

Mapa de Karnaugh

1 Objetivos deste tópico

Ao final do estudo deste tópico você saberá:

- Mapas de Karnaugh.
- Soma Mínima e Soma Completa.
- Implicação, inclusão e cobertura.
- Implicante Primo e Implicante Primo Essencial.
- Minimização de funções por Mapa de Karnaugh.

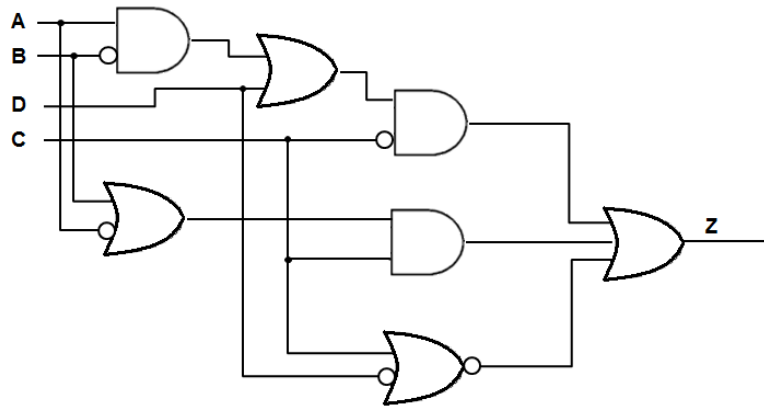
Leitura recomendada : seções do livro do Wakerly

- Section 4.3.3 - Combinational Circuit Minimization
- Section 4.3.4 - Karnaugh Maps
- Section 4.3.5 - Minimizing Sums of Products
- Section 4.3.6 - Other Minimization Topics

Keywords: Karnaugh Map, minimal sum, implication, covering, prime implicant, complete sum, distinguished 1-cell, essential prime implicant, sum-of-products minimization, product-of-sums minimization, minimal product don't care, don't care minimization

2 Exercícios

1. Você recebe a tarefa de fazer a engenharia reversa de um circuito digital, para propor melhorias ao mesmo. Analisando a documentação, você encontra o seguinte diagrama de portas lógicas:
 - (a) Qual a expressão de álgebra de chaveamento que descreve a saída Z em função das entradas A, B, C e D?



- (b) Utilize um Mapa de Karnaugh para minimizar o circuito em questão. Descreva a expressão de álgebra de chaveamento mínima resultante (na forma de soma de produtos) e indique quais são os implicantes primos essenciais (IPEs) na mesma.
- (c) Desenhe o circuito correspondente à expressão mínima obtida no item (b), na forma de soma de produtos.
- (d) Utilize um Mapa de Karnaugh para minimizar o circuito em questão. Descreva a expressão de álgebra de chaveamento mínima resultante (na forma de produto de somas) e indique quais são os implicados primos essenciais (IPEs) na mesma.
- (e) Desenhe o circuito correspondente à expressão mínima obtida no item (d), na forma de produto de somas.
- (f) Analisando melhor o problema que o circuito deve resolver, você percebe que, na prática, o valor de saída do seu circuito não importa nos casos em que a combinação de entradas é $A = 1, B = 0$ e $C=1$. Portanto, você pode reprojeter o circuito para que todas as saídas correspondentes a essa combinação de entradas sejam do tipo *don't care*. Isso possibilitaria alguma otimização adicional? Justifique, apresentando o mapa de Karnaugh e a expressão mínima correspondente a esse cenário.
2. Matemáticos falam que “1” não é um número primo. Reescreva a lista de mintermos, a soma canônica e desenhe novamente o diagrama lógico do detector de números primos da página 205, assumindo que “1” não é um número primo.
3. Se a soma canônica para uma função de n entradas é também a soma mínima, quantos literais existem em cada termo de produto na soma? Podem existir outras somas mínimas neste caso?
4. Dê duas razões para explicar porque o custo dos inversores não é incluído na definição de “mínimo” para minimização lógica.
5. Usando mapas de Karnaugh, encontre uma expressão em soma de produtos mínima para cada uma das funções lógicas a seguir. Indique as 1-células importantes em cada mapa.
- a) $F = \sum_{X,Y,Z}(1, 3, 5, 6, 7)$
- b) $F = \sum_{W,X,Y,Z}(1, 4, 5, 6, 7, 9, 14, 15)$
- c) $F = \prod_{W,X,Y}(1, 4, 5, 6, 7)$

- d) $F = \sum_{W,X,Y,Z}(0, 1, 6, 7, 8, 9, 14, 15)$
 e) $F = \prod_{A,B,C,D}(4, 5, 6, 13, 15)$
 f) $F = \sum_{A,B,C,D}(4, 5, 6, 11, 13, 14, 15)$
6. Usando mapas de Karnaugh, encontre uma expressão em soma de produtos mínima para cada uma das funções lógicas a seguir. Indique as 1-células importantes em cada mapa.
- a) $F = \sum_{A,B,C}(0, 1, 2, 4)$
 b) $F = \sum_{W,X,Y,Z}(1, 4, 5, 6, 11, 12, 13, 14)$
 c) $F = \prod_{A,B,C}(1, 2, 6, 7)$
 d) $F = \sum_{W,X,Y,Z}(0, 1, 2, 3, 7, 8, 10, 11, 15)$
 e) $F = \sum_{W,X,Y,Z}(1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14)$
 f) $F = \prod_{A,B,C,D}(1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 13, 14)$
7. Refaça o exemplo de minimização do detector de números primos da Figura 4-31, assumindo que o número “1” não é primo.
8. Encontre a soma completa para as funções lógicas no exercício 4.15, itens *d)* e *e)*.
9. Usando mapas de Karnaugh, encontre uma expressão em soma de produtos mínima para cada uma das funções lógicas a seguir. Indique as 1-células importantes em cada mapa.
- a) $F = \sum_{W,X,Y,Z}(0, 1, 3, 5, 14) + d(8, 15)$
 b) $F = \sum_{W,X,Y,Z}(0, 1, 2, 8, 11) + d(3, 9, 15)$
 c) $F = \sum_{A,B,C,D}(4, 6, 7, 9, 13) + d(12)$
 d) $F = \sum_{A,B,C,D}(1, 5, 12, 13, 14, 15) + d(7, 9)$
 e) $F = \sum_{W,X,Y,Z}(4, 5, 9, 13, 15) + d(0, 1, 7, 11, 12)$
10. Para cada uma das seguintes expressões lógicas, encontre todas as corridas críticas no circuito AND-OR ou OR-AND de dois níveis correspondente e projete um circuito livre de corridas críticas que realiza a mesma função lógica.
- a) $F = W * X + W' * Y'$
 b) $F = W * X' * Y' + X * Y' * Z + X * Y$
 c) $F = W * Y + W' * Z' + X * Y' * Z$
 d) $F = W' * X' + Y' * Z + W' * X * Y * Z + W * X * Y * Z'$
 e) $F = (W' + X + Y') * (X' + Z')$
 f) $F = (W + Y' + Z') * (W' + X' + Z') * (X' + Y + Z)$
 g) $F = (W + Y + Z') * (W + X' + Y + Z) * (X' + Y') * (X + Z)$
11. Assumindo que uma porta inversora tem um atraso de propagação de 5 [ns] e que uma porta não-inversora tem um atraso de propagação de 8 [ns], compare a velocidade dos circuitos nas Figuras 4.24 (a), (c) e (d).

12. Prove que a regra para combinar 2^i 1-células em um mapa de Karnaugh é verdadeira usando os axiomas e teoremas da álgebra de chaveamento.
13. Uma soma não-redundante para uma função lógica F é a soma dos implicantes primos de F tal que se qualquer implicante primo é removido, a soma não é mais igual a F. Isso parece com uma soma mínima, mas uma soma não-redundante não é necessariamente mínima. Por exemplo, a soma mínima da função na Figura 4-36 tem apenas três termos de produto, mas tem uma soma não-redundante com quatro termos de produto. Encontre essa soma e desenhe o mapa desta função, circulando apenas os implicantes primos na soma não-redundante.
14. Encontre outra função lógica na Seção 4.3 que tem uma ou mais somas não-redundantes não-mínimas e desenhe o seu mapa, circulando apenas os implicantes primos da soma não-redundante.
15. Desenhe um mapa de Karnaugh e atribua variáveis às entradas do circuito OR-XOR da Figura X4.54 (ver no Wakerly, p. 234) de tal forma que sua saída seja $F = \sum_{W,X,Y,Z}(2, 3, 8, 9)$. Qual é a solução se as portas OR forem modificadas para portas NOR? Note que a porta de saída é um XOR com duas entradas ao invés de um AND ou um OR.
16. Um circuito “comparador” de três bits recebe dois números de três bits, $P = P_2P_1P_0$ e $Q = Q_2Q_1Q_0$. Projete um circuito com uma soma de produtos mínima que produza saída 1 se, e somente se, $P < Q$.
17. Encontre expressões mínimas de somas de produtos com múltiplas saídas para $F = \sum_{X,Y,Z}(0, 1, 2)$, $G = \sum_{X,Y,Z}(1, 4, 6)$ e $H = \sum_{X,Y,Z}(0, 1, 2, 4, 6)$.
18. Prove se a seguinte expressão é uma soma mínima ou não. Faça isso da forma mais fácil possível (algebricamente, não usando mapas).

$$F = S' * T * U * V * W + S' * T * U' * W * Y + S' * T * V * W * X' * Y$$

19. O texto (do Wakerly) afirma que a tabela verdade ou o equivalente é o ponto de partida para métodos tradicionais de minimização combinatória. Um mapa de Karnaugh possui a mesma informação que uma tabela verdade. Dada uma expressão de soma de produtos, é possível escrever os 1s correspondentes a cada soma de produtos diretamente no mapa sem fazer uma tabela verdade explícita ou uma lista de mintermos, e seguir com a minimização do mapa. Desta forma, encontre uma expressão de soma de produtos mínima para cada uma das seguintes funções lógicas:

- a) $F = X' * Z + X * Y + X * Y' * Z$

- b) $F = A' * C' * D + B' * C * D + A * C' * D + B * C * D$

- c) $F = W' * X * Z' + W * X * Y * Z + W' * Z$

- d) $F = (W + Z') * (W' + Y' + Z') * (X + Y' + Z)$

- e) $F = A' * B' * C' * D' + A' * C' * D + B * C' * D' + A * B * D + A * B' * C'$

20. Um mapa de Karnaugh de cinco variáveis pode ser desenhado para uma função de cinco variáveis como mostrado na Figura X4.59 (ver no Wakerly). Em um mapa desses, as células que ocupam a mesma posição relativa nos submapas $V = 0$ e $V = 1$ são consideradas adjacentes. (Você pode encontrar muitos exemplos de mapas de Karnaugh de cinco variáveis na Seção 7.4.4 e na Seção JKSM.2 em DDPPonline). Encontre uma expressão de soma de produtos mínima para cada uma das seguintes funções usando um mapa de cinco variáveis:
- $F = \sum_{V,W,X,Y,Z}(5, 7, 13, 15, 16, 20, 25, 27, 29, 31)$
 - $F = \sum_{V,W,X,Y,Z}(0, 7, 8, 9, 12, 13, 15, 16, 22, 23, 30, 31)$
 - $F = \sum_{V,W,X,Y,Z}(0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 14, 20, 21, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30)$
 - $F = \sum_{V,W,X,Y,Z}(0, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 29, 30)$
 - $F = \prod_{V,W,X,Y,Z}(4, 5, 10, 12, 13, 16, 17, 21, 25, 26, 27, 29)$
 - $F = \sum_{V,W,X,Y,Z}(4, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 22, 25, 27, 28, 30) + d(1, 5, 29, 31)$
21. Um mapa de Karnaugh para uma função de seis variáveis pode ser desenhado como mostrado na Figura X4.60 (ver no Wakerly). Em um mapa desses, as células que ocupam a mesma posição relativa em submapas adjacentes são consideradas adjacentes. Minimize as seguintes funções usando mapas de seis variáveis:
- $F = \sum_{U,V,W,X,Y,Z}(1, 5, 9, 13, 21, 23, 29, 31, 37, 45, 53, 61)$
 - $F = \sum_{U,V,W,X,Y,Z}(0, 4, 8, 16, 24, 32, 34, 36, 37, 39, 40, 48, 50, 56)$
 - $F = \sum_{U,V,W,X,Y,Z}(2, 4, 5, 6, 12 - 21, 28 - 31, 34, 38, 50, 51, 60 - 63)$
22. (Circuito de Hamlet) Complete o diagrama temporal (ao lado da figura no Wakerly) e explique o funcionamento do circuito na Figura X4.61 (ver no Wakerly). Por que este circuito recebeu este nome?
23. Prove que um circuito AND-OR de dois níveis correspondente à soma completa de uma função lógica é sempre livre de corridas críticas.
24. Encontre uma função lógica de quatro variáveis cuja realização de soma de produtos mínima não é livre de corridas críticas, mas para a qual existe uma realização em soma de produtos sem corridas críticas com menos termos de produto do que a soma completa.
25. Refira ao mapa de Karnaugh na Figura 4-32(a) (ver no Wakerly). Imagine mover todos os 1s nessa função uma linha para cima. Ou seja, os 1s nas localizações 5, 12 e 13 vão para 4, 12 e 14, respectivamente. Descreva quais transformações ocorrem para W, X, Y e Z. *Dica:* Imagine que a função é $F = Y$. O que acontece se você mover o conteúdo de um mapa de Karnaugh uma coluna para a esquerda?