Modelo de Cournot

Prof. Dr. Cláudio R. Lucinda

15 de fevereiro de 2004

Vamos neste texto formalizar um pouco melhor os conceitos associados com o Modelo de Cournot desenvolvido em sala. Inicialmente iremos analisar as hipóteses constituintes do modelo, para a seguir desenvolvermos as principais conclusões e implicações do mesmo.

Conforme visto nas transparências, temos que neste modelo o preço recebido por unidade do produto é uma função inversa da quantidade vendida do mesmo. Ou seja:

$$P = P(\sum_{i=1}^{n} Q_i)$$

Além disso, $\frac{\partial P(\sum Q_i)}{\partial \sum Q_i} < 0$. Vamos então supor que tenhamos a seguinte função demanda:

$$\begin{aligned} P &= a - b(Q_1 + Q_2) \\ P &= 0, se(Q_1 + Q_2) < \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Agora precisamos supor qual é a estrutura de custos de cada uma das empresas envolvidas. Mais especificamente, iremos supor que cada uma das firmas possua a seguinte estrutura de custso:

$$CT_i = cQ_i$$

Podemos então supor que a função de lucros de cada uma das companhias seja da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \pi_i &= PQ_i - CT_i \\ \pi_1 &= [a - b(Q_1 + Q_2)]Q_1 - cQ_1 \\ \pi_2 &= [a - b(Q_1 + Q_2)]Q_2 - cQ_2 \end{aligned}$$

Podemos determinar, com a ajuda destas funções acima, uma construção denominada Função Isolucro. Mais especificamente, esta Função Isolucro nos mostra quais são as combinações de Q_1 e Q_2 que levam a um determinado nível de lucro para a empresa 1 e/ou empresa 2. Utilizando os dados da página 35 do livro ($a = 1,90$, $b = 0,10$ e $c = 1$) temos a seguinte expressão para o nível de lucros igual a \$1.000 para a firma 1:

$$Q_1 = 9 - \frac{10}{Q_2} - Q_2$$

Podemos notar que a forma particular encontrada na equação acima nos diz que esta função é quadrática em termos do argumento Q_2, o que é mostrado na figura 2.1. O passo seguinte na análise é justamente determinar quais são as Funções Melhor Resposta de cada uma das firmas. Para tanto, e conforme vimos no texto da aula passada, temos que derivar cada uma das funções lucro em termos da única variável estratégica à disposição das firmas envolvidas (a sua quantidade produzida). Temos, então, para a firma 1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1} &= a - bQ_2 - 2bQ_1 - c = 0 \\ Q_1^* &= \frac{a - bQ_2 - c}{2b} \end{aligned}$$

Da mesma forma, fazendo a mesma análise para a firma 2, a função melhor resposta dela é:

$$Q_2^* = \frac{a - bQ_1 - c}{2b}$$

E o equilíbrio de Nash neste caso seria obrito a partir da solução do sistema associado com estas duas funções melhor resposta:

$$\begin{aligned} Q_1^* &= \frac{a - bQ_2 - c}{2b} \\ Q_2^* &= \frac{a - bQ_1 - c}{2b} \end{aligned}$$

A solução deste sistema chega aos seguintes resultados para cada firma:

$$Q_1^* = Q_2^* = \frac{a - c}{3b}$$

Este é o Equilíbrio de Nash do jogo.

Propriedades do Equilíbrio de Cournot com Muitas Firmas

Vamos agora analisar o caso em que existem mais de uma firma no mercado. Vamos então supor a demanda que anteriormente já tínhamos analisado:

$$P = P(\sum_{i=1}^{n} Q_i) = a - b(\sum_{i=1}^{n} Q_i)$$

Vamos pensar no problema de maximização de uma firma específica:

$$\pi_i = a - b(\sum_{j=1}^{n} Q_j)Q_i - cQ_i$$

Temos as seguintes Condições de Primeira Ordem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_i}{\partial Q_i} &= a - b\sum_{j=1}^{n} Q_j - bQ_i - c = 0 \\ Q_i^* &= \frac{a - b\sum_{j=1}^{n} Q_j - c}{b} \end{aligned}$$

Evidentemente, teremos uma condição como esta para cada um dos n jogadores. Uma vez que cada uma das companhias é simétrica à outra (ou seja, possui custos idênticos), podemos definir um *Equilíbrio de Nash Simétrico,* em que $Q_j = Q^*, \forall j$. Com esta hipótese, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} Q^* &= \frac{a - bnQ^* - c}{b} \\ Q^* &= \frac{1}{1+n}\frac{a-c}{b} \end{aligned}$$

Além disso, temos que a produção de mercado é igual a $\frac{n}{1+n}\frac{a-c}{b}$. Podemos notar que, para n tendendo ao infinito, temos que os resultados aqui irão para os seus equivalentes de mercado competitivo.