

Lista 1 de exercícios de Álgebra I para Licenciatura (MAT0120)

1. Usando tricotomia em $\mathbb{Z}$

- (a) qual a negação de $a < b$?
- (b) qual a negação de $a \geq b$?
- (c) qual a negação de $a = b$?

2. Sejam a, b em $\mathbb{Z}$. Mostre que:

- (a) $(-1)a = -a$
- (b) $a^2 = 0 \implies a = 0$
- (c) $a^2 = a \implies a = 0$ ou $a = 1$

3. Dado um inteiro a chamamos de valor absoluto (ou módulo) de a ao número denotado por $|a|$, e definido como segue:
$$\begin{cases} a \geq 0 \implies |a| = a \\ a < 0 \implies |a| = -a \end{cases}$$

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, prove que:

- (a) $|a| \geq 0$ e $|a| = 0 \iff a = 0$
- (b) $-|a| \leq a \leq |a|$
- (c) $|-a| = |a|$
- (d) $|ab| = |a||b|$
- (e) $|a + b| \leq |a| + |b|$
- (f) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

4. $a \in \mathbb{Z}$ diz-se invertível se existe $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $aa' = 1$. Mostre que os únicos elementos invertíveis são 1 e -1.

5. Prove que a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem soluções em $\mathbb{Z}$.

6. Prove que a tricotomia é equivalente à seguinte afirmação:
Dado um inteiro a tem-se: $a > 0$, $a = 0$ ou $a < 0$.

7. Seja $M_n = n(n^2 - 1)(3n + 2)$ para $n \in \mathbb{N}$. Mostre que M_n é múltiplo de 24.

8. Seja F_n a sequência (de Fibonacci) definida por:
 $F_0 = 0$; $F_1 = 1$; e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 2$.

Mostre que $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, onde $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

9. Seja F_n o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci.
Demonstrar que para todo $n \geq 1$ temos:

- (a) $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$
- (b) $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$

10. Prove que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ vale:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

11. Decidir se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas:

(a) $(mn)! = m!n!$ para $n, m \geq 1$

(b) $(m+n)! = m! + n!$ para $n, m \geq 1$

12. Prove que:

(a) $n! > n^2$ para $n \geq 4$

(b) $n! > n^3$ para $n \geq 6$

(c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1) \right]^2$