

Introdução a filtros digitais

Theo Pavan e Adilton Carneiro
TAPS

Filtro anti-aliasing

- Com um sinal já digitalizado não é possível distinguir entre uma frequência *alias* e uma frequência que realmente esteja entre 0 e a frequência de Nyquist.
- Em situações nas quais frequências indesejáveis estão acima da frequência de Nyquist podem aparecer como frequência *alia* no espectro de frequência adquirido. Portanto, é preciso remover essas frequências antes de passar por um conversor A/D.
- Para isso pode-se usar um filtro (analógico) anti-aliasing passa-baixas antes do sinal ser digitalizado.

Filtros digitais - introdução

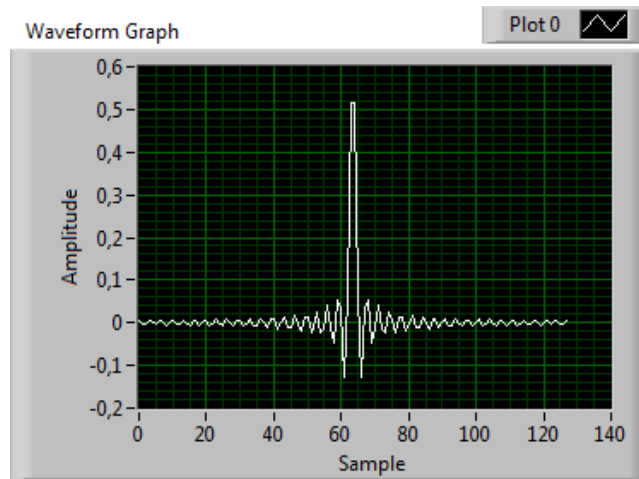
- O processo de filtragem altera o conteúdo de frequência de um sinal.
- Por exemplo, o controle *bass* em um sistema sonoro altera as componentes de baixas frequências. Enquanto que o controle *treble* altera as componentes de altas frequências do sinal.
- No processo de filtragem o objetivo é separar as componentes de interesse de um sinal de seu sinal não filtrado (*raw data*). Por ex. batimento cardíaco de um bebe no útero materno.

Vantagens de um filtro digital

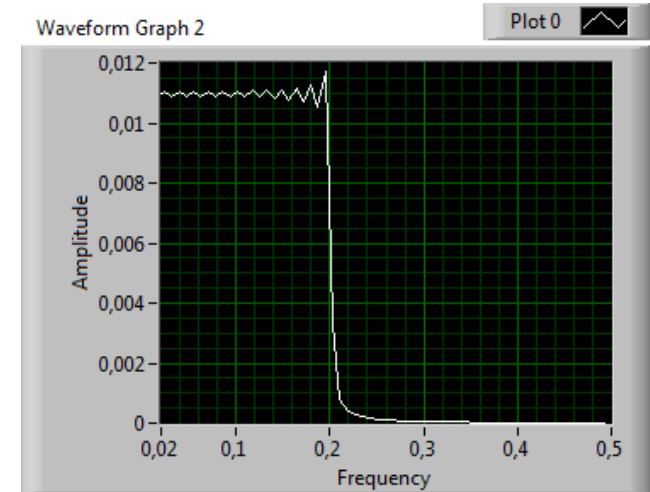
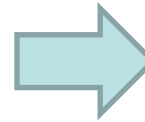
- Atualmente, existem ferramentas avançadas, tanto para amostragem como processamento dos sinais.
- Portanto, aplicações que precisam de flexibilidade (como monitoramento médico), os filtros digitais podem exibir algumas vantagens em comparação com filtros analógicos.
- São programáveis via software.
- São menos suscetíveis a variações em temperatura e umidade.
- Podem exibir um bom benefício na relação performance/custo.
- Não sofrem variações com o tempo.
- Não dependem de características de componentes analógicos.
- Filtros com banda larga com transições agudas.

Resposta de um filtro

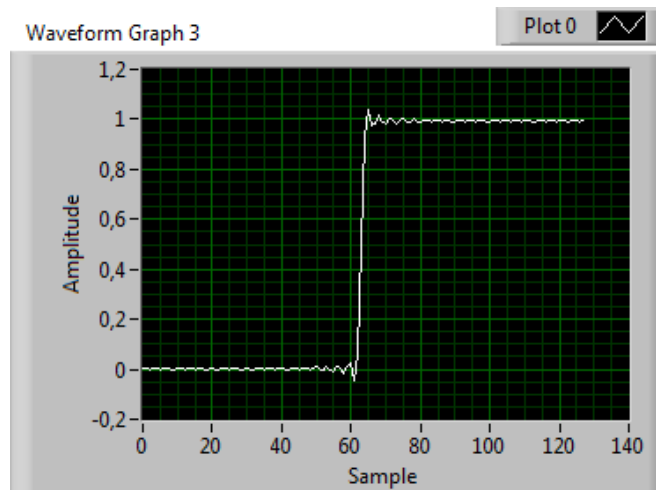
Ao impulso



FFT



A uma função degrau



Escala linear \rightarrow ripple
banda de passagem e
transição de banda.

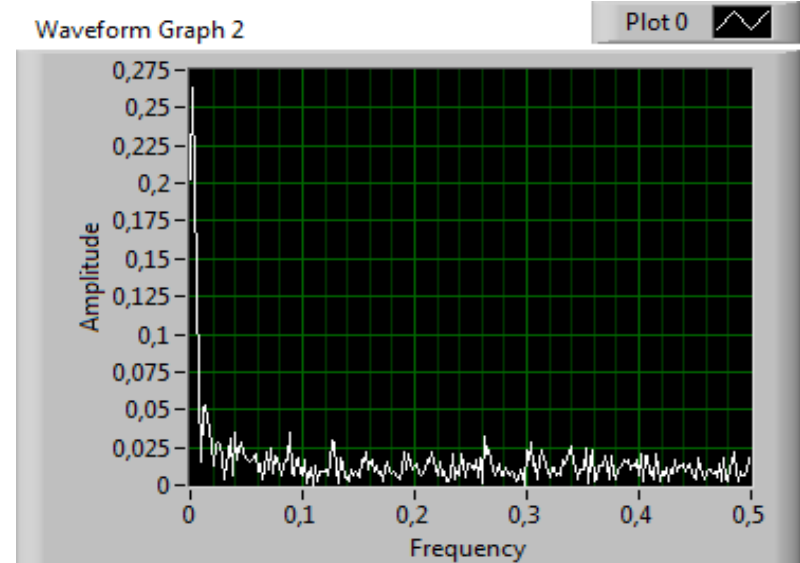
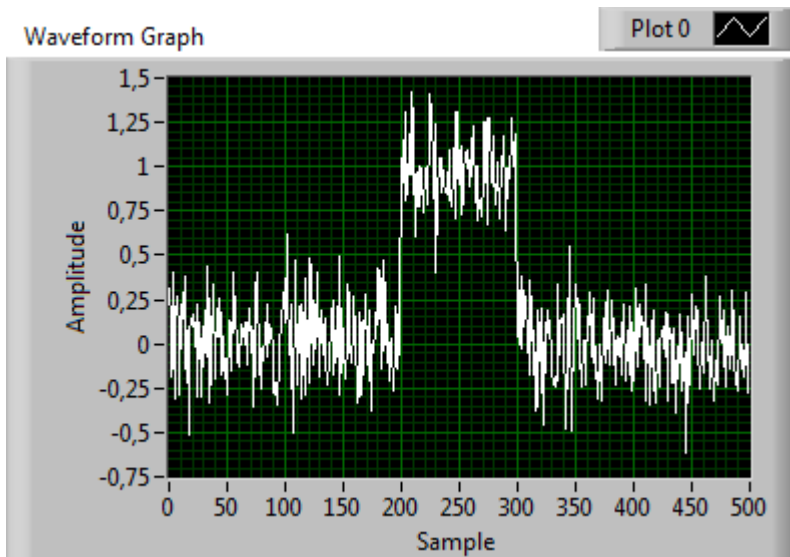
Escala dB \rightarrow Atenuação
da banda de corte.

Introdução

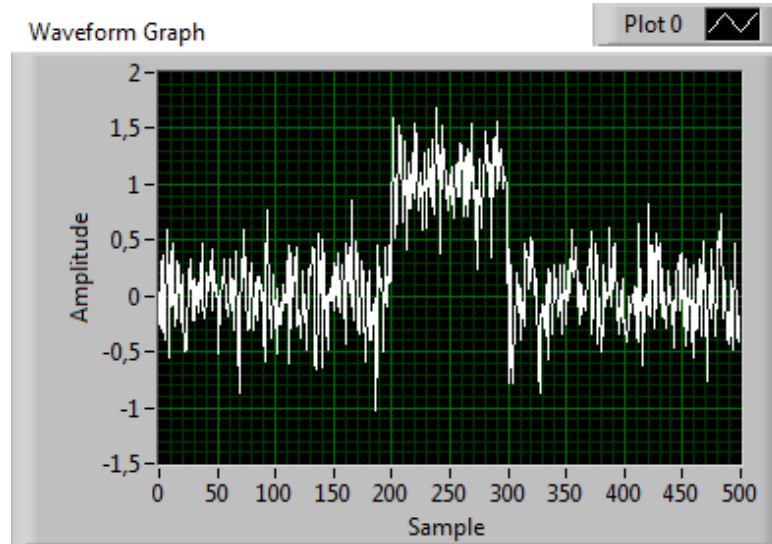
Qual filtro usar para minimizar o ruído?

Sinal → pulso quadrado

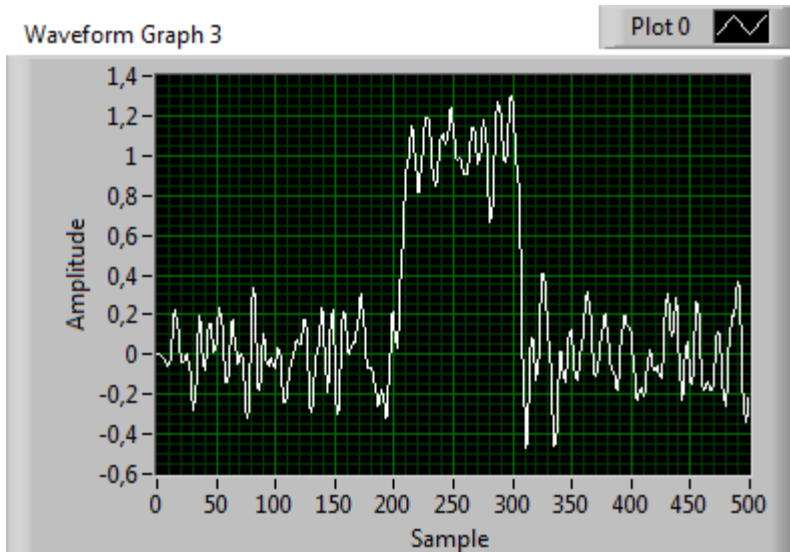
Magnitude da FFT



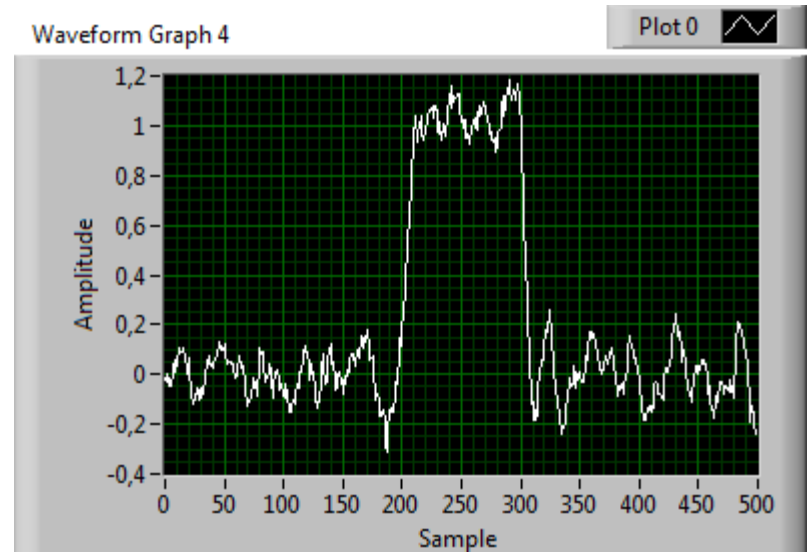
Sinal original



**Passa baixas - Butterworth -
9 polos - $f_c = 0,05$**



Média móvel - 11 pontos



Média móvel

- Filtro muito comum e fácil de entender.
- Aplicável em situações em que ruídos aleatórios de alta amplitude e curta duração.
- Reduzir ruído mantendo transições agudas.
- Pouco efetivo para separar bandas de frequência de um sinal.

Média móvel

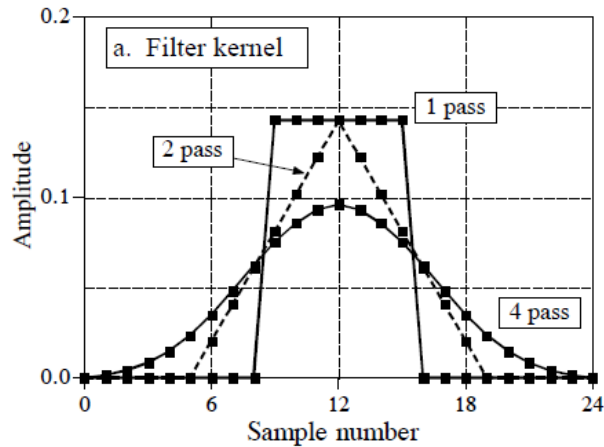
$$y[i] = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x[i+j]$$

$$y[80] = \frac{x[80] + x[81] + x[82] + x[83] + x[84]}{5}$$

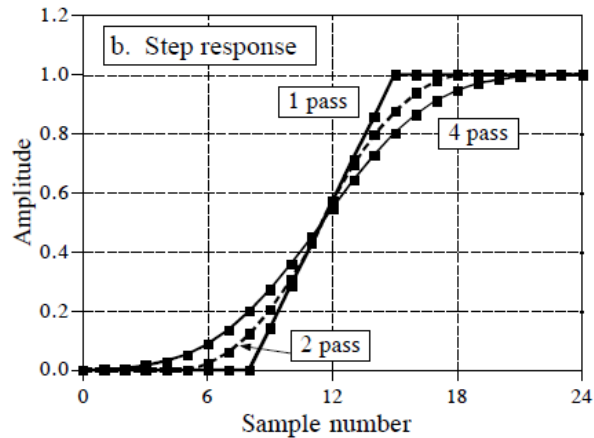
$$y[80] = \frac{1}{5}x[80] + \frac{1}{5}x[81] + \frac{1}{5}x[82] + \frac{1}{5}x[83] + \frac{1}{5}x[84]$$

Convolução do sinal de entrada com um pulso retangular de área 1

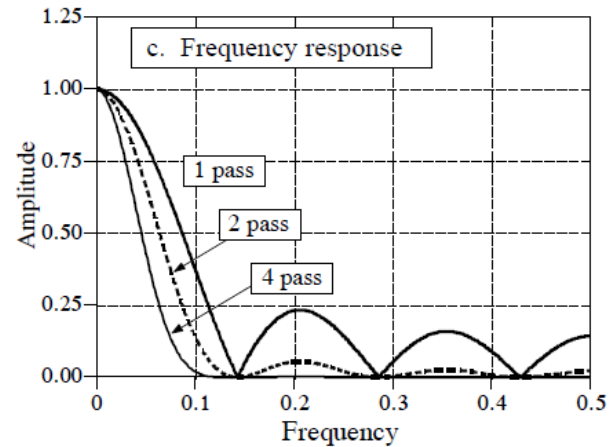
Média móvel



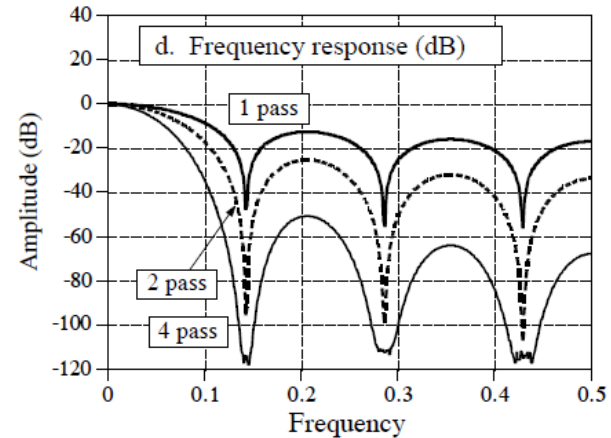
Integrate



FFT



$20 \text{ Log}(\)$



Implementação recursiva

$$y[50] = x[47] + x[48] + x[49] + x[50] + x[51] + x[52] + x[53]$$

$$y[51] = x[48] + x[49] + x[50] + x[51] + x[52] + x[53] + x[54]$$

$$y[51] = y[50] + x[54] - x[47]$$

$$y[i] = y[i - 1] + x[i + p] - x[i - q]$$

where: $p = (M - 1) / 2$

$$q = p + 1$$

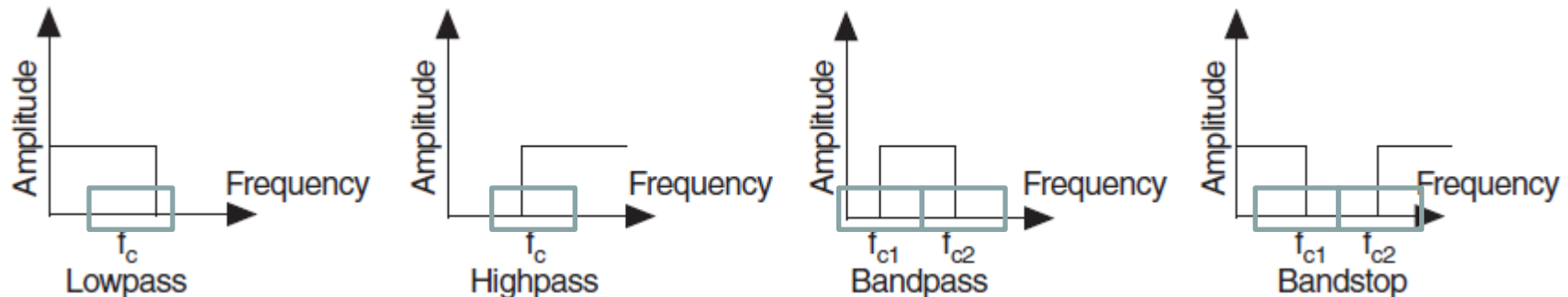
$M \rightarrow$ número de pontos na janela

Filtros digitais ideais no domínio da frequência

Um filtro ideal para separação de bandas de frequências permite que uma extensão de frequências específicas de interesse passe (banda de passagem), enquanto que extensão de frequências não desejadas seja atenuada (banda de corte).

Um filtro ideal tem ganho de 0 dB na banda de passagem e assim a amplitude do sinal não é afetada. E uma atenuação de $-\infty$ dB na banda de corte.

Na prática filtros ideais não existem!

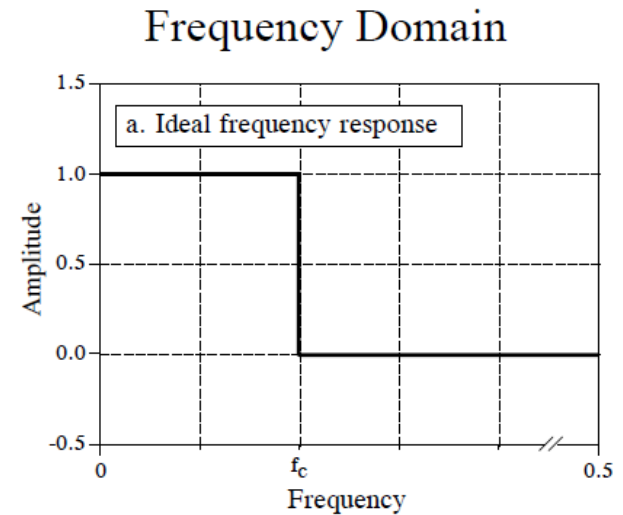
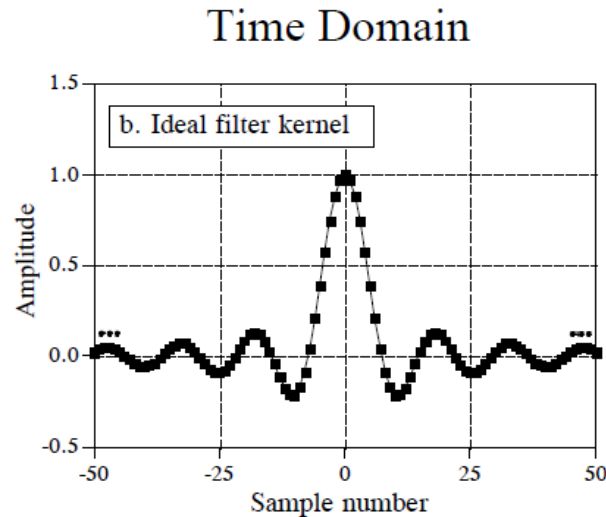


$f_c, f_{c1}, f_{c2} \rightarrow$ frequências de corte

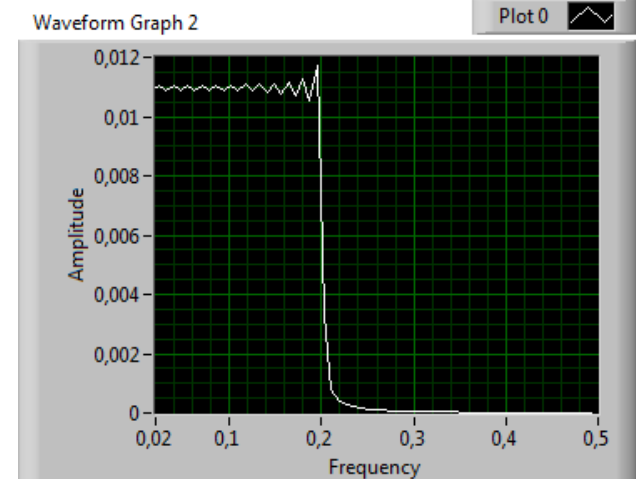
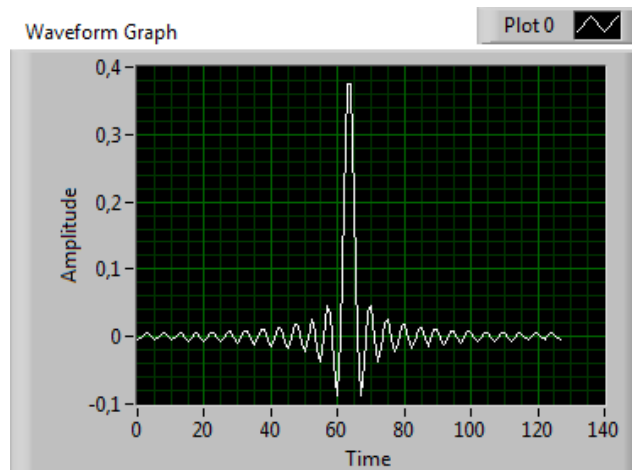
Filtro windowed-sinc

Temporalmente qual seria o filtro ideal no domínio da frequência?

Sinal infinito

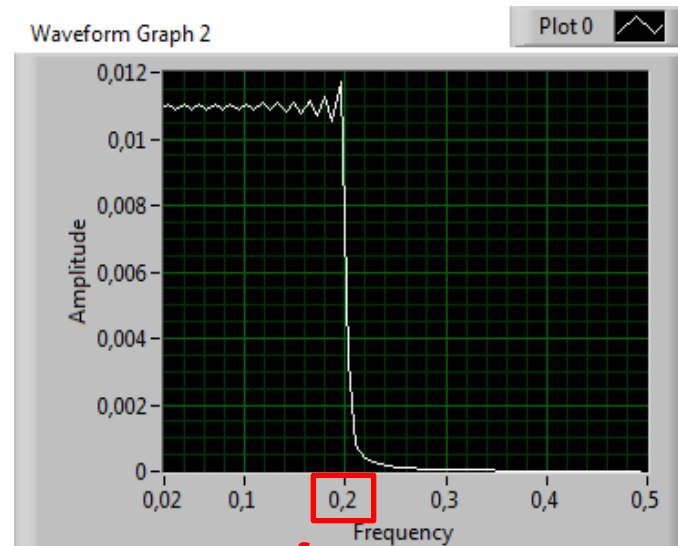
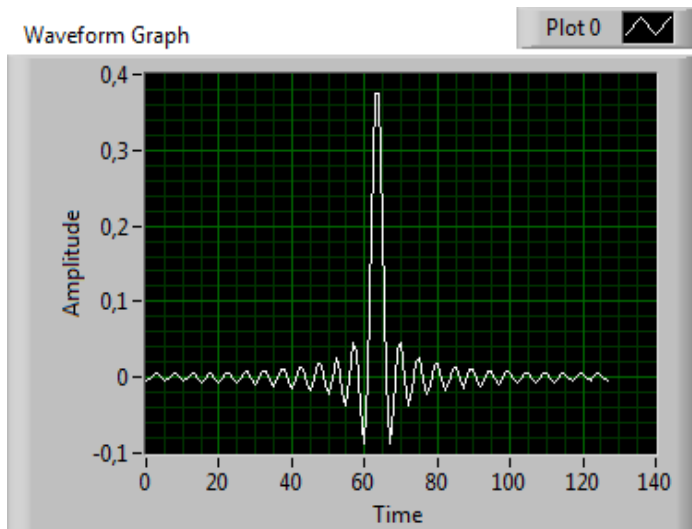
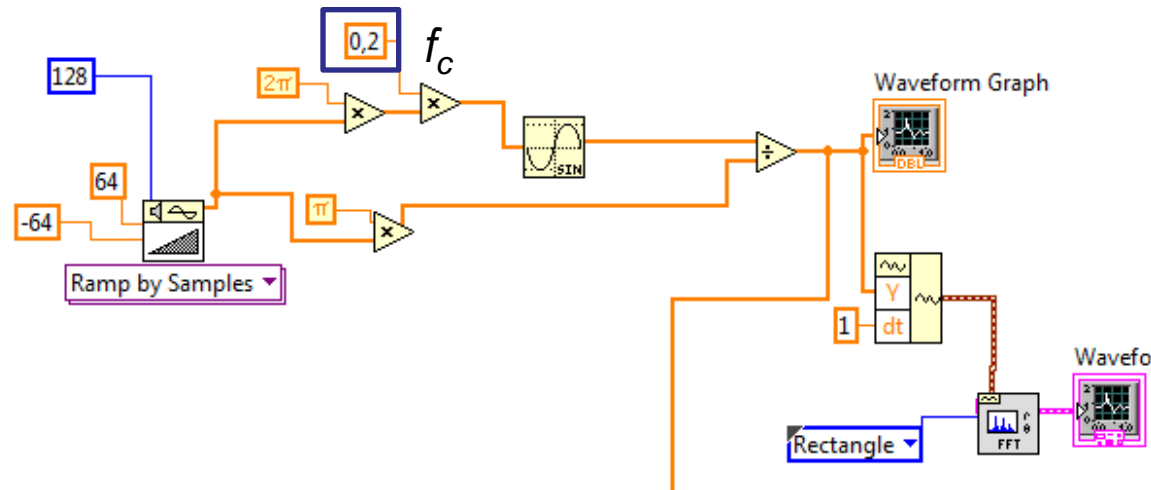


Sinal real
Truncado



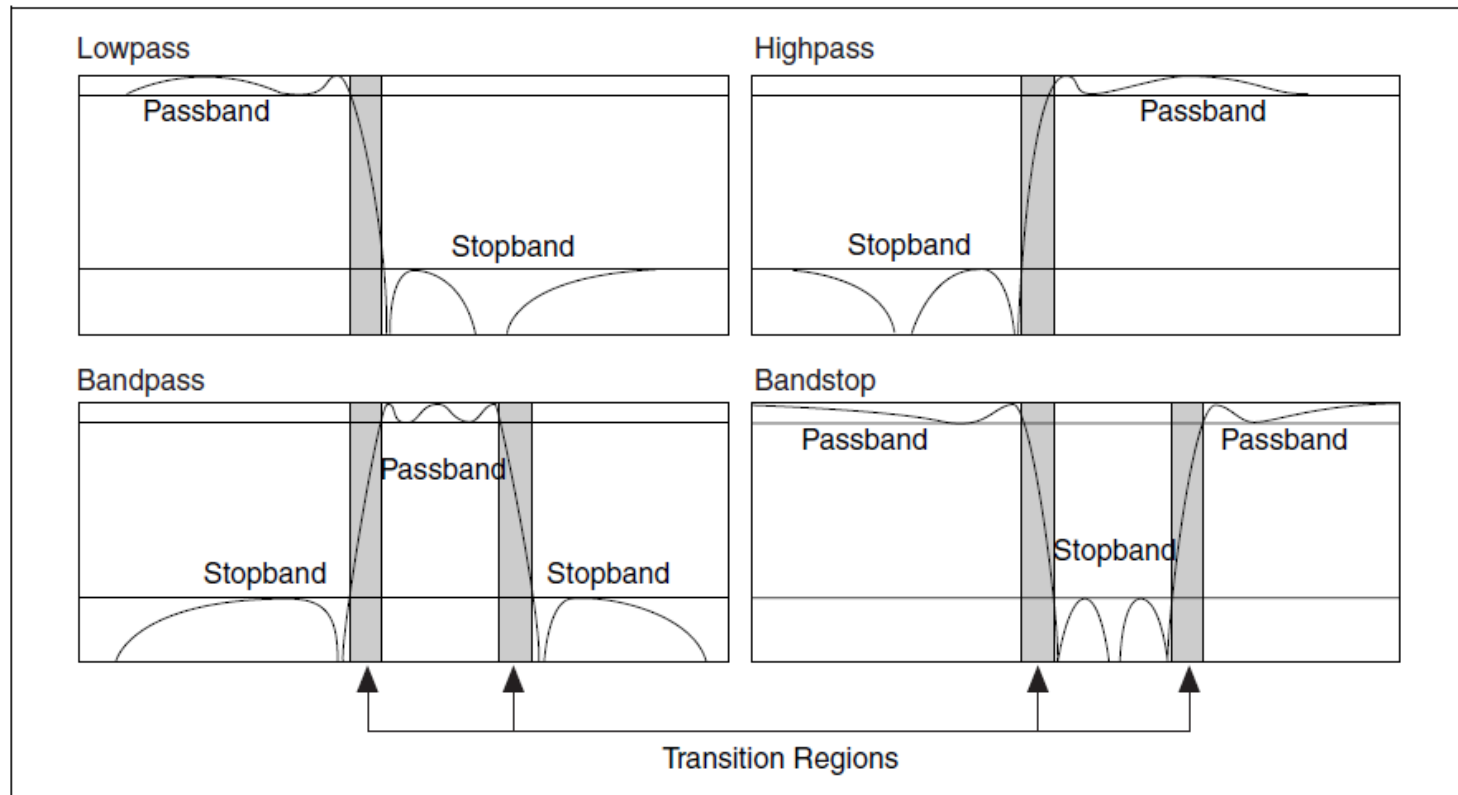
Filtro windowed-sinc

$$h[i] = \frac{\sin(2\pi f_c i)}{i\pi}$$



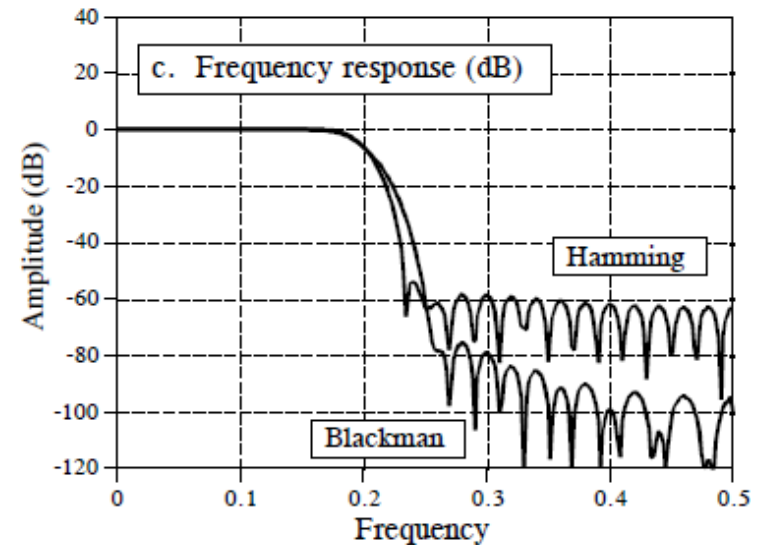
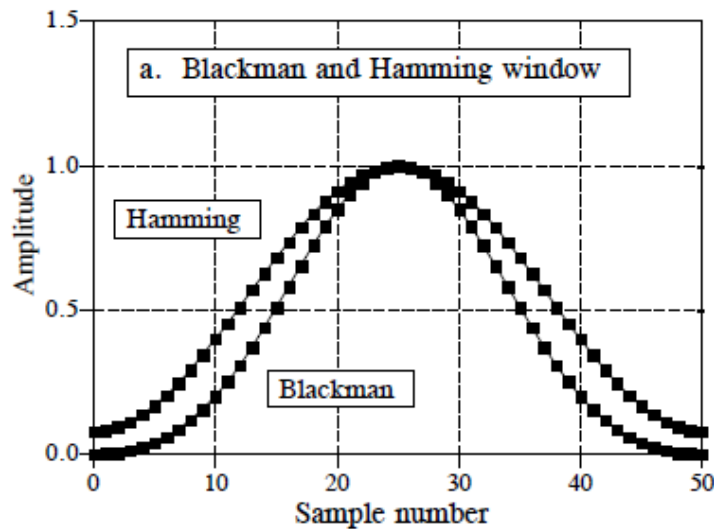
f_c

Filtros não ideais



O ganho na banda de passagem pode diferir um pouco de um ganho unitário. Esse fenômeno é conhecido como *ripple* da banda de passagem.

Filtro windowed-sinc - janelado



Hamming \rightarrow -53dB (\sim 0.2%)

Blackman \rightarrow -74dB (\sim 0.02%)

Atenuação da banda de corte

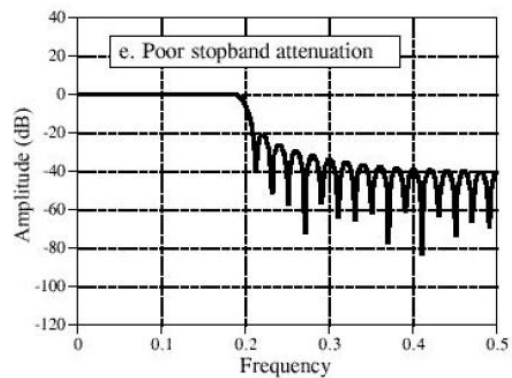
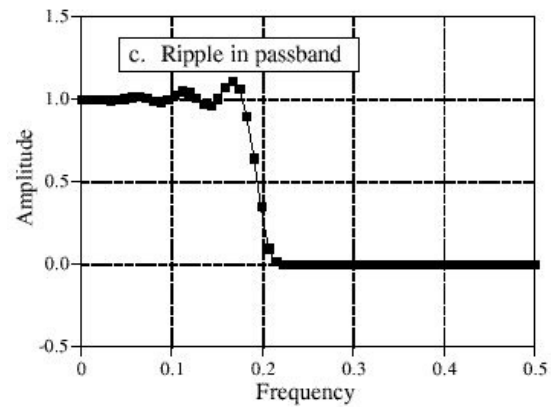
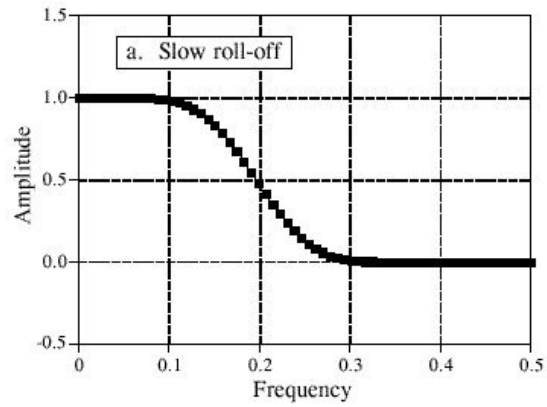
- O *ripple* da banda de passagem e a atenuação da banda de corte são normalmente representados em decibels (dB).

$$\text{dB} = 20 \log \left(\frac{A_o(f)}{A_i(f)} \right)$$

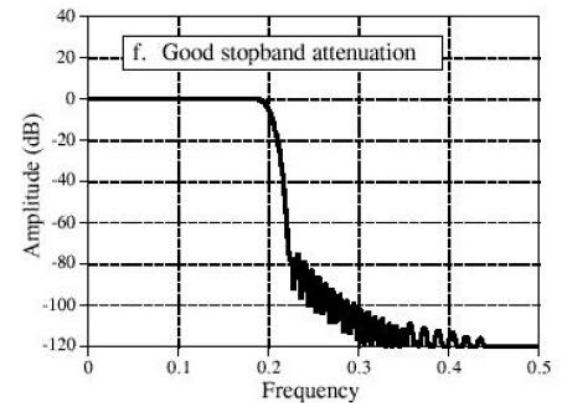
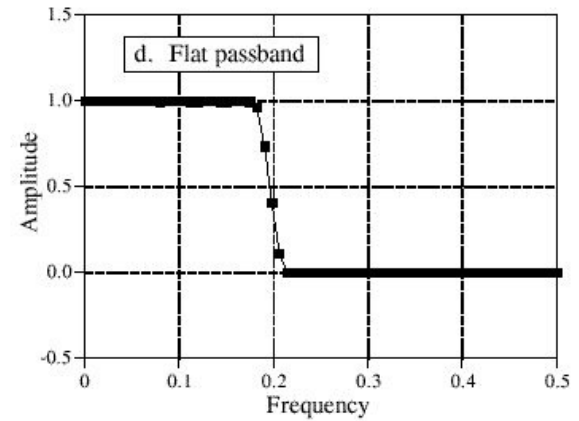
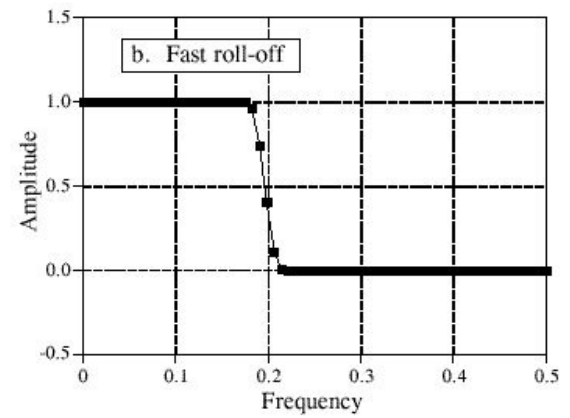
$A_i(f)$ → amplitude do sinal em uma frequência particular **f antes** de ser filtrado.

$A_o(f)$ → amplitude do sinal em uma frequência particular **f após** ser filtrado.

POOR

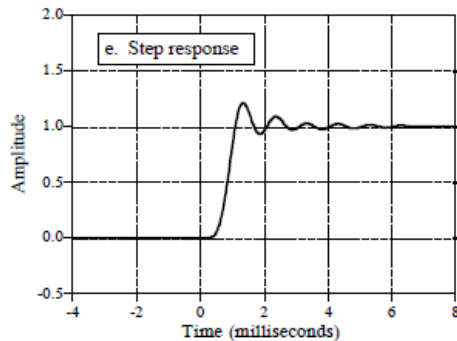
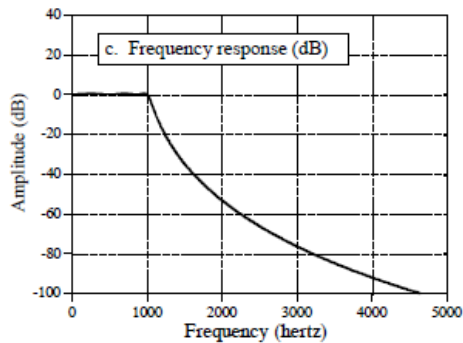
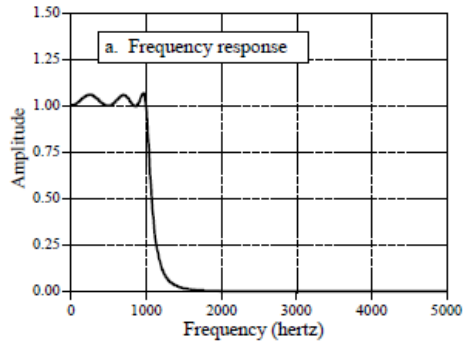


GOOD

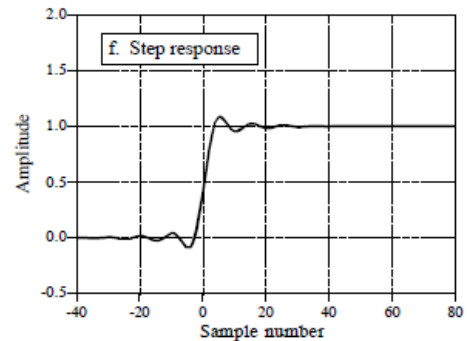
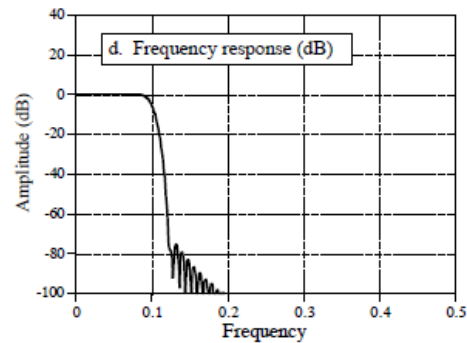
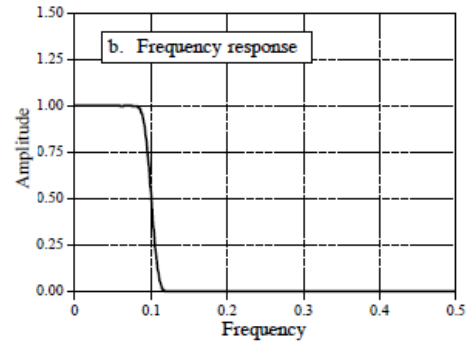


Analógico vs. Digital

Analog Filter
(6 pole 0.5dB Chebyshev)



Digital Filter
(129 point windowed-sinc)



FIR vs IIR

- Filtros digitais podem ser implementados por convolução.
 - **Filtros com resposta ao impulso finita (FIR – *Finite Impulse Response*).**
 - Nessa situação cada amostra da saída é uma média ponderada de amostras do sinal de entrada.
- **Filtros recursivos podem ter resposta ao impulso infinitamente longa.** Essa resposta é composta por senoides com amplitude que decaem exponencialmente.
 - **IIR - *Infinite Impulse Response***

FIR vs. IIR

- **FIR *Finite Impulse Response* → filtros não recursivos**
- **IIR *Infinite Impulse Response* → filtros recursivos**

Para ilustrar a diferença: exemplo de um caixa.

- $x[k]$ → custo do item atual registrado no caixa
- $x[k-1]$ → custo do item anterior registrado no caixa
- $y[k] = x[k] + x[k-1] + x[k-2] + x[k-3] + \dots + x[1]$ → valor total registrado
- Para um total de N itens temos $y[N]$.

O total pode também ser reescrito como: $y[k] = y[k-1] + x[k]$

FIIR vs. IIR

$$y[k] = a_k x[k] + a_{k-1} x[k-1] + a_{k-2} x[k-2] + a_{k-3} x[k-3] + \dots$$



Representação
de um filtro **não recursivo**
FIR

$$y[k] = y[k-1] + a_k x[k]$$



Representação
de um filtro **recursivo**

$$y[k] = a_k x[k] + a_{k-1} x[k-1] + a_{k-2} x[k-2] + \dots + b_{k-1} y[k-1] + b_{k-2} y[k-2] + \dots$$



Representação
de um filtro **recursivo**
IIR

Os coeficiente dos filtros IIR são desenvolvidos baseados na transformada-z.

Pela transformada-z

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Transformada-z de um sinal discreto x

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

***H(z)* é a transformada-z da resposta ao impulso *h*. Conhecida como função de transferência.**

$$y(n) = \sum_{j=0}^M a_j x(n-j) + \sum_{l=1}^N b_l y(n-l)$$

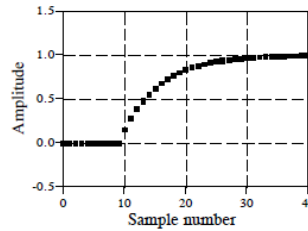
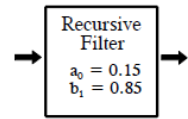
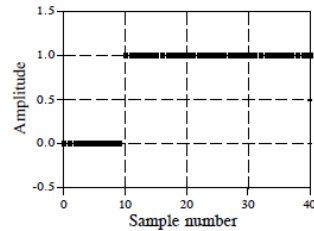
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{j=0}^M a_j z^{-j}}{1 - \sum_{l=1}^N b_l z^{-l}}$$

Igualando a zero → Zeros

Igualando a zero → Polos

Exemplo filtro IIR

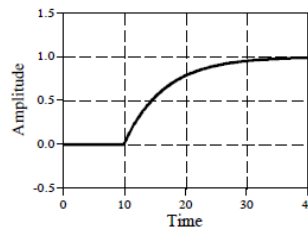
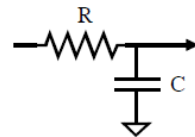
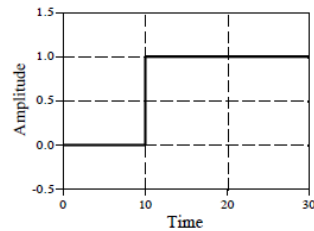
Digital Filter



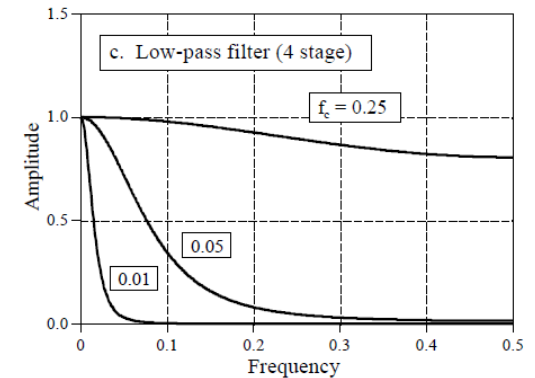
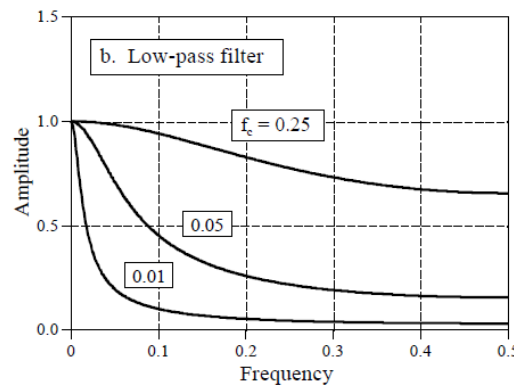
Coeficientes do filtro de um polo

$$y[k] = 0,15x[k] + 0,85y[k-1]$$

Analog Filter



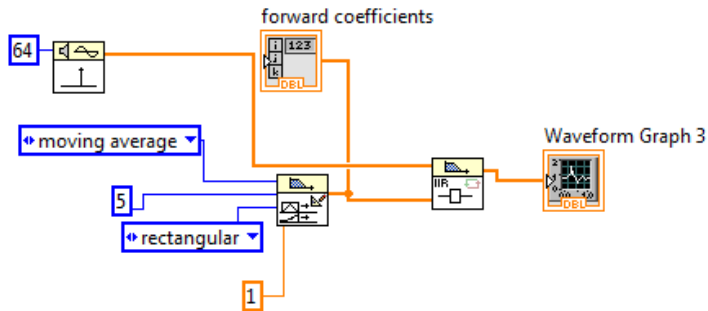
Resposta ao impulso



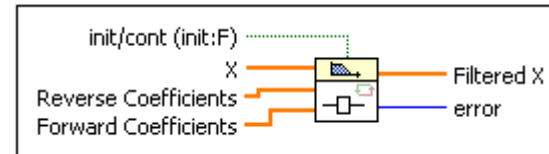
No LabView

$$y_i = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{j=0}^{N_i-1} b_j x_{i-j} - \sum_{k=1}^{N_i-1} a_k y_{i-k} \right)$$

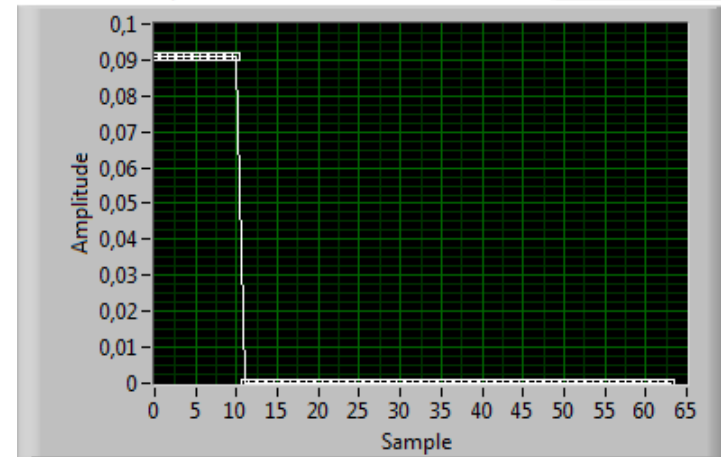
Média móvel de 11 pontos



IIR Filter (CDB)

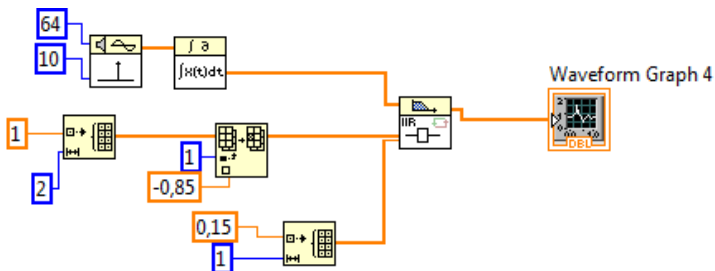


Waveform Graph 3

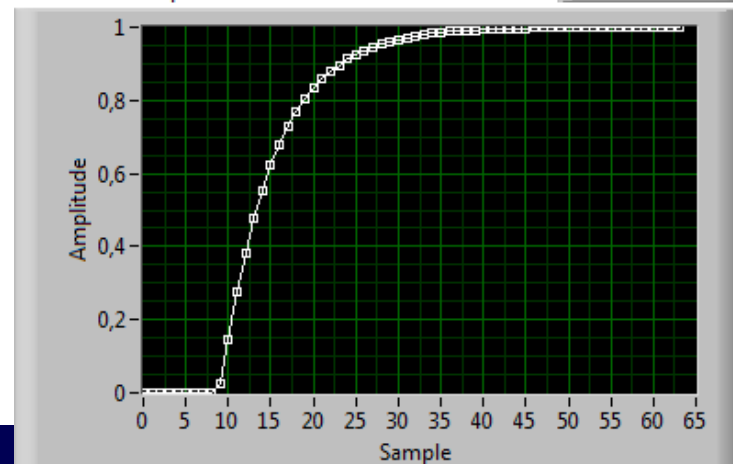


Filtro IIR

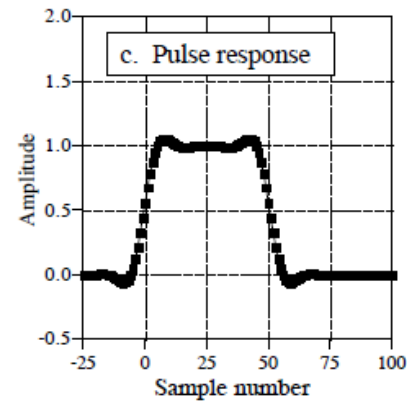
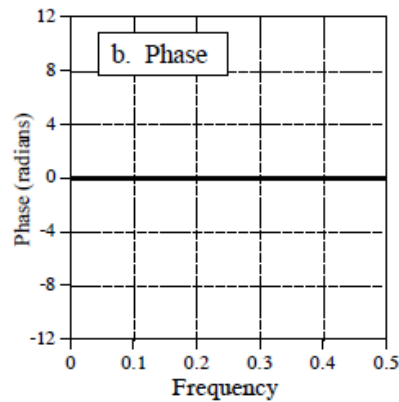
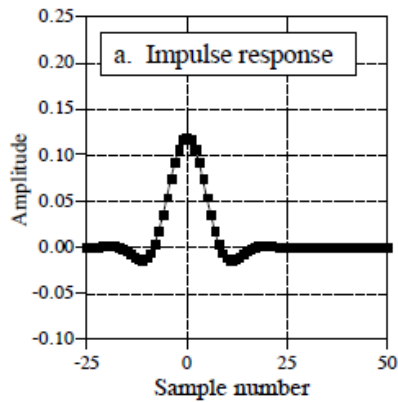
$$y[k] = 0,15x[k] + 0,85*y[k-1]$$



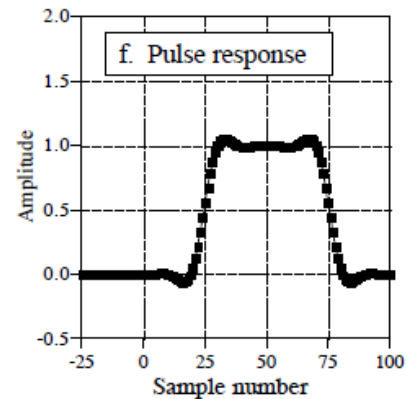
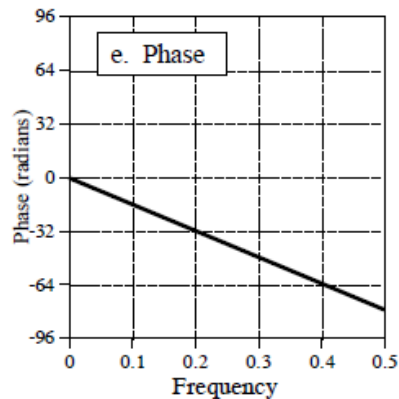
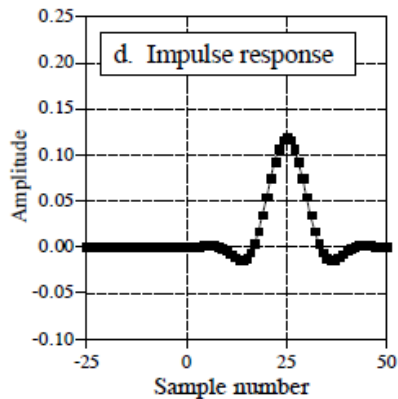
Waveform Graph 4



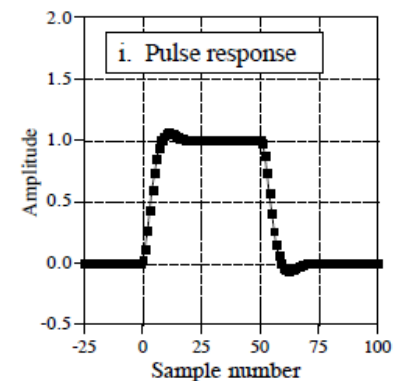
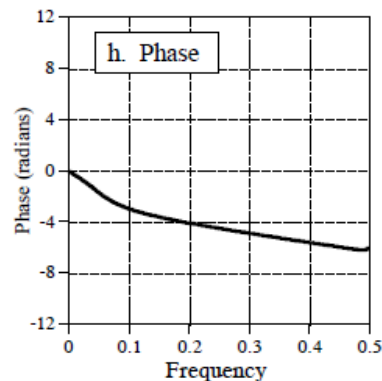
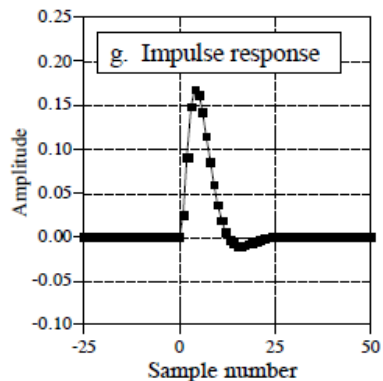
Zero Phase Filter



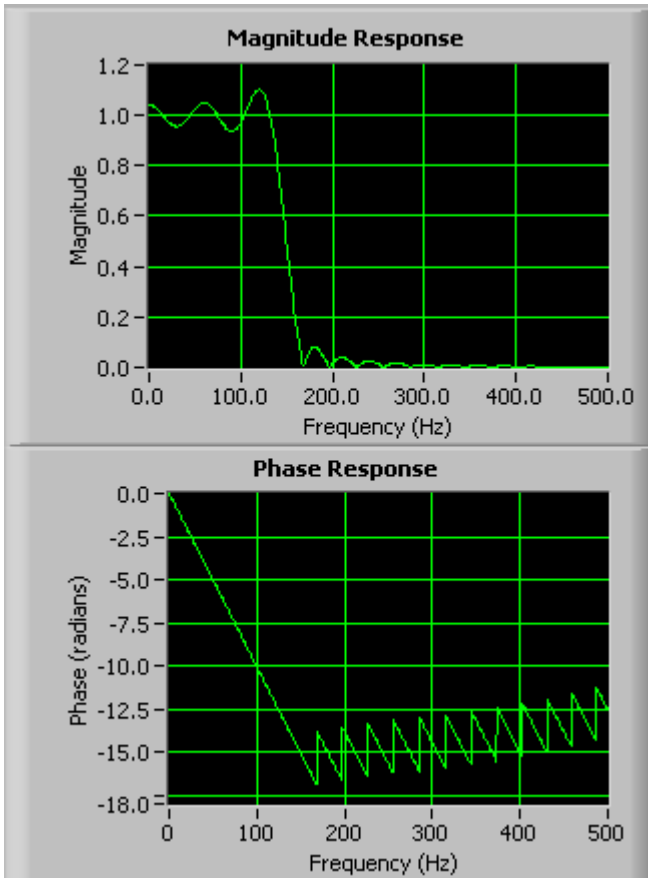
Linear Phase Filter



Nonlinear Phase Filter



Resposta ao impulso - FIR

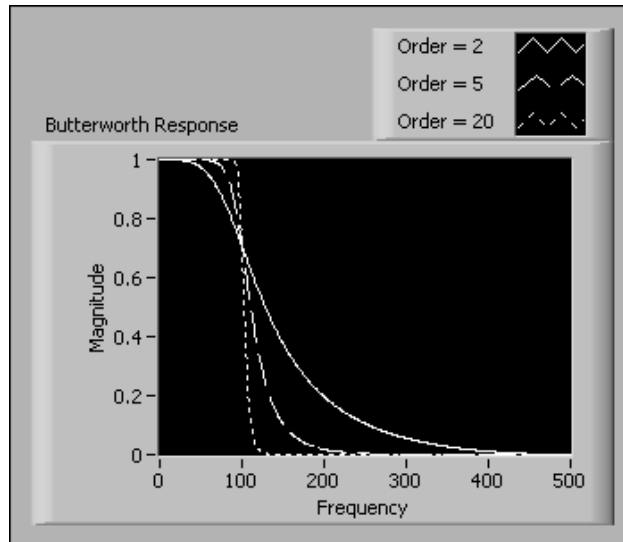


Filtros FIR possuem as seguintes características:

- Podem atingir uma melhor linearidade de fase.**
- São sempre estáveis.**
- Permitem que sejam filtrados por convolução.**

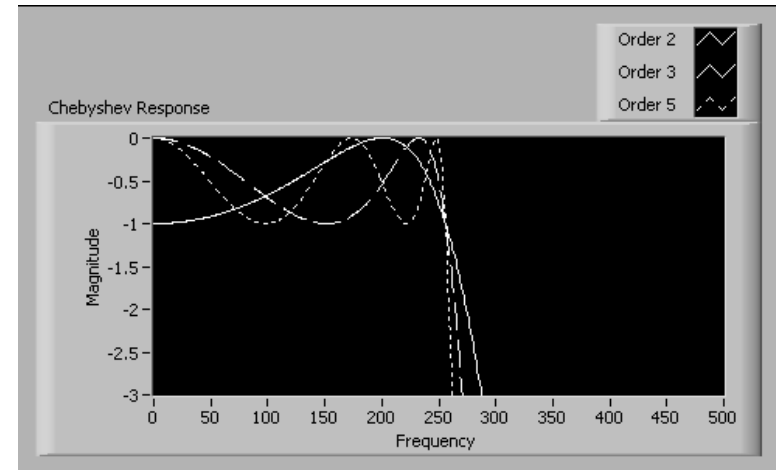
Resposta ao impulso - IIR

Butterworth



- Respostas suaves em todas as frequências.
- Decréscimo monotônico na frequência de corte.
 - A frequência de 3 dB corresponde à frequência de corte.
- Resposta plana nas bandas de corte e de passagem.

Chebyshev

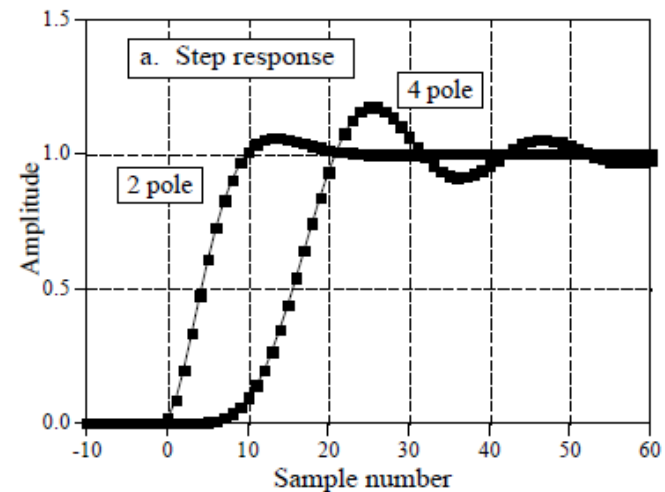
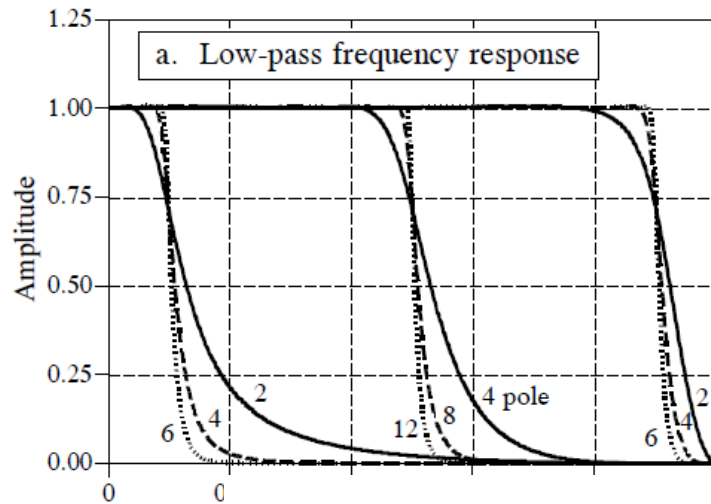


Comparado ao filtro Butterworth o filtro Chebyshev, consegue transições mais agudas com um filtro de ordem mais baixa.

Produz erros absolutos menores e uma execução mais veloz.

Filtro Chebyshev

0,5 % ripple



336

The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing

f_c	2 Pole	4 Pole	6 Pole
0.01	a0= 8.663387E-04 a1= 1.732678E-03 b1= 1.919129E+00 a2= 8.663387E-04 b2= -9.225943E-01	a0= 4.149425E-07 (!! Unstable !!) a1= 1.659770E-06 b1= 3.893453E+00 a2= 2.489655E-06 b2= -5.688233E+00 a3= 1.659770E-06 b3= 3.695783E+00 a4= 4.149425E-07 b4= -9.010106E-01	a0= 1.391351E-10 (!! Unstable !!) a1= 8.348109E-10 b1= 5.883343E+00 a2= 2.087027E-09 b2= -1.442798E+01 a3= 2.782703E-09 b3= 1.887786E+01 a4= 2.087027E-09 b4= -1.389914E+01 a5= 8.348109E-10 b5= 5.459909E+00 a6= 1.391351E-10 b6= -8.939932E-01
0.025	a0= 5.112374E-03 a1= 1.022475E-02 b1= 1.797154E+00 a2= 5.112374E-03 b2= -8.176033E-01	a0= 1.504626E-05 a1= 6.018503E-05 b1= 3.725385E+00 a2= 9.027754E-05 b2= -5.226004E+00 a3= 6.018503E-05 b3= 3.270902E+00 a4= 1.504626E-05 b4= -7.705239E-01	a0= 3.136210E-08 (!! Unstable !!) a1= 1.881726E-07 b1= 5.691653E+00 a2= 4.704314E-07 b2= -1.353172E+01 a3= 6.272419E-07 b3= 1.719966E+01 a4= 4.704314E-07 b4= -1.232689E+01 a5= 1.881726E-07 b5= 4.722721E+00 a6= 3.136210E-08 b6= -7.556340E-01
0.05	a0= 1.868823E-02 a1= 3.737647E-02 b1= 1.593937E+00 a2= 1.868823E-02 b2= -6.686903E-01	a0= 2.141509E-04 a1= 8.566037E-04 b1= 3.425455E+00 a2= 1.284906E-03 b2= -4.479272E+00 a3= 8.566037E-04 b3= 2.643718E+00 a4= 2.141509E-04 b4= -5.933269E-01	a0= 1.771089E-06 a1= 1.062654E-05 b1= 5.330512E+00 a2= 2.656634E-05 b2= -1.196611E+01 a3= 3.542179E-05 b3= 1.447067E+01 a4= 2.656634E-05 b4= -9.937710E+00 a5= 1.062654E-05 b5= 3.673283E+00 a6= 1.771089E-06 b6= -5.707561E-01

f_c	2 Pole	4 Pole	6 Pole
0.01	a0= 8.663387E-04 a1= 1.732678E-03 b1= 1.919129E+00 a2= 8.663387E-04 b2= -9.225943E-01	a0= 4.149425E-07 (!! Unstable !!) a1= 1.659770E-06 b1= 3.893453E+00 a2= 2.489655E-06 b2= -5.688233E+00 a3= 1.659770E-06 b3= 3.695783E+00 a4= 4.149425E-07 b4= -9.010106E-01	a0= 1.391351E-10 (!! Unstable !!) a1= 8.348109E-10 b1= 5.883343E+00 a2= 2.087027E-09 b2= -1.442798E+01 a3= 2.782703E-09 b3= 1.887786E+01 a4= 2.087027E-09 b4= -1.389914E+01 a5= 8.348109E-10 b5= 5.459909E+00 a6= 1.391351E-10 b6= -8.939932E-01
0.025	a0= 5.112374E-03 a1= 1.022475E-02 b1= 1.797154E+00 a2= 5.112374E-03 b2= -8.176033E-01	a0= 1.504626E-05 a1= 6.018503E-05 b1= 3.725385E+00 a2= 9.027754E-05 b2= -5.226004E+00 a3= 6.018503E-05 b3= 3.270902E+00 a4= 1.504626E-05 b4= -7.705239E-01	a0= 3.136210E-08 (!! Unstable !!) a1= 1.881726E-07 b1= 5.691653E+00 a2= 4.704314E-07 b2= -1.353172E+01 a3= 6.272419E-07 b3= 1.719986E+01 a4= 4.704314E-07 b4= -1.232689E+01 a5= 1.881726E-07 b5= 4.722721E+00 a6= 3.136210E-08 b6= -7.556340E-01
0.05	a0= 1.868823E-02 a1= 3.737647E-02 b1= 1.593937E+00 a2= 1.868823E-02 b2= -6.686903E-01	a0= 2.141509E-04 a1= 8.566037E-04 b1= 3.425455E+00 a2= 1.284906E-03 b2= -4.479272E+00 a3= 8.566037E-04 b3= 2.643718E+00 a4= 2.141509E-04 b4= -5.933269E-01	a0= 1.771089E-06 a1= 1.062654E-05 b1= 5.330512E+00 a2= 2.656634E-05 b2= -1.196611E+01 a3= 3.542179E-05 b3= 1.447067E+01 a4= 2.656634E-05 b4= -9.937710E+00 a5= 1.062654E-05 b5= 3.673283E+00 a6= 1.771089E-06 b6= -5.707561E-01

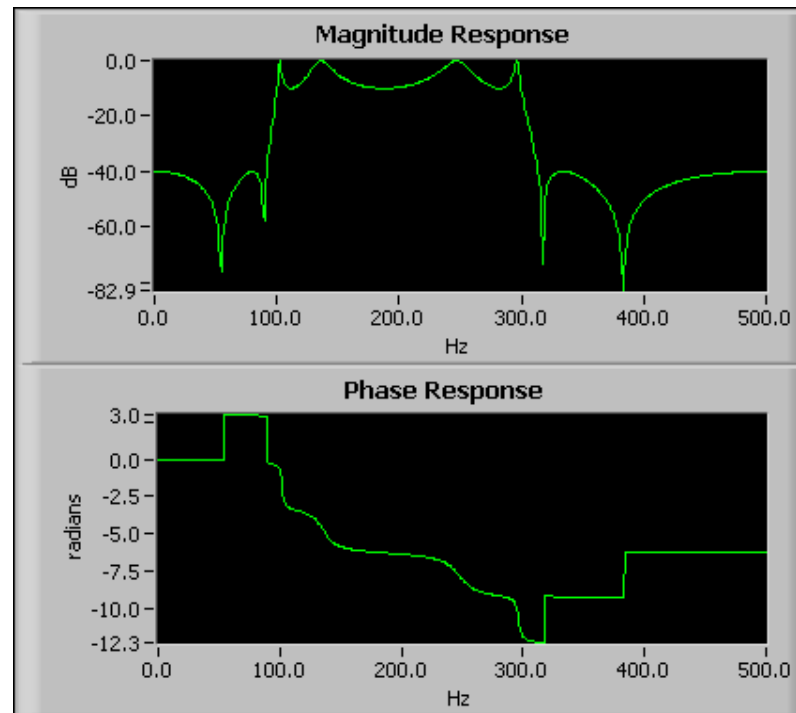
TABLE 20-3
The maximum number of
poles for single precision.

Cutoff frequency	0.02	0.05	0.10	0.25	0.40	0.45	0.48
Maximum poles	4	6	10	20	10	6	4

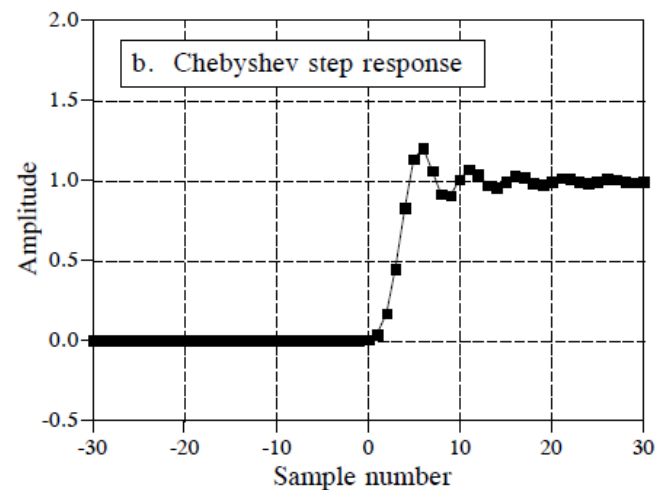
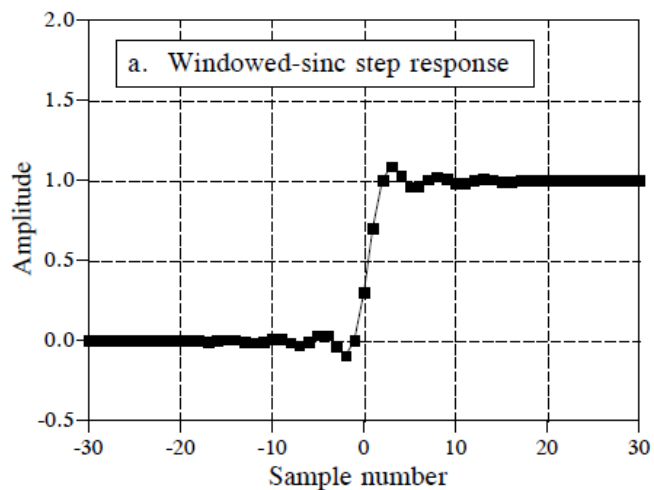
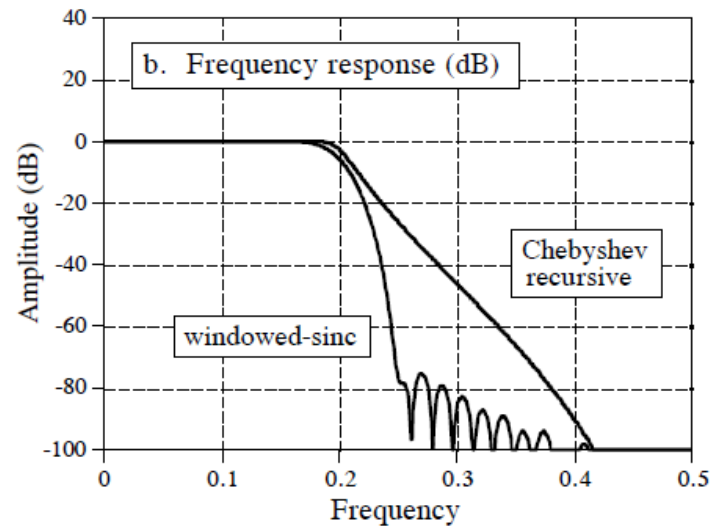
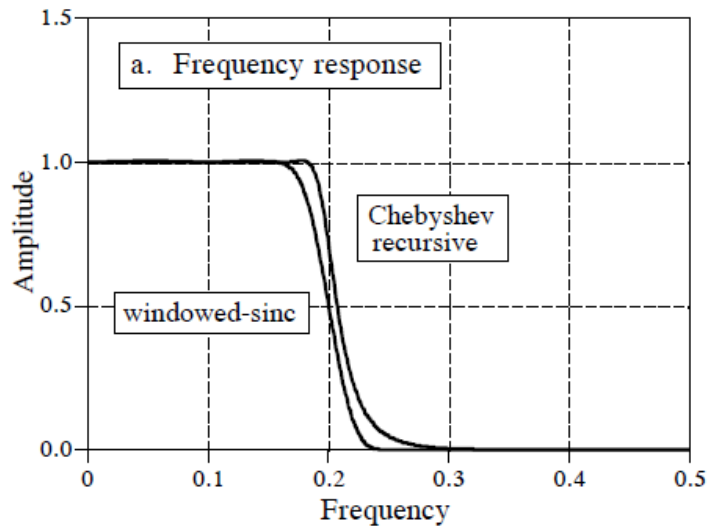
Resposta ao impulso - IIR

Resposta de magnitude e fase de um filtro IIR passa-banda elíptico

Esse é o tipo de filtro em que a transição de bandas ocorre mais rapidamente. Possui *ripple* na banda de passagem e de corte.



Comparações - Windowed-Sinc vs. Chebyshev

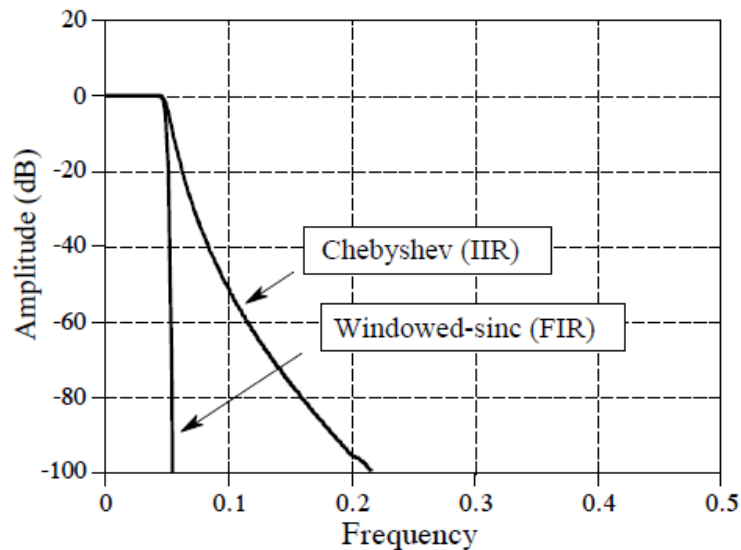


Comparações - Windowed-Sinc vs. Chebyshev

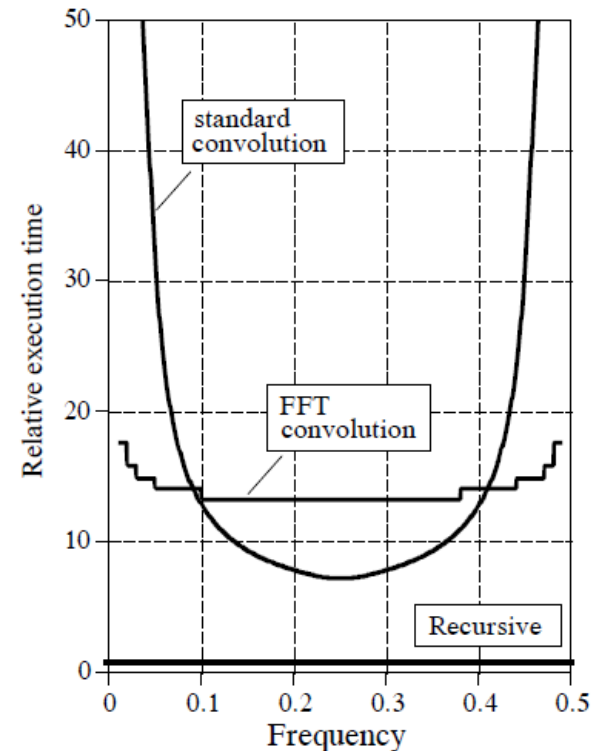
Filtro IIR é Chebyshev de 6 polos com 0,5% de *ripple*

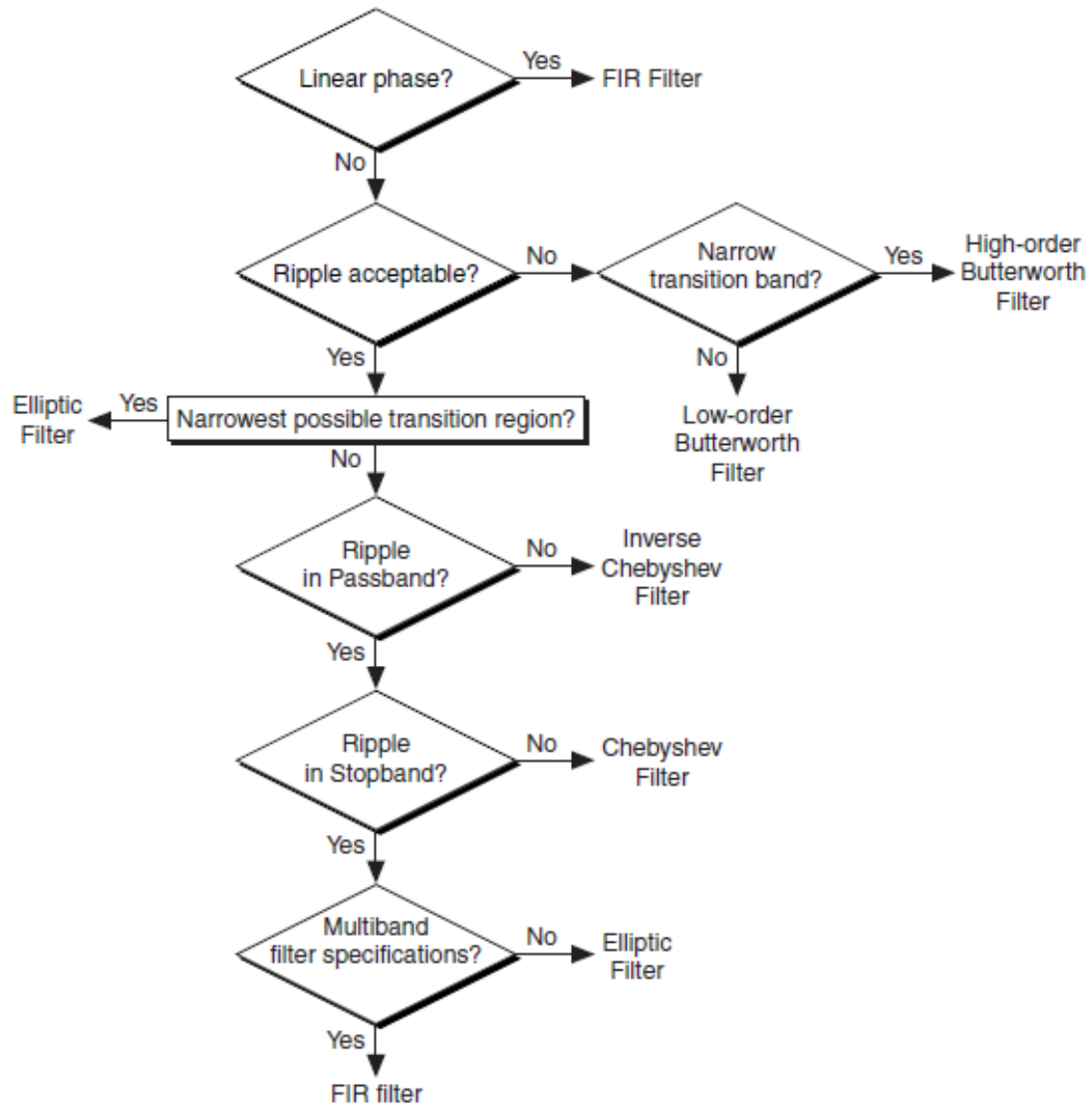
O windowed-sinc contém 1001 pontos

Desempenho



Velocidade





Bibliografia

- SMITH, S.W. The Scientist and Engineer's Guide to Signal Processing (<http://www.dspguide.com/>)
- A. V. OPPENHEIM; A. S. Willsky. Sinais e Sistemas, 2ª ed., 2010.
- OPPENHEIM; R. W. SCHAFFER & J. R. BUCK. Discrete-Time Signal Processing. Prentice Hall, 2ª ed., 1999.
- CLARK C.L. LabView Digital Signal Processing and Digital Communications.
- Labview Analysis Concepts
<http://www.ni.com/pdf/manuals/370192c.pdf>
- Exemplos LabView.