

Sistemas de Complemento de Base

1 Objetivos deste tópico

Ao final do estudo deste tópico você saberá:

- Os conceitos de Álgebra Booleana e Álgebra de Chaveamento
- Os axiomas e Teoremas da Álgebra de Chaveamento
- Os Teoremas de DeMorgan
- Demonstração de Teoremas por Indução Finita
- As portas lógicas Inversora, AND e OR
- O Diagrama Lógico
- O Princípio da Dualidade
- A Tabela Verdade
- Os conceitos de Literal, Termo Produto, Soma de Produtos, Termo Soma, Produto de Somas, Termo Normal, Mintermo e Maxtermo
- A Soma e o Produto Canônico

Leitura recomendada : seções do livro do Wakerly

- Section 4.1 - Switching Algebra
 - Section 4.1.1 - Axioms
 - Section 4.1.2 - Single-Variable Theorems
 - Section 4.1.3 - Two and Three-Variable Theorems
 - Section 4.1.4 - n-Variable Theorems
 - Section 4.1.5 - Duality
 - Section 4.1.6 - Standard Representations of Logic Functions

Keywords: Boolean Algebra, Switching Algebra, positive-logic convention, negative-logic convention, axiom, postulate, complement, algebraic operator, expression, NOT operation, logical multiplication, logical addition, precedence, AND operation, OR operation, theorem, perfect induction, binary operator, covering theorem, combining theorem, consensus theorem, finite induction, DeMorgan's theorems, generalized DeMorgan's theorems, complement of a logic expression, metatheorem, dual of a logic expression, truth table, literal, product term, sum-of-products expression, sum term, product-of-sums expression, normal term, minterm, maxterm, minterm number, maxterm number, canonical sum, minterm list, on-set, canonical product, maxterm list, off-set

2 Exercícios

Observação: estes exercícios foram traduzidos do livro "Digital Design - Principles and Practices", de John F. Wakerly, 4a. Edição

1. Use teoremas de álgebra de chaveamento para simplificar cada uma das seguintes funções lógicas:
 - a) $F = W * X * Y * Z * (W * X * Y * Z' + W * X' * Y * Z + W' * X * Y * Z + W * X * Y' * Z)$
 - b) $F = A * B + A * B * C' * D + A * B * D * E' + A' * B * C' * E + A' * B' * C' * E$
 - c) $F = M * R * P + Q * O' * R' + M * N + O * N * M + Q * P * M * O'$

2. Escreva a tabela verdade para cada uma das seguintes funções lógicas:
 - a) $F = X' * Y + X' * Y' * Z$
 - b) $F = W' * X + Y' * Z' + X' * Z$
 - c) $F = W' * X + W * (Y' + Z)$
 - d) $F = A * B' + B' * C + C * D' + C * A'$
 - e) $F = V * W' + X * Y' * Z$
 - f) $F = (A' + B' * C * D) * (B' + C' + D * E')$
 - g) $F = (W * Z)' * (X' + Y)'$
 - h) $F = (((A + B)') + C)' + D'$
 - i) $F = (A' + B + C') * (A' + B' + D) * (B + C + D') * (A + B + C + D)$

3. Escreva a tabela verdade para cada uma das seguintes funções lógicas:
 - a) $F = X' * Y' * Z' + X * Y * Z + X * Y' * Z$
 - b) $F = M' * N' + M * P + N' * P$
 - c) $F = A * B + A * B' * C' + A' * B * C$
 - d) $F = A' * B * (C * B * A' + B * C')$
 - e) $F = X * Y * (X' * Y * Z + X * Y' * Z + X * Y * Z' + X' * Y' * Z)$
 - f) $F = M * N + M' * N' * P'$

$$g) F = (A + A') * B + B * A * C' + C * (A + B') * (A' + B)$$

$$h) F = X * Y' + Y * Z + Z' * X$$

4. Escreva a soma e o produto canônicos para cada uma das seguintes funções lógicas:

$$a) F = \sum_{X,Y}(1, 2)$$

$$b) F = \prod_{A,B}(0, 1, 2)$$

$$c) F = \sum_{A,B,C}(1, 2, 4, 6)$$

$$d) F = \prod_{W,X,Y}(0, 2, 3, 6, 7)$$

$$e) F = X' + Y * Z$$

$$f) F = V + (W * X)'$$

5. Escreva a soma e o produto canônicos para cada uma das seguintes funções lógicas:

$$a) F = \sum_{X,Y,Z}(0, 3)$$

$$b) F = \prod_{A,B,C}(1, 2, 4)$$

$$c) F = \sum_{A,B,C,D}(1, 2, 5, 6)$$

$$d) F = \prod_{M,N,P}(0, 1, 3, 6, 7)$$

$$e) F = X' + Y * Z' + Y * Z$$

$$f) F = A' * B + B' * C + A$$

6. De acordo com o teorema de DeMorgan, o complemento de $W * X + Y * Z$ é $W' + X' * Y' + Z'$. Entretanto, ambas as funções são 1 para $WXYZ = 1110$. Como podem tanto a função quanto o seu complemento serem 1 para o mesmo valor de entrada? O que está errado aqui?

7. Prove os teoremas T2-T5 usando indução perfeita.

8. Prove os teoremas T1'-T3' e T5' usando indução perfeita.

9. Prove os teoremas T6-T9 usando indução perfeita.

10. Com as variáveis NERD, DESIGNER, FAILURE e STUDIED, escreva uma expressão Booleana que é verdadeira para designers de sucesso que nunca estudaram e para nerds que estudaram o tempo inteiro.

11. Projete um circuito lógico não-trivial que contenha um loop de feedback mas que a saída dependa apenas da entrada atual.

12. Prove o teorema T10 sem utilizar indução perfeita, mas assumindo que os teoremas T1-T9 e T1'-T9' são verdadeiros.

13. Mostre que o teorema T10 é apenas um caso especial do teorema T11 usado em conjunto com o teorema T9.

14. Prove que $(X + Y') * Y = X * Y$ sem usar indução perfeita. Você pode assumir que os teoremas T1-T11 e T1'-T11' são verdadeiros.

15. Prove que $(X + Y) * (X' + Z) = X * Z + X' * Y$ sem usar indução perfeita. Você pode assumir que os teoremas T1-T11 e T1'-T11' são verdadeiros.
16. Mostre que uma porta OR com n entradas pode ser substituída por duas portas OR com $(n - 1)$ entradas. É possível fazer a mesma afirmação sobre portas NOR? Justifique a sua resposta.
17. Quantas formas fisicamente diferentes existem para se implementar $V * W * X * Y * Z$ usando quatro portas AND de 2 entradas (4/4 de um 74x08)? Justifique a sua resposta.
18. Use a álgebra de chaveamento para provar que acoplar duas entradas de uma porta AND ou OR de $(n + 1)$ entradas dá a ela a funcionalidade de uma porta de n entradas.
19. Prove os teoremas de DeMorgan (T13 e T13') usando indução finita.
20. Qual o símbolo lógico que mais aproxima a realização interna de uma porta NOR TTL? Ver a Figura 4-4.
21. Use os teoremas da álgebra de chaveamento para reescrever a seguinte expressão usando o menor número possível de inversões.

$$B' * C + A * C * D' + A' * C + E * B' + E * (A + C) * (A' + D')$$

22. Prove os teoremas de expansão de Shannon.
23. Os teoremas de expansão de Shannon generalizados “tiram” não apenas uma, mas i variáveis de forma que uma função lógica pode ser escrita como uma soma ou um produto de 2^i termos. Descubra e descreva os teoremas de expansão de Shannon generalizados.
24. Mostre como as representações de funções lógicas em somas e produtos canônicos seguem a partir dos teoremas de expansão de Shannon generalizados.
25. Prove ou desprove as seguintes proposições:
 - (a) Sejam A e B variáveis de álgebra de chaveamento. Então $A * B = 0$ e $A + B = 1$ implicam que $A = B'$.
 - (b) Sejam X e Y expressões de álgebra de chaveamento. Então $X * Y = 0$ e $X + Y = 1$ implicam que $X = Y'$.
26. Uma porta OR exclusivo (XOR) é uma porta de duas entradas em que a saída é 1 se e somente se apenas uma de suas entradas é 1. Escreva a tabela verdade, a expressão de soma de produtos e o circuito AND-OR correspondente para a função XOR.
27. Uma porta NOR exclusivo (XNOR) é uma porta de duas entradas em que a saída é 1 se e somente se suas entradas forem iguais. Escreva a tabela verdade, a expressão de soma de produtos e o circuito AND-OR correspondente para a função XNOR.
28. Do ponto de vista da álgebra de chaveamento, qual é a função de uma porta XNOR de duas entradas em que as entradas foram acopladas? Como o comportamento de uma porta XNOR real pode ser diferente?

29. Depois de completar o projeto e a fabricação de um sistema digital baseado em SSI, um projetista percebe que mais um inversor é necessário. Entretanto, as únicas partes disponíveis no sistema são uma porta OR de duas entradas, uma AND de três entradas e uma XNOR de duas entradas. Como o projetista deveria implementar a função inversora sem adicionar outro circuito integrado?
30. Um conjunto de tipos de portas lógicas que pode implementar qualquer função lógica é chamado de um conjunto completo de portas lógicas. Por exemplo, portas AND de duas entradas, portas OR de duas entradas e inversores são um conjunto completo, pois qualquer função lógica pode ser expressada como uma soma de produtos de variáveis e de seus complementos e portas AND e OR com qualquer número de entradas podem ser feitas a partir de portas com duas entradas. Portas NAND de duas entradas formam um conjunto completo de portas lógicas? Prove sua resposta.
31. Portas AND de duas entradas em que uma das entradas é invertida formam um conjunto completo de portas lógicas? Prove sua resposta. Por que este tipo de porta poderia ser chamado de uma porta "inibida"? Isso significa que uma porta AND padrão poderia ser chamada de "desinibida"?
32. Portas XNOR de duas entradas formam um conjunto completo de portas lógicas? Prove sua resposta.
33. Algumas pessoas pensam que existem *quatro* funções lógicas básicas: AND, OR, NOT e BUT. A Figura X4.42 (ver no Wakerly) é um símbolo possível para a porta BUT com quatro entradas e duas saídas. Invente uma função útil e não-trivial para a porta BUT. A função tem de possuir algo a ver com o nome (BUT). Perceba que devido a simetria do símbolo, a função deve ser simétrica em relação às entradas A e B de cada seção e em relação às seções 1 e 2. Descreva sua função BUT e escreva a tabela verdade correspondente.
34. Escreva expressões lógicas para as saídas Z1 e Z2 da porta BUT que você projetou no exercício anterior e desenhe um diagrama lógico correspondente usando portas AND, OR e inversores.
35. Quantas funções lógicas não-triviais de n variáveis existem? "Não-trivial" significa, neste contexto, uma função em que todas as variáveis afetam a saída.
36. Um sistema digital que inclui três sinais, X , Y e Z , foi projetado de forma que, o tempo todo, pelo menos dois desses três sinais são 1. Neste sistema, quantas funções lógicas diferentes de três variáveis $F(X, Y, Z)$ existem? Funções são consideradas diferentes apenas se as suas saídas diferirem para pelo menos uma das combinações de entradas. Escreva uma expressão algébrica simplificada para cada função.
37. A maioria dos estudantes não tem problema em usar o teorema T8 para colocar variáveis em evidência, mas tem problemas para usar o teorema T8' para distribuir variáveis. Como a dualidade pode ser usada para superar este problema?
38. Uma função lógica auto-dual é uma função F tal que $F = F^D$. Qual das seguintes funções são auto-duais? (Aqui, \oplus denota a operação XOR).

- a) $F = X$
- b) $F = \sum_{X,Y,Z}(1, 2, 5, 7)$
- c) $F = X' * Y * Z' + X * Y' * Z' + X * Y$
- d) $F = W * (X \oplus Y \oplus Z \oplus W') + (X \oplus Y \oplus Z)$
- e) Uma função F de seis variáveis tal que $F = 1$ se e somente se três ou mais variáveis são 1
- f) Uma função F de nove variáveis tal que $F = 1$ se e somente se cinco ou mais variáveis são 1
39. Quantas funções lógicas auto-duais de n entradas existem? (Dica: Considere a estrutura da tabela verdade de uma função auto-dual.)
40. Prove que qualquer função lógica de n entradas $F(X_1, \dots, X_n)$ que pode ser escrita na forma $F = X_1 * G(X_2, \dots, X_n) + X_1' * G^D(X_2, \dots, X_n)$ é auto-dual.