são os momentos principais de inércia e os autovetores são os eixos principais

- Elo i : massa, m_i , e tensor de inércia, I_i , calculado no SC com origem no centro de massa e paralelo ao SC i
- Velocidade angular expressa no SC fixo ao corpo

$$\mathbf{w}_{0,i}^i = (R_0^i)^T \mathbf{w}_0^i = (R_0^i)^T J_{\mathbf{w}_0^i}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

- Velocidade do centro de massa

$$\mathbf{v}_{ci} = J_{\mathbf{v}_{ci}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

- Energia Cinética

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \sum_{i=1}^n \left[m_i J_{\mathbf{v}_{ci}}(\mathbf{q})^T J_{\mathbf{v}_{ci}}(\mathbf{q}) + J_{\mathbf{w}_0^i}(\mathbf{q})^T R_0^i I_i (R_0^i)^T J_{\mathbf{w}_0^i}(\mathbf{q}) \right] \dot{\mathbf{q}}$$
$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(q) \dot{\mathbf{q}}$$

- Energia Potencial devido à gravidade

$$P = \int_B \mathbf{g}^T \mathbf{r} dm = m \mathbf{g}^T \mathbf{r}_c$$

sendo \mathbf{g} o vetor da aceleração da gravidade e \mathbf{r}_c o vetor de posição do centro de massa expressos no SC inercial

- Energia Potencial é função apenas da posição \mathbf{q}

$$P = P(\mathbf{q})$$

- Lagrangeano

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(q) \dot{\mathbf{q}} - P(\mathbf{q})$$

- Cálculo das derivadas da Equação de Lagrange (2)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = M(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$$

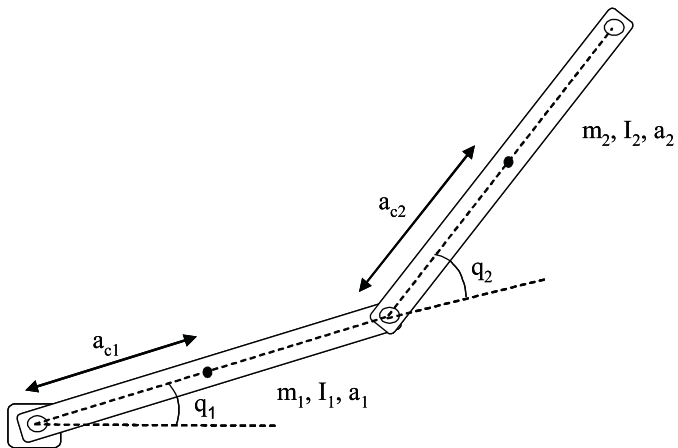
- Equação Dinâmica do Manipulador

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau}$$

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

- $M(\mathbf{q}) \Rightarrow$ Matriz de Inércia
- $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \Rightarrow$ Vetor das forças de Coriolis e centrípetas
- $G(\mathbf{q}) \Rightarrow$ Vetor das forças gravitacionais
- $\mathbf{q} \Rightarrow$ Coordenadas das juntas
- $\boldsymbol{\tau} \Rightarrow$ Torques e forças nas juntas

Exemplo: Manipulador planar de 2 elos



Exemplo: Manipulador planar de 2 elos

- Velocidade do centro de massa do elo 1

$$\mathbf{r}_{c1} = \begin{bmatrix} a_{c1} \cos(q_1) \\ a_{c1} \sin(q_1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{c1} = \begin{bmatrix} -a_{c1} \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ a_{c1} \cos(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{c1} \sin(q_1) & 0 \\ a_{c1} \cos(q_1) & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{v_{c1}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

- Velocidade do centro de massa do elo 2

$$\mathbf{r}_{c2} = \begin{bmatrix} a_1 \cos(q_1) + a_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ a_1 \sin(q_1) + a_{c2} \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{c2} = \begin{bmatrix} -a_1 \sin(q_1) - a_{c2} \sin(q_1 + q_2) & -a_{c2} \sin(q_1 + q_2) \\ a_1 \cos(q_1) + a_{c2} \cos(q_1 + q_2) & a_{c2} \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{v_{c2}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

Exemplo: Manipulador planar de 2 elos

- Energia cinética de translação

$$\begin{aligned}K_T &= \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_{c1}^T\mathbf{v}_{c1} + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_{c2}^T\mathbf{v}_{c2} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left[m_1 J_{\mathbf{v}_{c1}}(\mathbf{q})^T J_{\mathbf{v}_{c1}}(\mathbf{q}) + m_2 J_{\mathbf{v}_{c2}}(\mathbf{q})^T J_{\mathbf{v}_{c2}}(\mathbf{q}) \right] \dot{\mathbf{q}}\end{aligned}$$

- Velocidades angulares

$$\mathbf{w}_1 = \dot{q}_1 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{w}_2 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \mathbf{k}$$

- Energia cinética de rotação

$$K_R = \frac{1}{2}\mathbf{w}_1^T I_1 \mathbf{w}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{w}_2^T I_2 \mathbf{w}_2 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} I_1 + I_2 & I_1 \\ I_2 & I_2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

Exemplo: Manipulador planar de 2 elos

- Matriz de inércia

$$M(\mathbf{q}) = m_1 J_{v_{c1}}(\mathbf{q})^T J_{v_{c1}}(\mathbf{q}) + m_2 J_{v_{c2}}(\mathbf{q})^T J_{v_{c2}}(\mathbf{q}) + \begin{bmatrix} l_1 + l_2 & l_1 \\ l_2 & l_2 \end{bmatrix}$$

- Elementos de $M(\mathbf{q})$

$$M_{11}(\mathbf{q}) = m_1 a_{c1}^2 + m_2 (a_1^2 + a_{c2}^2 + 2a_1 a_{c2} \cos(q_2)) + l_1 + l_2$$

$$M_{12}(\mathbf{q}) = M_{21}(\mathbf{q}) = m_2 (a_1 a_{c2} \cos(q_2)) + l_2$$

$$M_{22}(\mathbf{q}) = m_2 a_{c2}^2 + l_2$$

Exemplo: Manipulador planar de 2 elos

- Vetor dos torques de Coriolis e centrífugos

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} V_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ V_2(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2^2 \\ m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

- Sendo $h = m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2)$

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -h\dot{q}_2 & -h\dot{q}_1 + h\dot{q}_2 \\ h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

- Energia Potencial

$$P_1(\mathbf{q}) = m_1 g a_{c1} \text{sen}(q_1)$$

$$P_2(\mathbf{q}) = m_2 g (a_1 \text{sen}(q_1) + a_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2))$$

Exemplo: Manipulador planar de 2 elos

- Energia Potencial

$$\begin{aligned} P(\mathbf{q}) &= P_1(\mathbf{q}) + P_2(\mathbf{q}) \\ &= (m_1 g a_{c1} + m_2 g a_1) \text{sen}(q_1) + m_2 g a_{c2} \text{sen}(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

- Vetor dos torques não inerciais

$$G(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} G_1(\mathbf{q}) \\ G_2(\mathbf{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial q_1} \\ \frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial q_2} \end{bmatrix}$$

$$G(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_1 g a_{c1} + m_2 g a_1) \cos(q_1) + m_2 g a_{c2} \cos(q_1 + q_2) \\ m_2 g a_{c2} \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

- Introdução do atrito

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + F(\dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{q}) = \tau$$

na forma

$$F(\dot{\mathbf{q}}) = F_v \dot{\mathbf{q}} + F_d$$

- Compactação dos termos não inerciais

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + b(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \tau$$

- $M(\mathbf{q})$ é simétrica definida positiva
- $M(\mathbf{q})$ é limitada inferiormente e superiormente

$$\mu_1 I \leq M(\mathbf{q}) \leq \mu_2 I$$

$$m_1 \leq \|M(\mathbf{q})\| \leq m_2$$

- Exemplo: planar dois elos

$$\begin{aligned} \|M(\mathbf{q})\|_1 = & |m_1 a_{c1}^2 + m_2(a_1^2 + a_{c2}^2 + 2a_1 a_{c2} \cos(q_2)) + I_1 + I_2| \\ & + |m_2(a_{c2}^2 + a_1 a_{c2} \cos(q_2)) + I_2| \end{aligned}$$

- $G(\mathbf{q})$ é limitado superiormente

$$\|G(\mathbf{q})\| \leq g_b$$

- Exemplo: planar dois elos

$$\begin{aligned}\|G(\mathbf{q})\|_1 &= |(m_1ga_{c1} + m_2ga_1)\cos(q_1) + m_2ga_{c2}\cos(q_1 + q_2)| \\ &\quad + |m_2ga_{c2}\cos(q_1 + q_2)| \\ &\leq m_1ga_{c1} + m_2ga_1 + 2m_2ga_{c2} = g_b\end{aligned}$$

- $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ é limitado superiormente por um termo quadrático

$$\|V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq v_b(q) \|\dot{\mathbf{q}}\|^2$$

- Exemplo: planar dois elos

$$\begin{aligned} \|V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\|_1 &= | - 2m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 | \\ &\quad + | m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2^2 | + | m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_1^2 | \\ &\leq | m_2 a_1 a_{c2} (|\dot{q}_1| + |\dot{q}_2|)^2 | = v_b(q) \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \end{aligned}$$

Propriedades das Matrizes Dinâmicas

- Pode-se escrever $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ sendo que a matriz

$$N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{M}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

é anti-simétrica

- Exemplo: planar dois elos

$$\dot{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -2m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 \\ -m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_2 & -m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) \\ m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ -m_2 a_1 a_{c2} \text{sen}(q_2) (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2) & 0 \end{bmatrix}$$

- Parametrização linear

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + G(\mathbf{q}) = Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\theta$$

sendo θ o vetor de parâmetros do manipulador e $Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ a matriz de regressão. Exemplo: planar dois elos:

$$Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & 2 & 1 \\ 0 & y_{22} & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \theta = [m_1 \quad m_2 \quad l_1 \quad l_2]$$

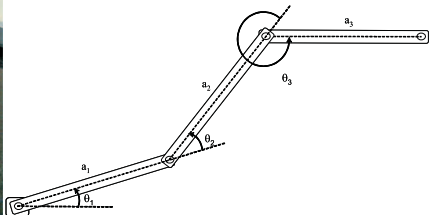
$$y_{11} = a_{c1}^2 \ddot{q}_1 + g a_{c1} \cos(q_1)$$

$$y_{12} = (a_1^2 + a_{c2}^2 + 2a_1 a_{c2} \cos(q_2)) \ddot{q}_1 + (a_{c2}^2 + a_1 a_{c2} \cos(q_2)) \ddot{q}_2 \\ - a_1 a_{c2} \sin(q_2) (2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + g a_1 \cos(q_1) + g a_{c2} \cos(q_1 + q_2)$$

$$y_{22} = (a_{c2}^2 + a_1 a_{c2} \cos(q_2)) \ddot{q}_1 + a_{c2}^2 \ddot{q}_2 + a_1 a_{c2} \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \\ + g a_{c2} \cos(q_1 + q_2)$$

Lista 1 - Manipulador planar de 3 elos

- O Robo UArmII é um manipulador planar composto por três juntas rotacionais e um efetuador. O vetor da gravidade é paralelo ao eixo de movimento das juntas. Uma representação esquemática do manipulador UArm II é dada abaixo. Os comprimentos dos elos são $a_1 = a_2 = a_3 = 0.20m$.



Lista 1 - Manipulador planar de 3 elos

- Determine a tabela de parâmetros de Denavit-Hartenberg e as matrizes de transformação. Faça uma representação da posição dos sistemas de coordenadas.
- Determine a matriz Jacobiana.
- Determine a equação dinâmica, considerando as massas dos links (m_1 , m_2 e m_3), os centros de massa (ac_1 , ac_2 e ac_3) e os momentos de inércia (I_1 , I_2 e I_3).