MODELO DE BERTRAND

PROF. DR. CLÁUDIO R. LUCINDA

Neste texto, iremos analisar o modelo inicialmente desenvolvido por Joseph Bertrand como uma resposta às conclusões do Modelo de Cournot. Dentro deste modelo, a principal variável estratégica utilizada é composta pelo preço cobrado por qualquer uma das empresas envolvidas.

1. Modelo de Bertrand - Exposição Inicial

Vamos supor que as firmas - para simplificar, vamos supor a existência de duas firmas - que produzem bens que possam ser considerados como substitutos perfeitos nas funções de uilidade dos consumidores. Consequentemente, eles comprarão do produtor que cobra o menor preço. Se as firmas cobrarem preços idênticos, devemos fazer uma hipótese de como os consumidores se distribuem entre elas. Para tanto, iremos supor que as firmas enfrentam uma curva de demanda que é igual à metade da demanda de mercado neste caso.

Considerando a existência de uma função demanda de mercado $Q = D(P)$, e supondo que cada firma tenha um custo marginal constante e igual a c, temos que a função lucro para a firma i $(i = 1, 2)$ é igual a:

$$\pi_i(P_i, P_j) = (P_i - c)D_i(P_i, P_j)$$

Esta função demanda pelo produto de uma das firmas, acima denotada $D_i$tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} D_i(P_i, P_j) &= D(P_i), P_i < P_j \\ D_i(P_i, P_j) &= \frac{1}{2}D(P_i), P_i = P_j \\ D_i(P_i, P_j) &= 0, P_i > P_j \end{aligned}$$

Além disso, podemos afirmar que o lucro agregado de mercado, $(Min_{p_i}[P_i - c])D(P_i)$ é menor do que o lucro de monopólio. Cada firma pode garatir para si mesma um lucro positivo cobrando um preço acima do custo marginal. Portanto, podemos afirmar que, qualquer que seja a solução, $0 \leq \pi_i + \pi_2 \leq \pi_m$, em que $\pi_m$denota o lucro de monopólio.

Consistentemente com a análise exposta até gora, vamos supor que cada uma das companhia escolhe o seu preço simultaneamente. Um Equilíbrio de Nash em preços - também conhecido como um equilíbrio de Bertrand - é um par de preços (P_1^*, P_2^*) tal que cada uma das empresas maximiza o seu lucro dado o preço cobrado pela outra. Em termos mais formais, temos que:

$$\pi_i(P_i^*, P_j^*) \geq \pi_i(P_i, P_j^*)$$

Com isto, podemos afirmar o seguinte:

Theorem. *O Jogo acima exposto somente admite um Equilíbrio de Nash em estratégias puras, em que cada empresa cobra um preço exatamente igual ao custo marginal, isto é,* $P_1^* = P_2^* = c$.

Demonstração. Considere, por exemplo, que $P_1^* > P_2^* > c$. Neste caso, a firma 1 não vende nada e o seu lucro é zero. Por outro lado, se a firma 1 cobra um preço igual a $P_1 = P_2^* - \varepsilon$, em que ε é positivo e bem pequeno, ela teria a demanda completa de mercado, $D(P_2^* - \varepsilon)$ e obteria uma margem positiva igual a $P_2^* - \varepsilon - c$. Portanto, a firma 1 não poderia estar agindo de acordo com o seu interesse cobrando um preço $P_1^* > P_2^*$, logo esta possibilidade não é factível.

Agora suponha que $P_1^* = P_2^* > c$. O lucro da firma 1 seria $\frac{1}{2}D(P_1^*)(P_1^* - c)$. Da mesma forma que antes, se a firma 1 cobra um preço igual a $P_1 = P_2^* - \varepsilon$, o seu lucro se tornaria $D(P_1 - \varepsilon)(P_1 - c)$, que é maior se continuarmos a considerar que ε é pequeno. Neste caso, a participação de mercado da firma aumenta de uma forma descontínua. Uma vez que nenhuma firma iria cobrar um preço inferior ao custo marginal c, a única solução possível é que pelo menos uma das firmas cobre exatamente este custo. Caso tivéssemos $P_1^* > P_2^* = c$, a firma 2 poderia aumentar somente um pouco os seus preços (e ainda ficar abaixo do preço cobrado pela outra), obter lucros positivos pois continuaria suprindo a demanda toda - o que é uma contradição. Logo, o teorema está provado. □

Podemos resumir as conclusões deste modelo nas duas afirmações:

- As firmas cobram preços iguais aos custos marginais.
- As firmas não têm lucros.

Evidentemente, este resultado tem pouco apelo, na medida que é difícil acreditar que empresas em indústrias com poucos concorrentes são incapazes de manipular os preços de mercado. Neste texto, iremos investigar duas possíveis extensões do modelo que permitem reconciliá-lo com a observação dos fatos.

2. Modelo de Bertrand - Produtos Diferenciados

Nesta parte do texto, iremos analisar uma hipótese adicional que pode nos ajudar a reconciliar os resultados da seção acima com a observação dos fatos. Esta hipótese é a da imperfeita substitutibilidade dos produtos. Em geral, dois produtos quase nunca são considerados como perfeitos substitutos - no sentido que os consumidores são indiferentes entre os bens quando eles possuem o mesmo preço[1]. Os produtos são quase sempre diferenciados por alguma característica.

Por outro lado, um grupo de produtos sempre interage com outros produtos (ou grupos de produtos) dentro de uma economia. Os preços de bens em outras indústrias entram na demanda por um determinado bem não apenas por meio dos efeitos renda, mas também por meio dos efeitos substituição.

Uma definição útil, que vai na direção do objetivo da seção em questão, é que um bem pode ser considerado como um aglomerado de características:

- Qualidade
- Localização
- Tempo
- Disponibilidade
- Informação sobre a existência do mesmo

Evidentemente, cada consumidor possui um ordenamento sobre quais destas características são mais importantes. Dsta forma, cada produto - mesmo sendo bastante similar, pode ser considerado como imperfeitamente substituto a outro. Vamos supor que a quantidade demandada da firma i seja denotada da seguinte forma:

$$Q_i = \alpha - \beta_i P_i + \gamma_i P_j$$

Podemos notar que o sinal positivo associado à variável γ_i indica que os bens das empresas i e j são substitutos. Considere que a empresa possua custos marginais constantes e iguais a c. A

[1]É importante notar que isto não significa que o consumidor não seja capaz de formar curvas de indiferença. Ou seja, ele pode não ser indiferente entre dois produtos e ser indiferente entre cestas contendo quantidades diferentes do produto.

partir destes dados, podemos derivar a Função Melhor Resposta de cada companhia, a partir da função lucro abaixo:

$$\pi_i = (P_i - c)(\alpha - \beta_i P_i + \gamma_i P_j)$$

Consequentemente, temos as seguintes Condições de Primeira Ordem associadas com a maximização:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial P_i} = \alpha - 2\beta_i P_i + \gamma_i P_j + c\beta_i = 0$$

A partir destas Condições de Primeira Ordem temos as seguintes Funções Melhor Resposta:

$$P_i^* = \frac{\alpha + \gamma_i P_j + c\beta_i}{2\beta_i}$$

Resolvendo o sistema associado com $i = 1, 2$, temos então:

$$\begin{aligned} P_1^* &= \frac{\alpha + c\beta_1}{2\beta_1} + \frac{\gamma_1}{2\beta_1}\left[\frac{\alpha + c\beta_2 + \gamma_2 P_1^*}{2\beta_2}\right] \\ P_1^* &= \frac{2\beta_2\alpha + 2c\beta_1\beta_2 + \gamma_1\alpha + c\gamma_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 P_1^*}{4\beta_1\beta_2} \end{aligned}$$

Reorganizando:

$$P_1^* = \frac{\alpha(2\beta_2 + \gamma_1) + c\beta_2(2\beta_1 + \gamma_1)}{4\beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2}$$

Podemos observar que este resultado é bastante diferente do implícito pela seção anterior. Mais especificamente, temos que $P_1^* \neq c$. Podemos notar, portanto, que neste caso existe espaço para que cada uma das firmas neste mercado cobre preços acima dos custos marginais, na presença de diferenciação de produtos.

O passo seguinte é analisar a existência de limitações de capacidade produtiva para cada firma no mercado. Este é o objeto da seção subsequente.

3. Modelo de Bertrand com Restrições de Capacidade

O objetivo desta seção é analisar o papel das restrições de capacidade por parte das firmas envolvidas em um mercado, como forma de contornar o resultado paradoxal obtido a partir da seção 1. Vamos supor que existam duas firmas neste mercado, com capaciade máxima de K unidades. Em outras palavras, cada companhia possui $CMg_i = c$ caso $q_i < K$, e $CMg_i \to \infty$, quando $q_i \geq K$. Evidentemente, a escolha deste nível K já é, por si só, uma interessante escolha estratégica, mas não é o objetivo em questão.

Inicialmente, vamos supor a seguinte função demanda:

$$P = a - b(q_1 + q_2) \quad , P_1 = P_2 \quad , q_1 + q_2 < \frac{a}{b}$$

Com esta função, podemos definir a chamada função *Demanda Residual*. A demanda residual é a demanda que cada empresa enfrenta caso cobre um preço acima da outra. Ela é construída a partir da hipótese que a empresa que cobra um preço mais baixo venderá, necessariamente, a quantidade idêntica à sua capacidade instalada. Ou seja, podemos definir a seguinte Função Demanda Residual para a empresa 1, caso a empresa 2 cobre um preço inferior:

$$Q_1 = \frac{a}{b} - K - \frac{1}{b}P_1$$

Com esta Função Demanda Residual, podemos definir as vendas da firma 1 com relação ao preço:

$$\begin{aligned}
Q_1 = min\left\{\frac{a}{b} - K - \frac{1}{b}P_1, K\right\} &\quad caso \quad P_2 < P_1 \leq a - bK \\
Q_1 = \frac{1}{2}min\left\{\frac{a}{b} - \frac{P_1}{b}, K\right\} &\quad caso \quad P_2 = P_1 \leq a \\
Q_1 = min\left\{\frac{a}{b} - \frac{P_1}{b}, K\right\} &\quad caso \quad P_2 > P_1 \leq a \\
Q_1 = 0 &\quad caso \quad contr.
\end{aligned}$$

Estas equações dizem o seguinte. Se a empresa 1 coloca o seu preço acima da firma 2, as suas vendas são restritas pelo menor de dois valores - a demanda residual e a sua capacidade. Se as duas empresas cobram preços iguais, as suas vendas são restringidas pelo menor de dois valores - metade da demanda de mercado ou a capacidade. E, finalmente, se a empresa 1 coloca o seu preço abaixo do preço da empresa 2, ela seria restrita pelo menor de dois valores - a demanda de mercado e a capacidade. A função lucro é derivada da seguinte forma:

$$\pi_1 = (P_1 - c)min\left\{\frac{a}{b} - K - \frac{1}{b}P_1, K\right\} \quad caso \quad P_2 < P_1 \leq a - bK$$
$$\pi_1 = \frac{1}{2}(P_1 - c)min\left\{\frac{a}{b} - \frac{P_1}{b}, K\right\} \quad caso \quad P_2 = P_1 \leq a$$
$$\pi_1 = (P_1 - c)min\left\{\frac{a}{b} - \frac{P_1}{b}, K\right\} \quad caso \quad P_2 > P_1 \leq a$$
$$\pi_1 = 0 \quad caso \quad contr.$$

Neste caso a construção de uma função melhor resposta por meio da maximização condicionada da função lucro se torna extremamente problemática, uma vez que a função lucro não é contínua no intervalo relevante. Desta forma, o melhor a fazer é procurar por estratégias dominadas, para a seguir determinarmos quais seriam as melhores respostas. Dois conjuntos de estratégias são estritamente dominadas: $P_1 > a$, pois isto faz com que nenhuma venda seria realizada e $P_1 < c$, em que cada unidade vendida dá prejuízo. Portanto, a função melhor resposta deve se limitar a preços neste intervalo.

O próximo passo é analisar como será a melhor resposta para cada segmento. Podemos notar que para $P_1 \leq a - 2bK$, temos que a empresa 1 venderá justamente a sua capacidade produtiva, independentemente de qual preço seja cobrado pela empresa 2. No entanto, qualquer valor para preço inferior a $a - 2bK$[2] leva a um lucro inferior ao obtido pela cobrança deste valor. Portanto, a melhor resposta para o preço cobrado pela outra e inferior a $a - 2bK$ é justamente a cobrança de $a - 2bK$ pela empresa 1.

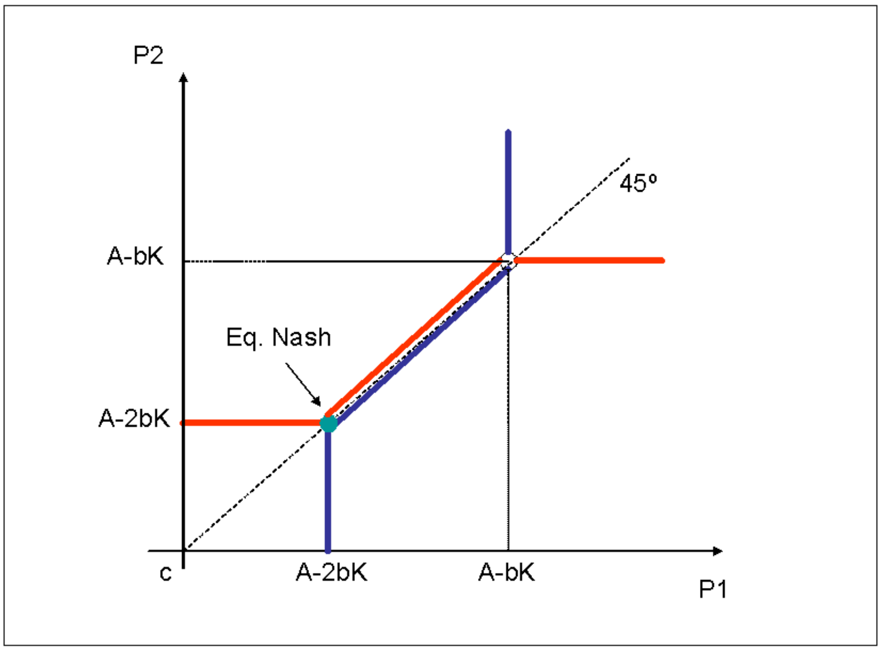
Caso o preço cobrado pela empresa 2 seja superior à $a - 2bK$, a melhor resposta fica um pouco mais complexa. Caso a empresa 2 cobre um preço abaixo de $a - bK$[3] , a melhor estratégia por parte da firma 1 é cobrar um preço $P_1 = P_2 - \varepsilon$, pois neste caso toda a demanda de mercado irá para esta empresa. É importante notar que, neste caso, a firma 1 venderá a sua capacidade K. E, finalmente, caso a empresa 2 cobre um preço acima de $a - bK$, temos que a melhor resposta da firma 1 é justamente cobrar $a - bK$. Podemos resumir as estratégias para a firma 1 na seguinte tabela:

[2]Obtido a partir de se igualar os dois elementos da primeira função $Min\{.\}$.
[3]Obtido a partir de se igualar os dois elementos da terceira função $Min\{.\}$.

	Melhor Resposta Firma 1
Firma 2 joga $[c; a - 2bk]$	$a - 2bK$
Firma 2 joga $]a - 2bK; a - bK[$	$P_2 - \varepsilon$
Firma 2 joga $[a - bK; +\infty[$	$a - bK$

Evidentemente, a firma 2 possui uma tabela representativa de estratégias bastante similar. Consequentemente, temos que o Equilíbrio de Nash neste caso seria a adoção de preços $P_1 = P_2 = a - 2bK$. As características das funções melhor resposta das duas empresas estão representadas no gráfico a seguir:

Figura 1. Funções Melhor Respostas - Firmas 1 e 2



Podemos notar que neste caso, também temos no Equilíbrio de Nash preços acima dos custos marginais, contornando assim o paradoxo de Bertrand colocado anteriormente.

4. Conclusão

Neste pequeno texto, mostramos um dos principais modelos para compreender a interação estratégica entre as empresas em mercados oligopolizados: o Modelo de Bertrand. Começamos mostrando a formulação mais básica do mesmo modelo, bem como a conclusão aparentemente paradoxal. A seguir, foram mostradas as possíveis soluções para este assim chamado paradoxo: a diferenciação de produtos e a existência de significativas restrições de capacidade.

Referências

[1] TIROLE, J. (1995) *The Theory of Industrial Organization.* MIT Press.

[2] BIERMAN, H. S. e FERNANDEZ, L. (2000) *Game Theory with Economic Applications.* Addison-Wesley.