

Transformada de Fourier

Theo Pavan e Adilton Carneiro
TAPS

Análise de Fourier

- Análise de Fourier - representação de funções por somas de senos e cossenos ou soma de exponenciais complexas
- Uma análise datada da época dos babilônios para prever eventos astronômicos, estudada por muitos cientistas desde então.
- Jean Baptiste Joseph Fourier, por volta de 1807, completou um trabalho no qual observou que séries senoidais harmonicamente relacionadas eram úteis na representação da distribuição de temperatura de um corpo.

Análise de Fourier

- Fourier foi quem mais percebeu a potencialidade dessa análise. Mas sofreu forte oposição, i.e. Lagrange.
- 1829 → P. L. Dirichlet desenvolveu a sustentação matemática para descrever um sinal periódico por séries de Fourier.
- Ferramenta mais importante nas análises de sinais.

Série de Fourier

Uma função periódica pode ser descrita por:

$$(S_N f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Em que a_0, a_n, b_n são os coeficientes de Fourier

Representação série de Fourier

- $x(t)$ pode ser expresso como uma combinação linear de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas.
- Sinal de tempo contínuo e periódico.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t},$$

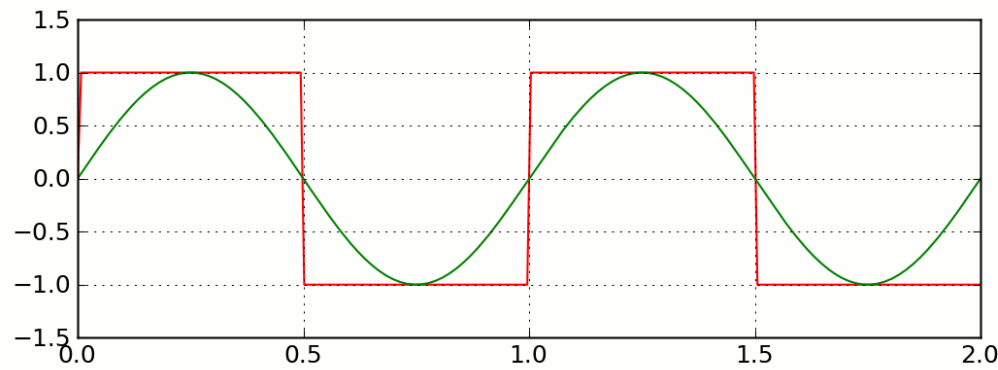
$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk(2\pi/T)t} dt.$$

Síntese

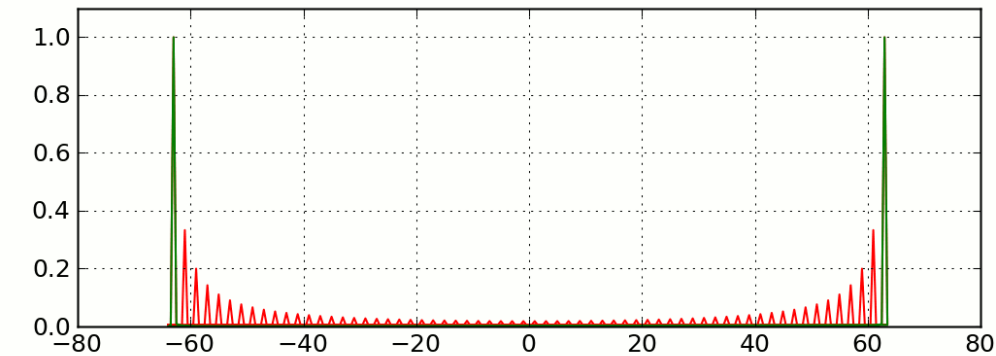
Análise

Fenômeno de Gibbs

- Onda quadrada descrita como soma de senoides:



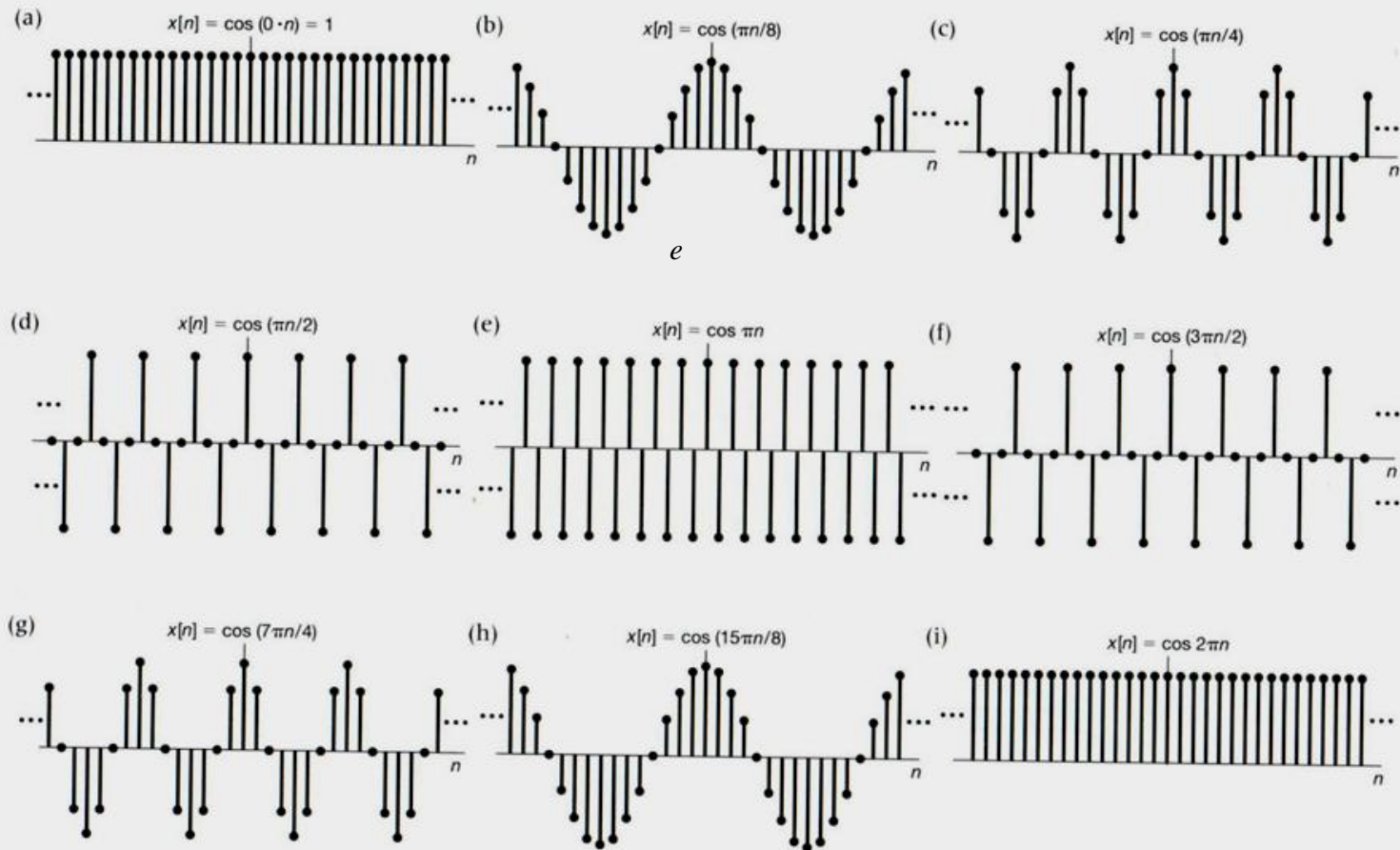
$$\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots$$



Exponenciais complexas de tempo discreto

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$$

Figura 1.27 Sequências senoidais de tempo discreto para diferentes frequências.



Série de Fourier para sinais discretos

$$x[n] = x[n + r.N]$$

A frequência fundamental é
 $\omega_0 = 2\pi/N$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

$$X[k] = X[k+rN]$$

**Existem apenas N
exponenciais complexas
de tempo discreto que
são periódicas com
período N**

Transformada de Fourier

- As transformadas são usadas para analisar uma função em um outro domínio.
- A transformada de Fourier, por exemplo, transforma um sinal no domínio do tempo para o domínio de frequência.
- Enquanto que a transformada inversa de Fourier realiza o procedimento inverso. Domínio da frequência para o domínio do tempo.

Transformada de Fourier

- Existem muitas formas para se decompor um sinal.
- Um dos motivos para o uso de senoides é que esses são mais fáceis de interpretar que os sinais originais.
- Senoides e exponenciais complexas quando entrada para sistemas LIT são também saídas desses sistemas.

DFT – Discrete Fourier Transform

Transformada de Fourier

Transformada inversa de Fourier

$$F(\omega) \equiv \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\omega t} dt \quad f(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j2\pi\omega t} d\omega$$

Na computação digital a transformada de Fourier precisa ser corretamente adequada para sinais discretos. Consideremos uma função $\mathbf{x[n]}$ periódica com período fundamental \mathbf{N} .

$$x[n] = x[n + r.N]$$

A frequência fundamental é
 $\omega_0 = 2\pi/N$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

$X[k] \rightarrow$ Coeficientes da série discreta de Fourier.
Harmonicamente relacionados.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

$x[n] \rightarrow$ sequência discreta de um sinal contínuo no tempo $x(t)$.

DFT – Discrete Fourier Transform

- A TF em tempo discreto compartilha muitas semelhanças com a TF de tempo contínuo.
- Principais diferenças:
 - **Periodicidade: DTF os coeficientes de Fourier são periódicos.**
 - **Na DFT o intervalo da integração é finito na equação de síntese.**

Espectro de potência - DFT

- O espectro de potência $S_{xx}(f)$ de uma função $x(t)$ é definido como $S_{xx}(f) = X^*(f)X(f) = |X(f)|^2$.

$X(f) = F\{x(t)\} \rightarrow$ transformada de Fourier.

$X^*(f) \rightarrow$ é o complexo conjugado $X(f)$.

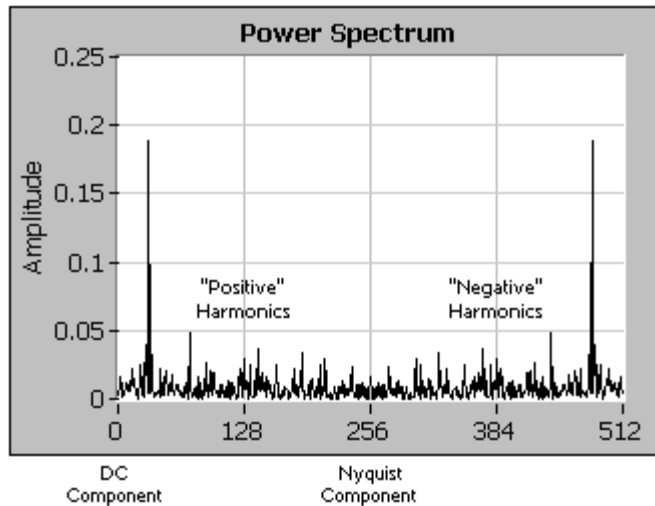
- No Labview, o espectro de potência é computado a partir de rotinas de DFT e FFT (Fast Fourier Transform).

$$S_{xxx} = \frac{|F\{x\}|^2}{N^2}$$

- $S_{xx} \rightarrow$ saída da VI espectro de potência.
- $N \rightarrow$ número de amostras na sequência de entrada \mathbf{X} .

Espectro de potência

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{N\Delta t}$$



$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X[k] = X[N-k]$$

- A maior frequência que pode ser analisada pela DFT é $f_s/2$, que é o limite de Nyquist.

$f_s \rightarrow$ frequência de amostragem.

- O número de amostras N da DFT complexa é igual ao número de amostras do sinal de entrada.

- A saída da DFT é espelhada na frequência de Nyquist. Ou seja, na amostra $N/2$ teremos a frequência de Nyquist caso N seja par.

- Se o sinal for em Volts a saída do espectro de potência tem unidade of volts-rms ao quadrado (V_{rms}^2).

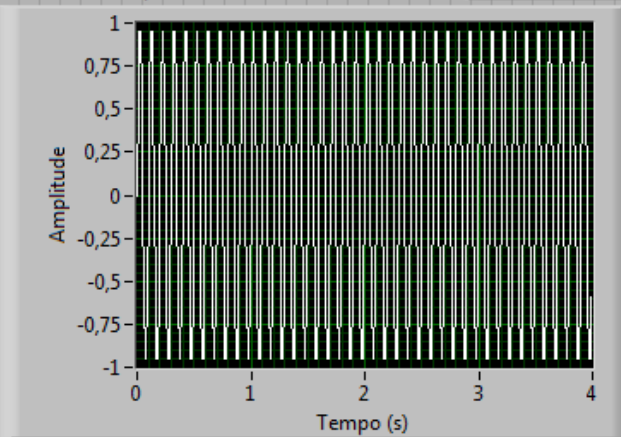
Parâmetros da onda seno

frequency	offset
<input type="text" value="10,00"/>	<input type="text" value="0,00"/>
amplitude	phase
<input type="text" value="1,00"/>	<input type="text" value="0,00"/>

Informação sobre amostragem

Fs
<input type="text" value="100,0"/>
#s
<input type="text" value="400"/>

Waveform Graph 2



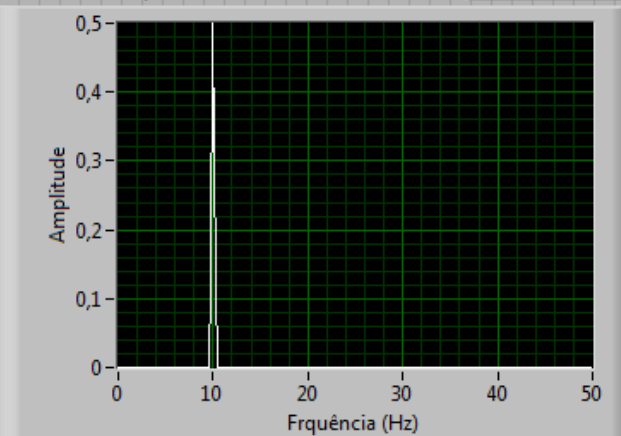
Informação sobre a forma de onda gerada

t0	Y
<input type="text" value="00:00:00,000"/> DD/MM/YYYY	<input type="text" value="0"/>
dt	<input type="text" value="0,58778"/>
<input type="text" value="0,01"/>	<input type="text" value="0,95105"/>

Informação sobre a forma de DFT

magnitude			
<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="3,01259"/>	<input type="text" value="3,46231"/>	<input type="text" value="1,87044"/>
f0	df	size(s)	
<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0,25"/>	<input type="text" value="200"/>	

Waveform Graph



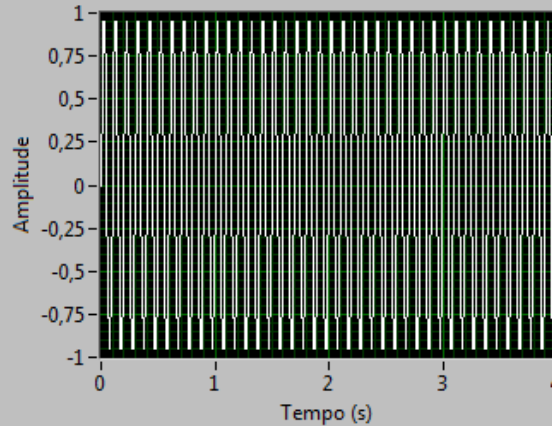
Parâmetros da onda seno

frequency: 10,00
offset: 0,00
amplitude: 1,00
phase: 0,00

Informação sobre amostragem

Fs: 100,0
#s: 400

Waveform Graph 2

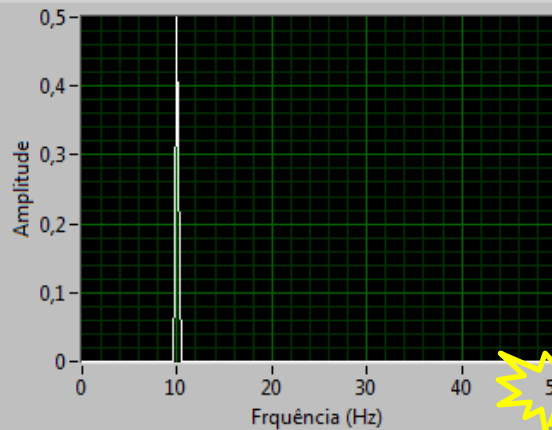


Informação sobre a forma de onda gerada

t0: 00:00:00,000
DD/MM/YYYY
dt: 0,01
y: 0
0,58778!
0,95105!

Informação sobre a forma de DFT

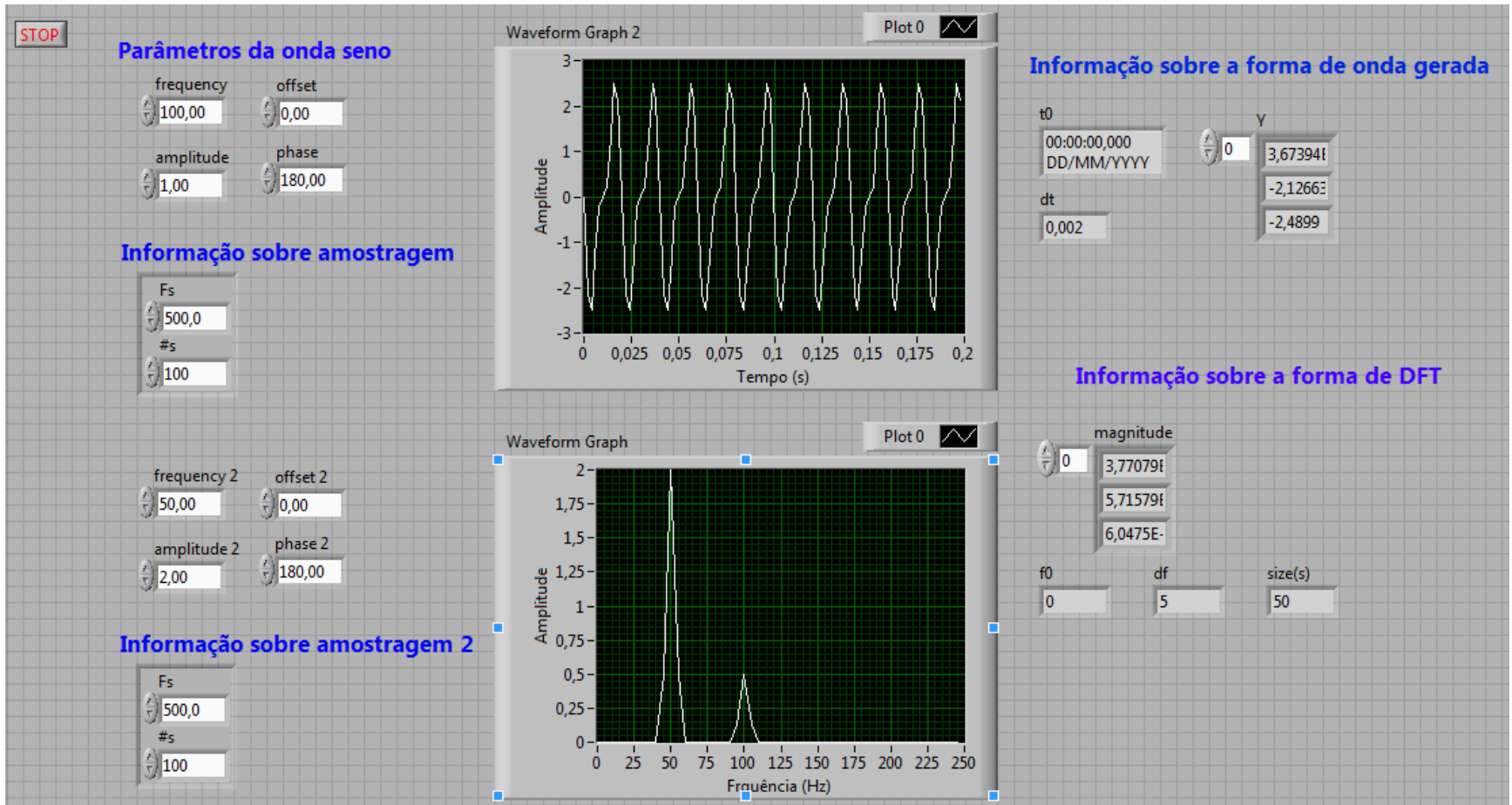
Waveform Graph



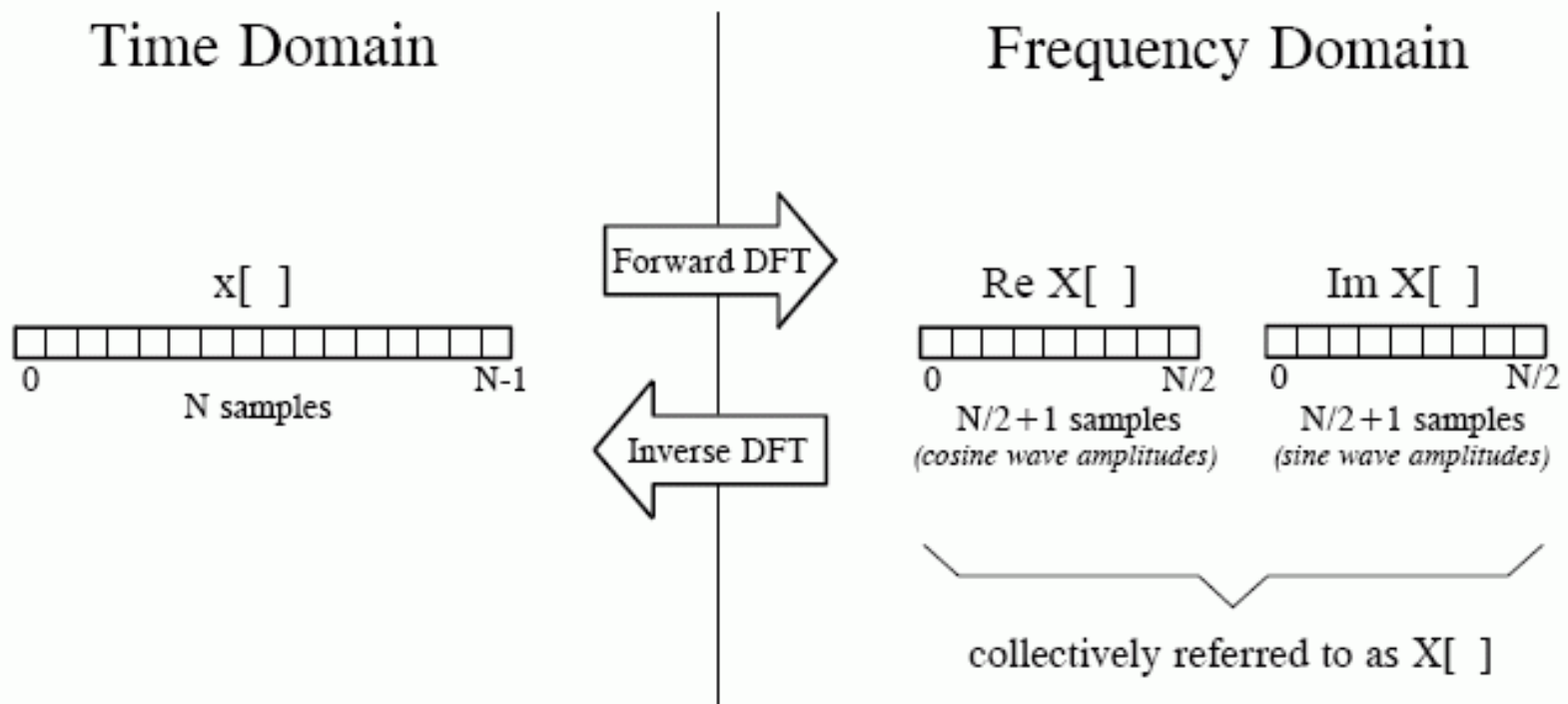
magnitude: 3,01259!
3,46231!
1,87044!
f0: 0
df: 0,25
size(s): 200

Limite de Nyquist

$$f_1(\omega_1 t) + f_2(\omega_2 t)$$

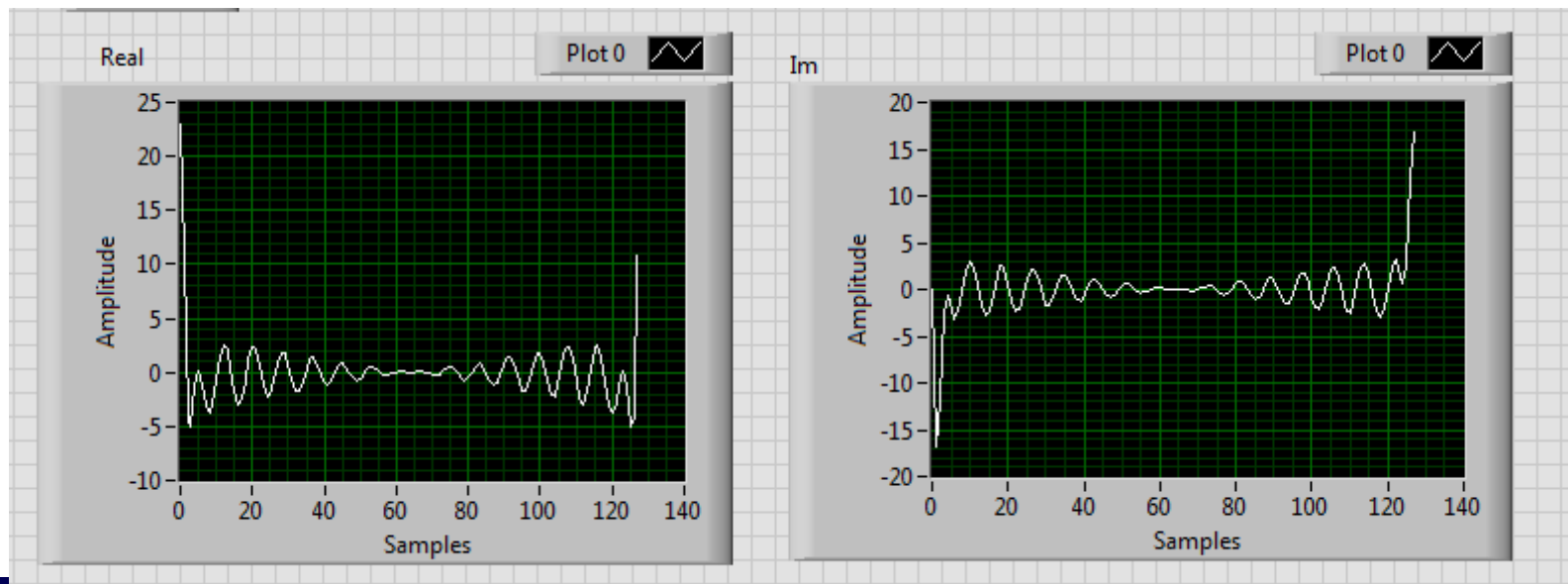
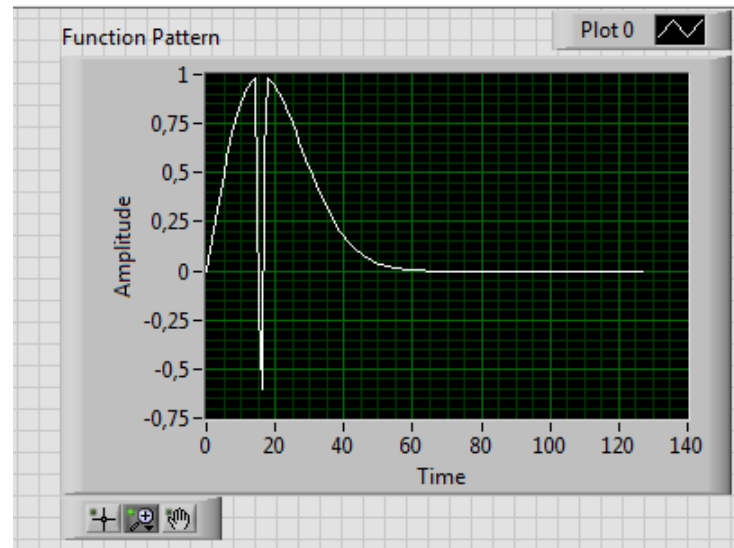


Notação da DFT

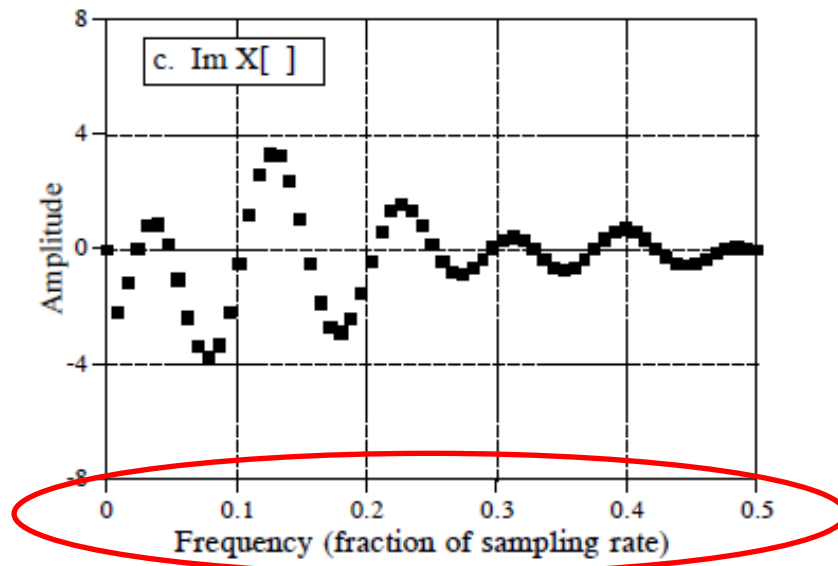
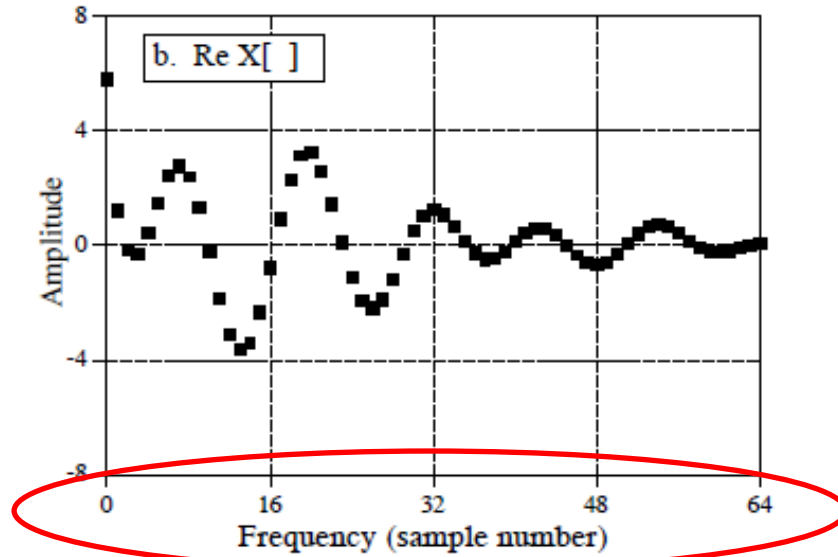


N pode ser qualquer positivo inteiro, mas geralmente escolhe-se valores que são potência de 2 (64, 128, 256, etc ...).

Exemplo de DFT real



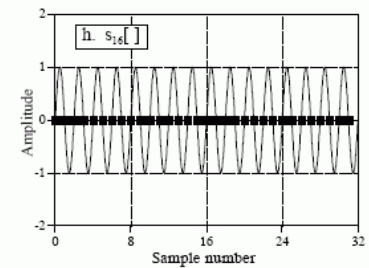
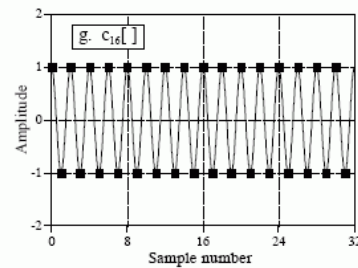
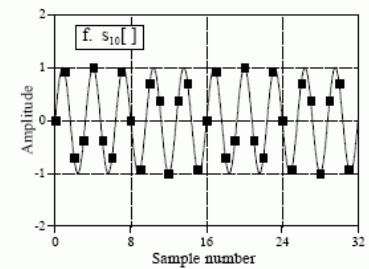
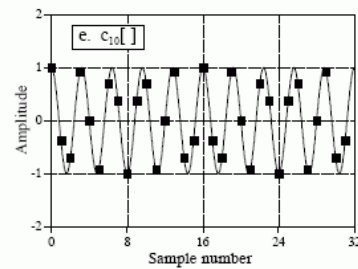
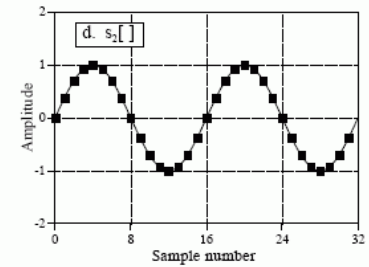
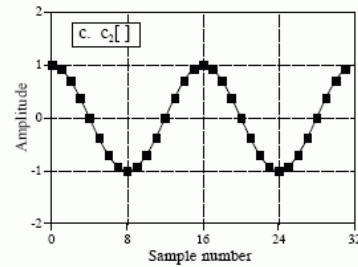
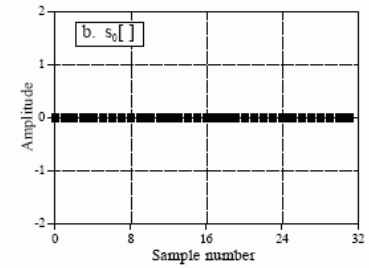
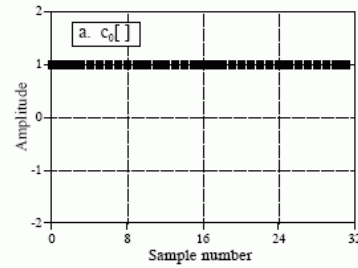
Frequency Domain



$$c_k[i] = \cos(2\pi ki/N)$$

$$s_k[i] = \sin(2\pi ki/N)$$

$$x[i] = \sum_{k=0}^{N/2} \text{Re}\bar{X}[k] \cos(2\pi ki/N) + \sum_{k=0}^{N/2} \text{Im}\bar{X}[k] \sin(2\pi ki/N)$$



Calculando a DSP

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

$$\operatorname{Re} X[k] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \cos(2\pi k i / N)$$

$$\operatorname{Re} \bar{X}[k] = \frac{\operatorname{Re} X[k]}{N/2}$$

$$\operatorname{Im} \bar{X}[k] = -\frac{\operatorname{Im} X[k]}{N/2}$$

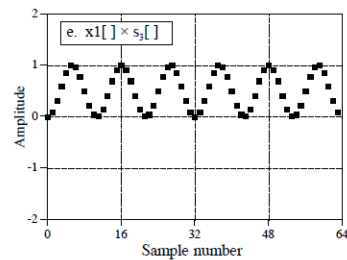
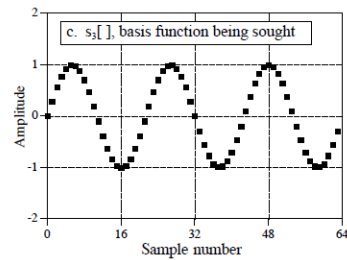
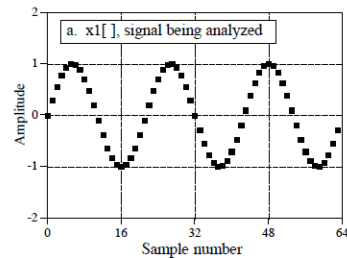
$$\operatorname{Im} X[k] = -\sum_{i=0}^{N-1} x[i] \sin(2\pi k i / N)$$

$$\operatorname{Re} \bar{X}[0] = \frac{\operatorname{Re} X[0]}{N}$$

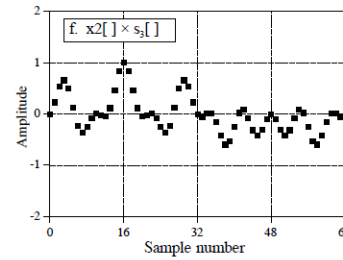
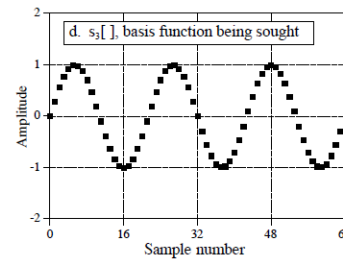
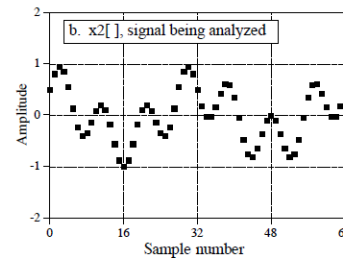
$$\operatorname{Re} \bar{X}[N/2] = \frac{\operatorname{Re} X[N/2]}{N}$$

DFT pelo método de correlação

Example 1



Example 2



Soma escalonada

↓
1



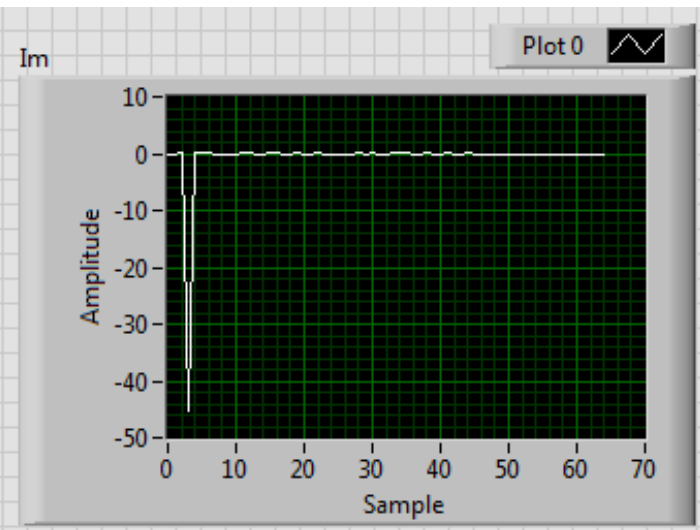
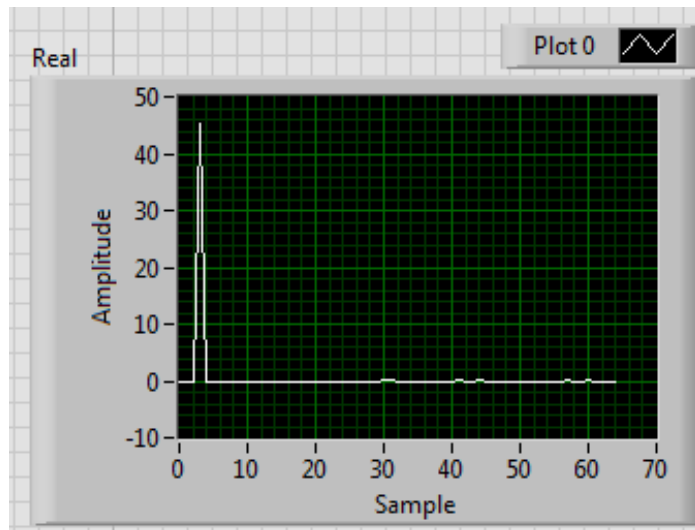
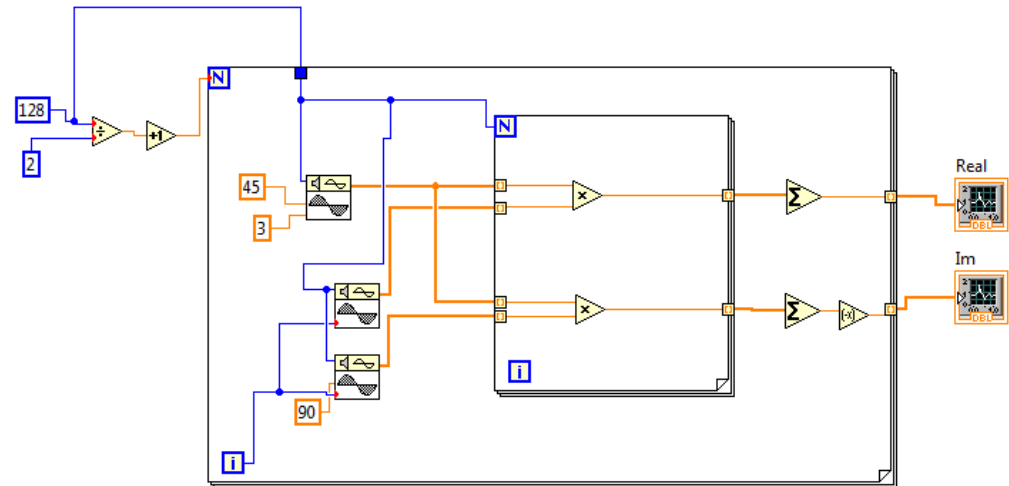
Soma → 0

Método da correlação

$$ReX[k] = \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \cos(2\pi k i / N)$$

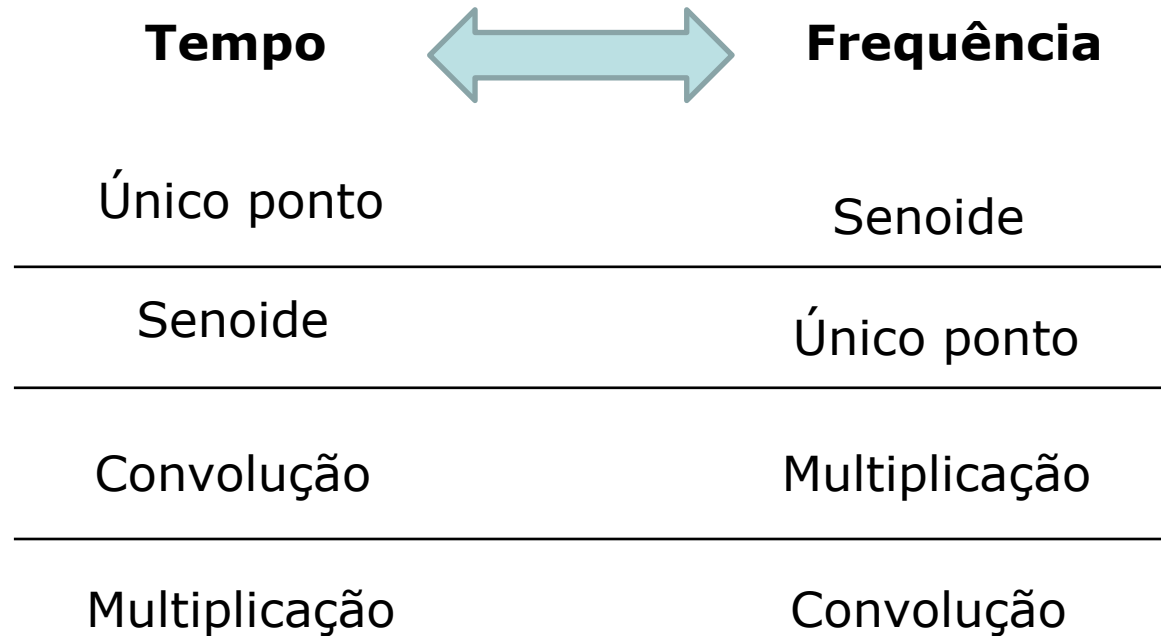
$$ImX[k] = - \sum_{i=0}^{N-1} x[i] \sin(2\pi k i / N)$$

$$0 \leq k \leq N/2$$

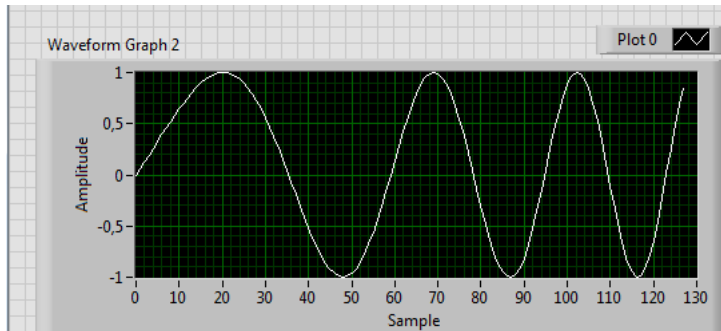


Dualidade

- Simetria entre os domínios do tempo e da frequência.



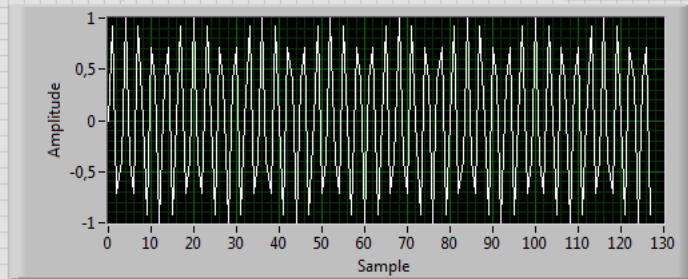
Exemplo Batimento



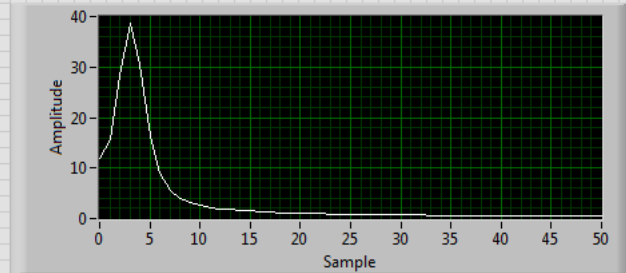
Frequência

40,00

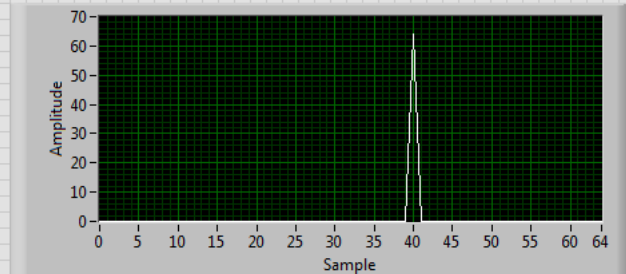
Waveform Graph



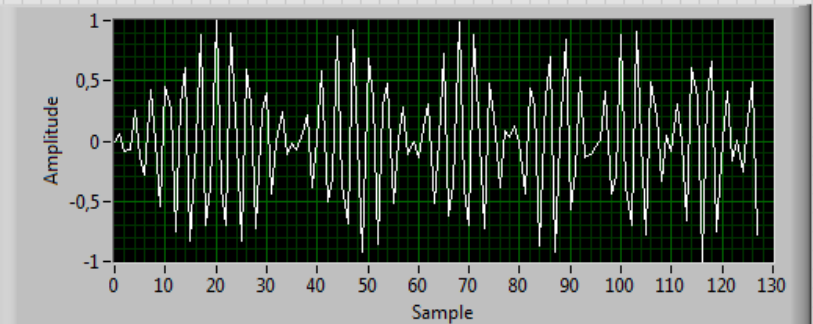
Waveform Graph 3



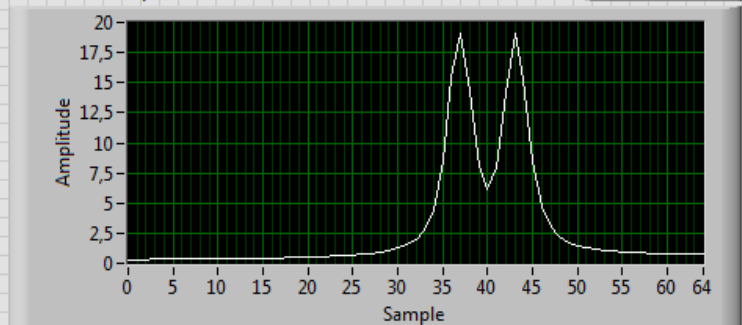
Waveform Graph 4



Waveform Graph 6

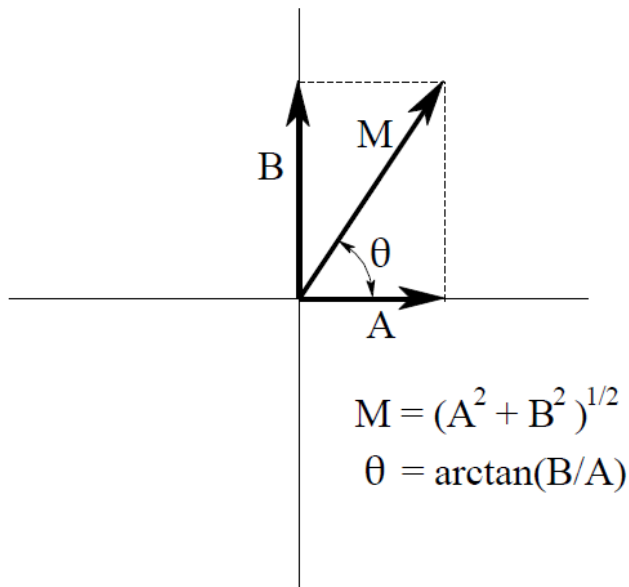


Waveform Graph 5



Notação Polar

$$A \cos(x) + B \sin(x) = M \cos(x + \theta)$$



$$MagX[k] = (ReX[k]^2 + ImX[k]^2)^{1/2}$$

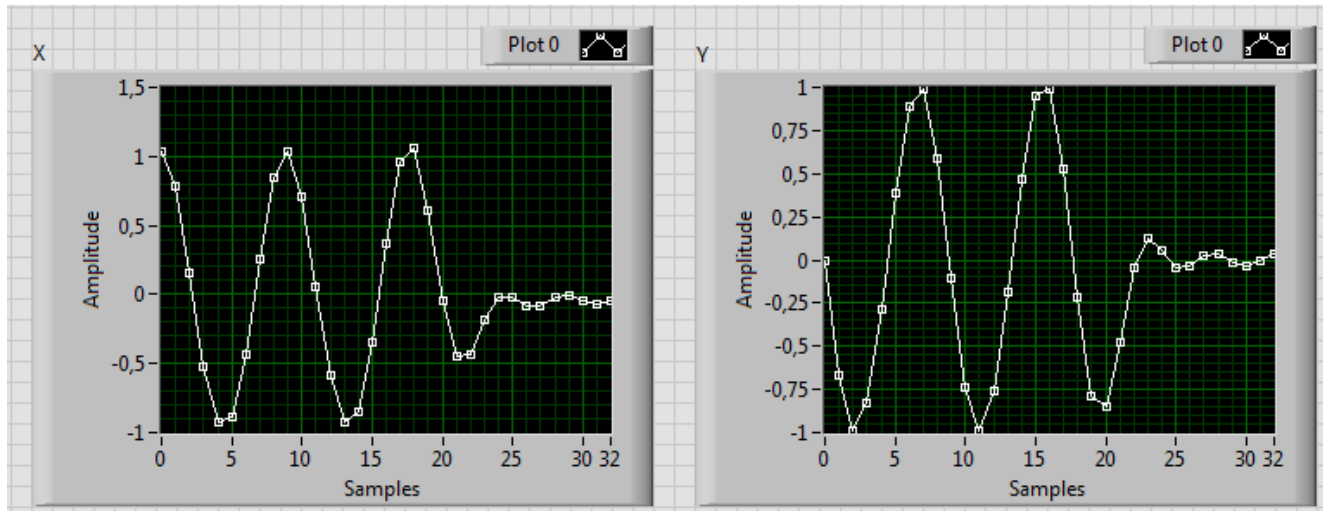
$$PhaseX[k] = \arctan\left(\frac{ImX[k]}{ReX[k]}\right)$$

$$ReX[k] = MagX[k] \cos(PhaseX[k])$$

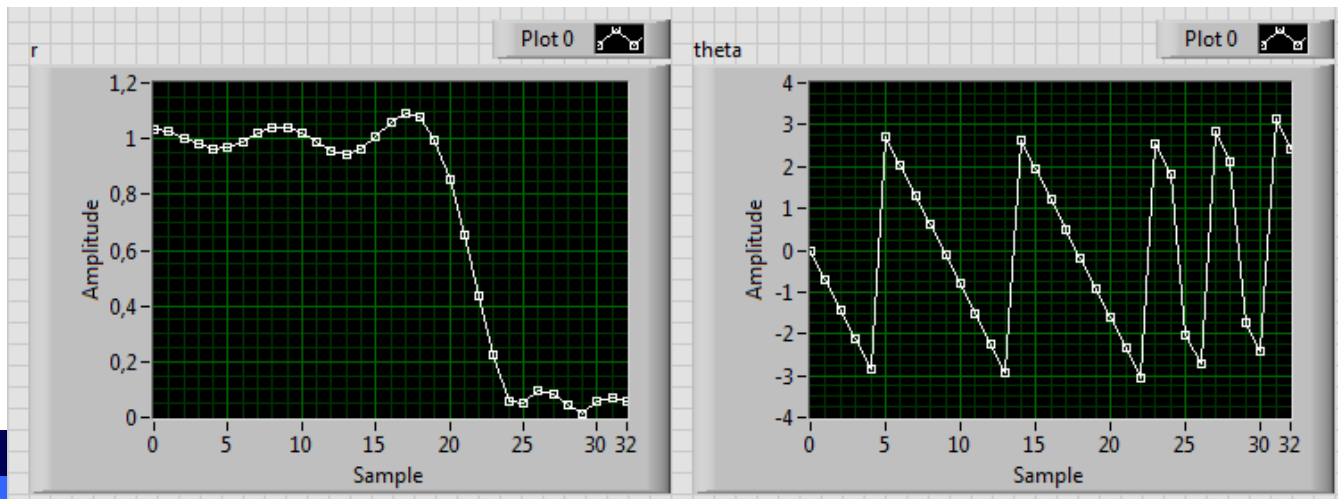
$$ImX[k] = MagX[k] \sin(PhaseX[k])$$

Filtro passa-baixas

Retangular

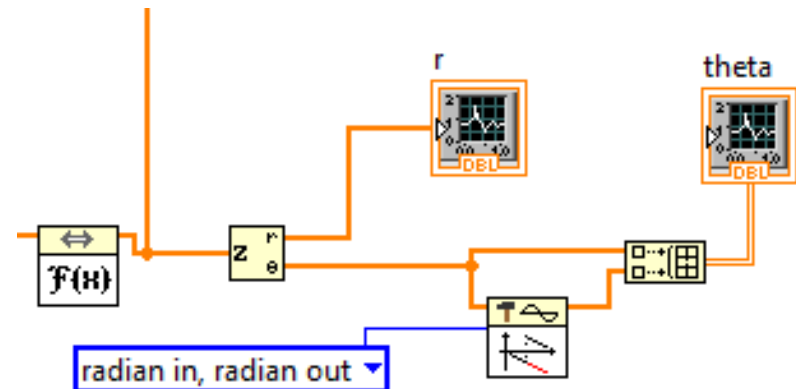
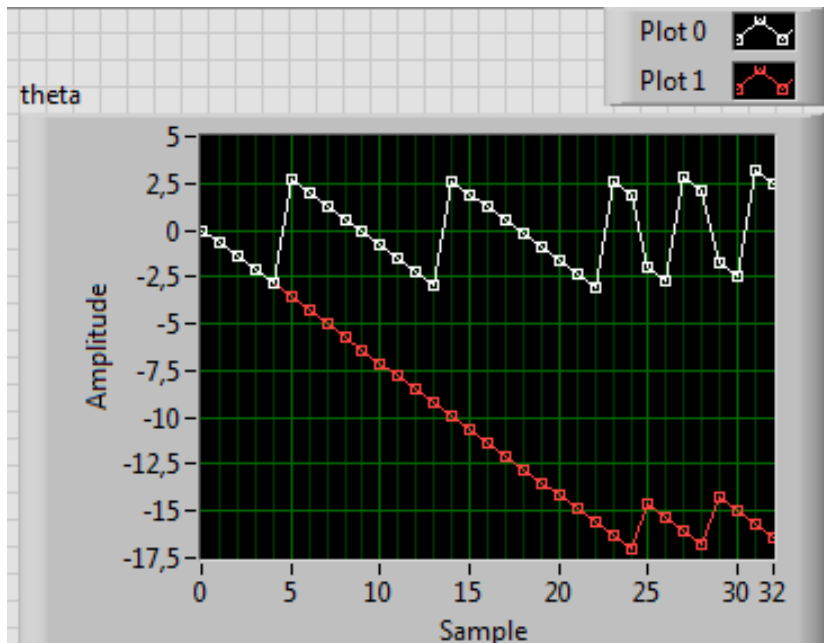


Polar



Fase

- Os valores de fase, usualmente, são mostrados entre $-\pi$ e $+\pi$. Isso causa as descontinuidades vistas.



Fase para baixas amplitudes

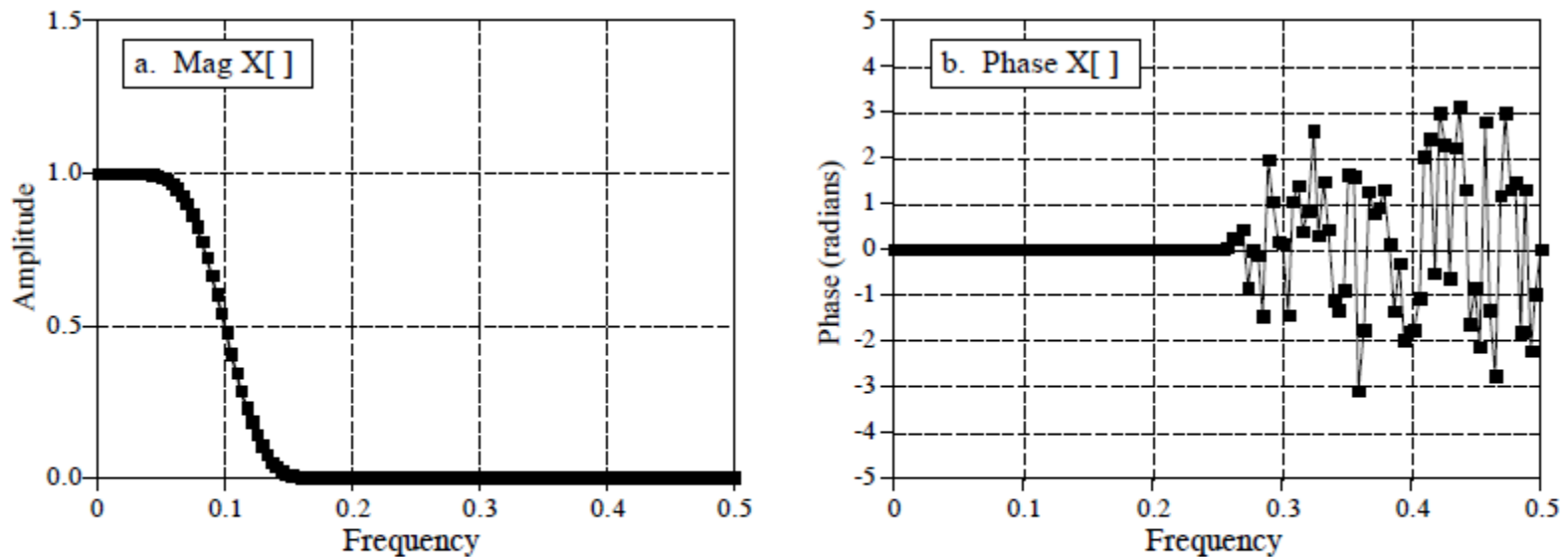


FIGURE 8-11

The phase of small magnitude signals. At frequencies where the magnitude drops to a very low value, round-off noise can cause wild excursions of the phase. Don't make the mistake of thinking this is a meaningful signal.

Janelamento

- **Imaginemos um sinal muito longo, ao amostrar esse sinal ele é truncado por uma janela retangular.**
- **O sinal em análise é finito, portanto ele já foi amostrado por uma janela retangular.**

Transformada de Fourier

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi nk}{N}} \quad k = 0, \dots, N-1$$

Transformada de Fourier de um sinal multiplicado por uma janela $w(n)$

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w(n) e^{-j \frac{2\pi nk}{N}} \quad k = 0, \dots, N-1$$

Janelamento

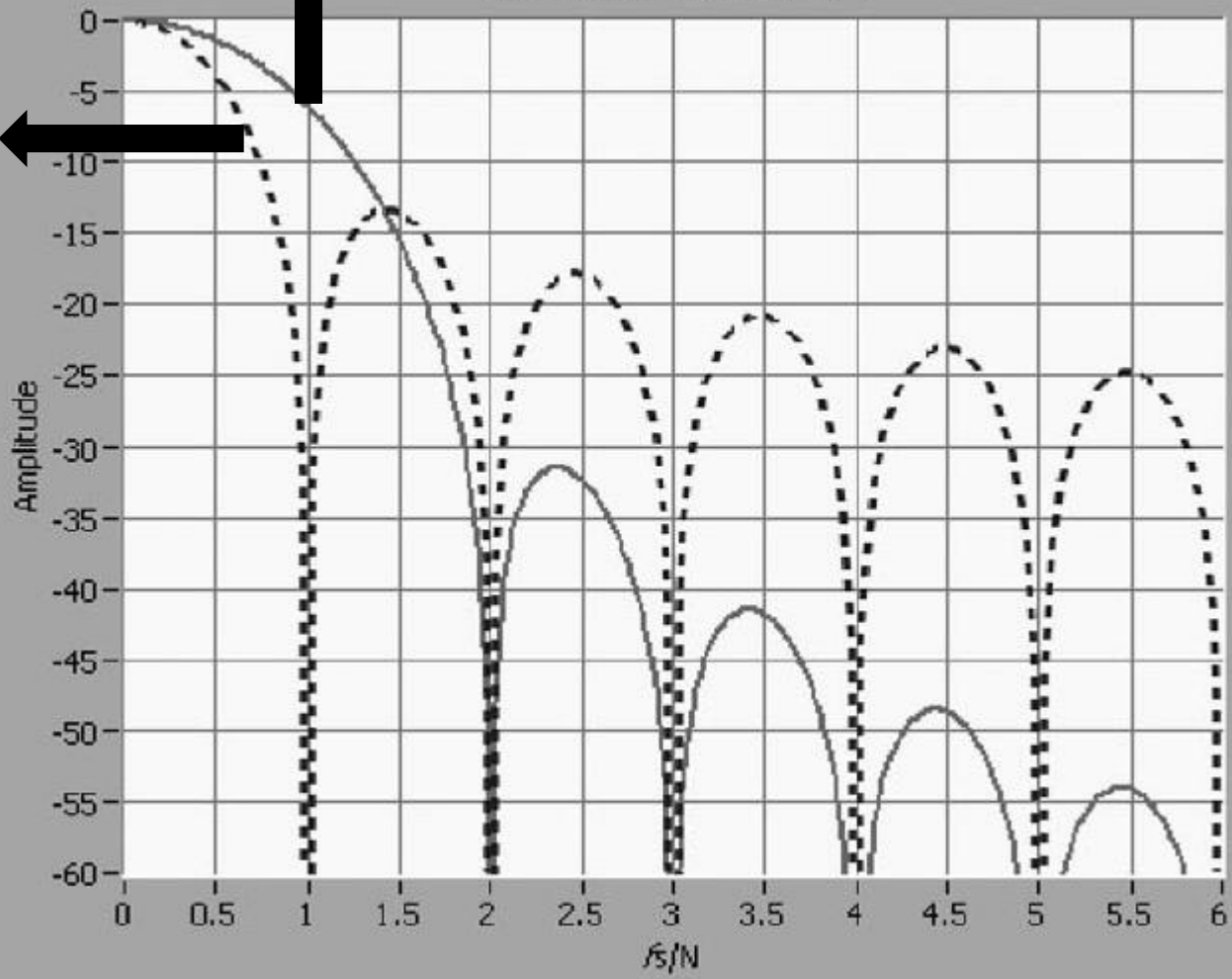
- Esse procedimento afeta o sinal no domínio da frequência.
- Sinais no domínio do tempo multiplicados correspondem à convolução desses sinais no domínio da frequência.

$$\mathcal{F}\{f \cdot g\} = \mathcal{F}\{f\} * \mathcal{F}\{g\}$$

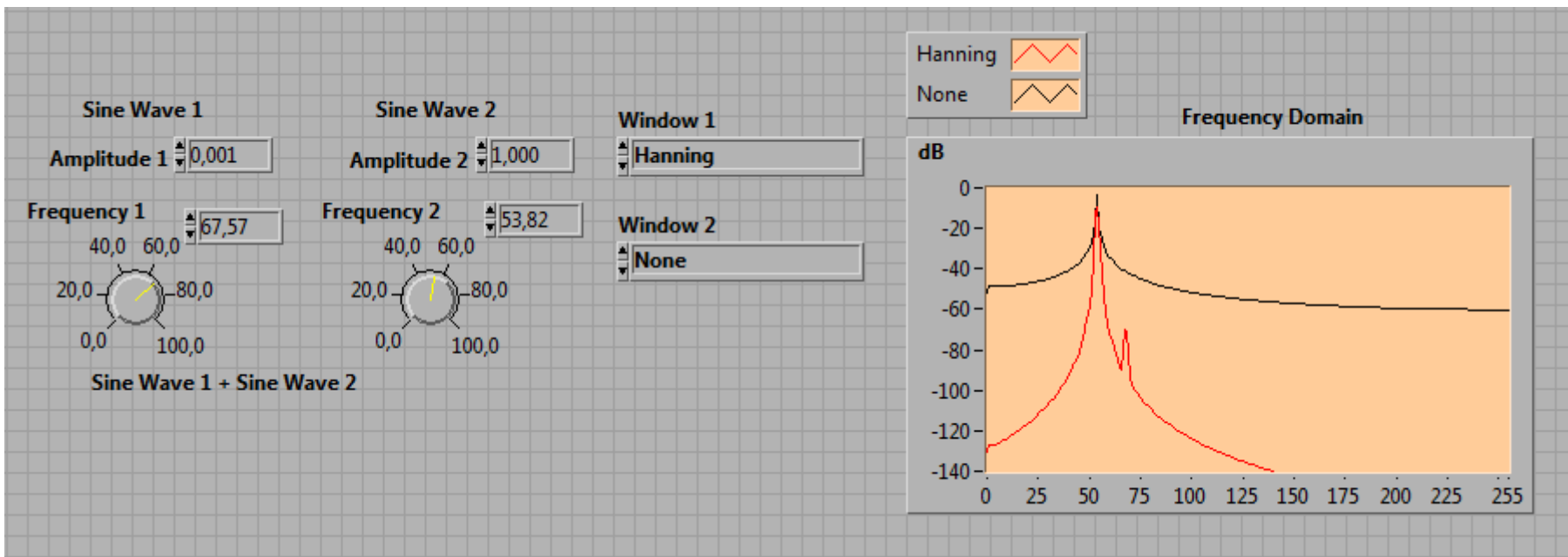
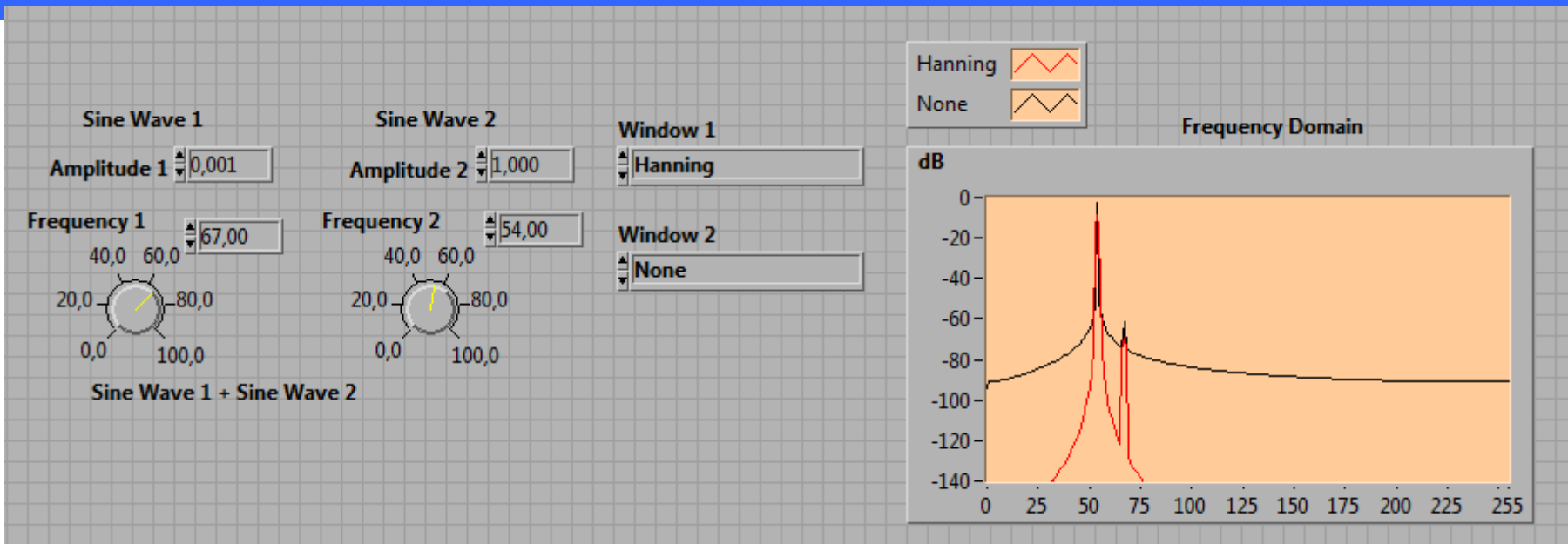
- O espectro do sinal é o espectro da janela deslocado no eixo das frequências.

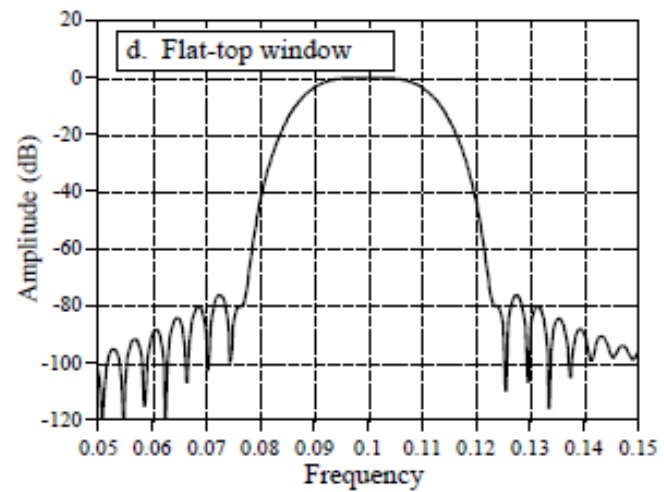
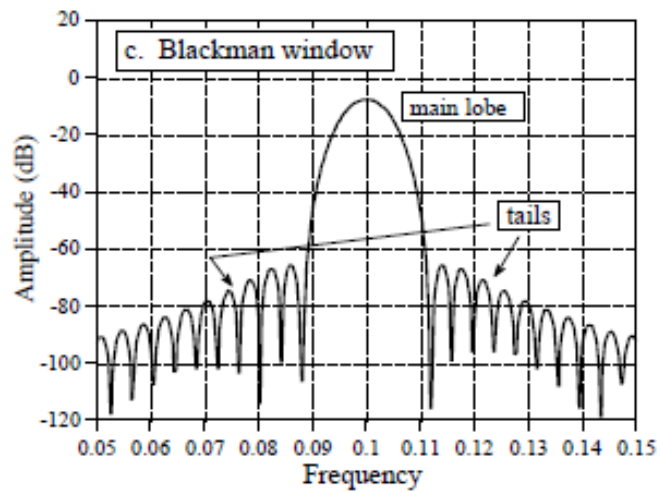
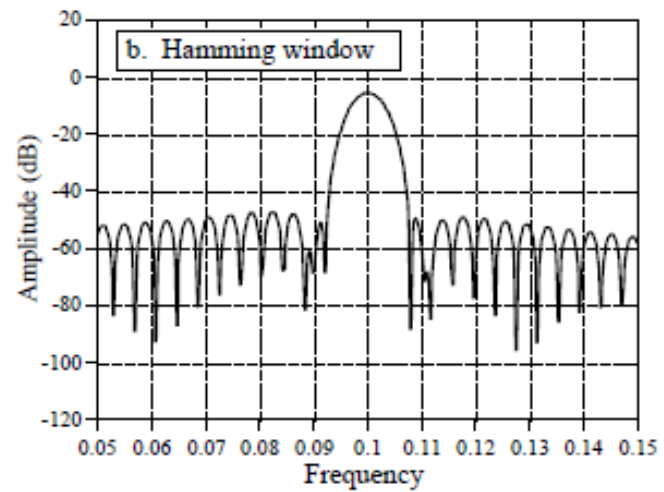
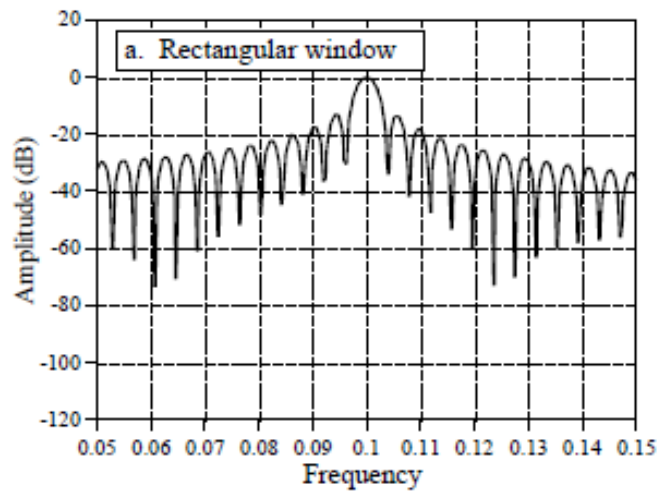
Hann

Window Spectrum



Rectangular





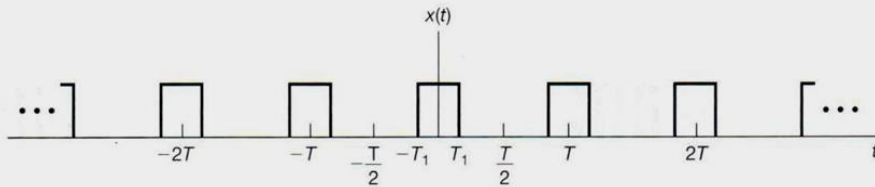
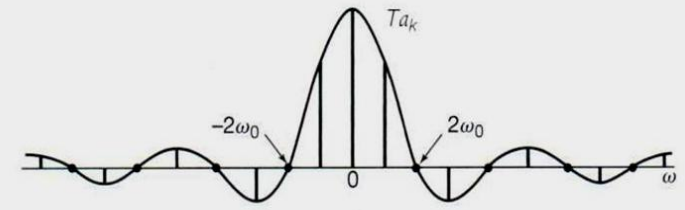


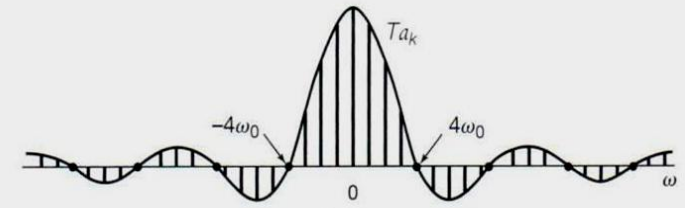
Figura 4.1 Uma onda quadrada periódica de tempo contínuo.

$$Ta_k = \frac{2 \operatorname{sen} \omega T_1}{\omega} \Big|_{\omega = k\omega_0}$$

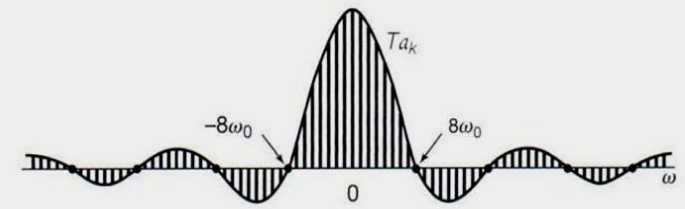
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



(a)



(b)



(c)

Figura 4.2 Os coeficientes da série de Fourier e sua envoltória para a onda quadrada periódica na Figura 4.1, para diferentes valores de T (com T_1 fixo): (a) $T = 4T_1$; (b) $T = 8T_1$; (c) $T = 16T_1$.

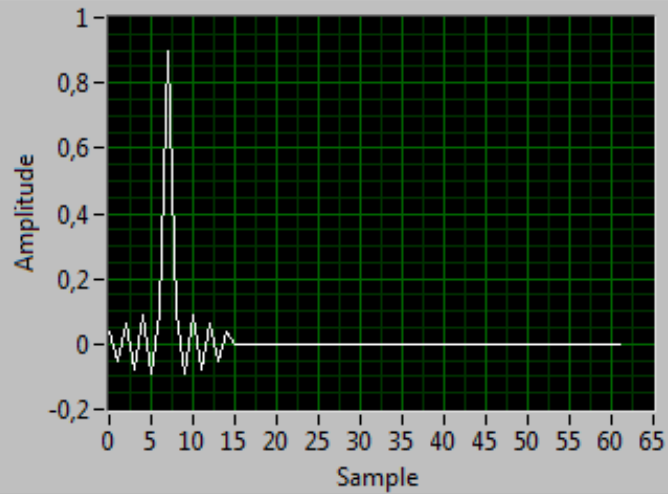
Para T_1 fixo a envoltória é independente de T

Resolução

- O número de pontos da DFT, igualmente espaçados, entre 0 e $f_s/2$, indica a resolução.
- Para aumentar a resolução de uma DFT, é preciso amostrar um sinal por um maior período de tempo.
- Podemos também adicionar *zeros* ao fim do sinal (*zero padding*).

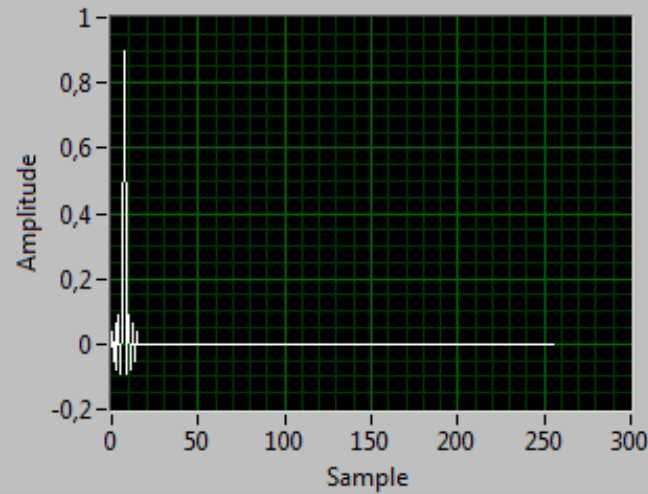
Windowed X

Plot 0



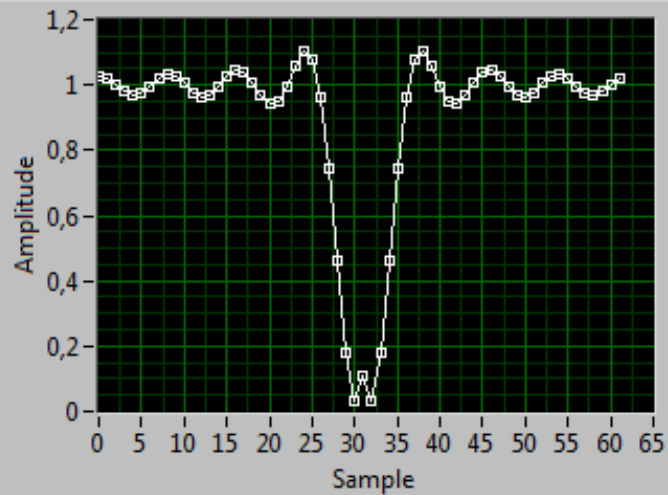
Zero Padded Array

Plot 0



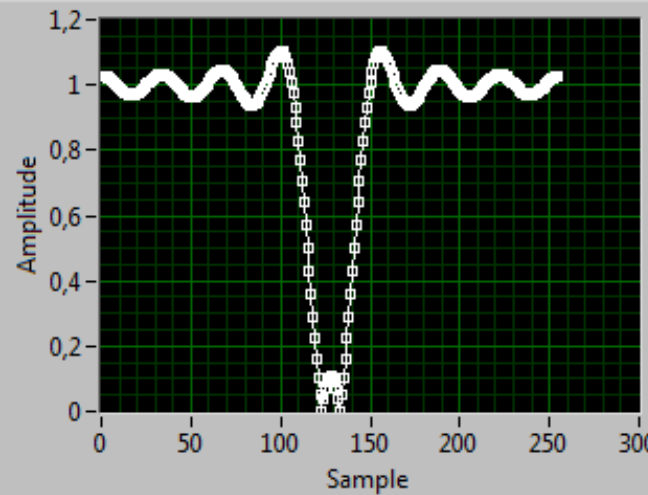
r

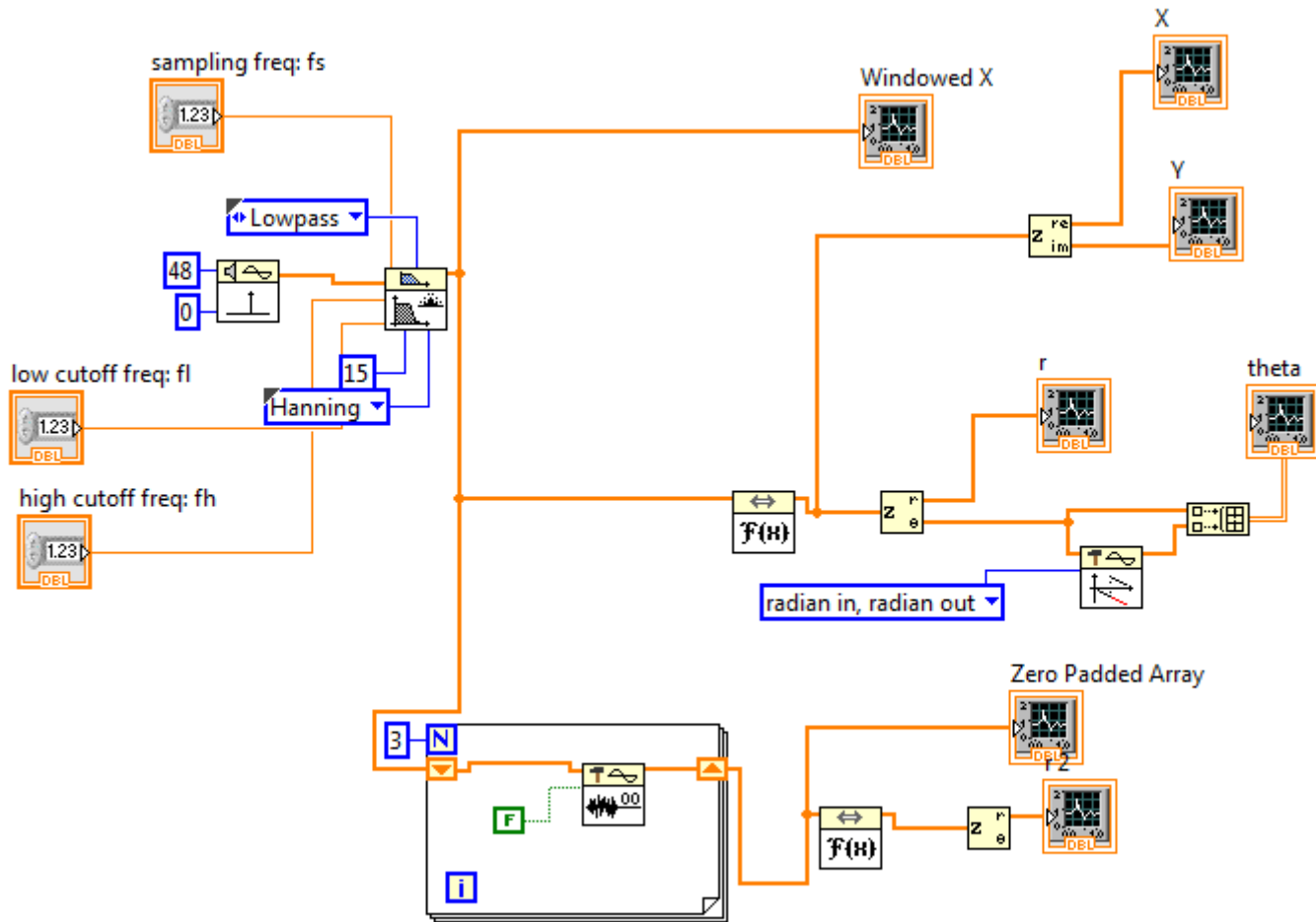
Plot 0



r2

Plot 0





Resposta em frequência de um sistema LIT

- A relação entre a resposta ao impulso e a resposta em frequência é de extrema importância em análise de sinais.
- A resposta em frequência de um sinal é a transformada de Fourier da resposta ao impulso.

Propriedades da transformada de Fourier

- A transformada de Fourier é linear.
 - Aditiva e homogênea.
- Não é invariante no tempo.
 - Deslocamentos no tempo levam a mudanças na fase da transformada.

Teorema de Parseval

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

Time Domain

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

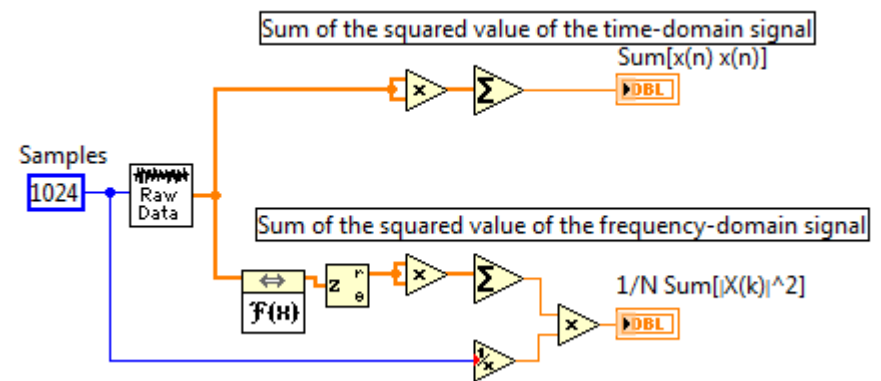
1554,5653

Frequency Domain

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

1554,5653

Run this VI to demonstrate Parseval's theorem, which states that the energy of a signal in the time domain (left-hand value above) is identical to the energy of the signal in the frequency domain (right-hand value above).



Bibliografia

- SMITH, S.W. The Scientist and Engineer's Guide to Signal Processing (<http://www.dspguide.com/>)
- A. V. OPPENHEIM; A. S. Willsky. Sinais e Sistemas, 2ª ed., 2010.
- OPPENHEIM; R. W. SCHAFFER & J. R. BUCK. Discrete-Time Signal Processing. Prentice Hall, 2ª ed., 1999.
- CLARK C.L. LabView Digital Signal Processing and Digital Communications.
- Carlos Alexandre Melo, Processamento de sinais, <http://www.cin.ufpe.br/~cabm/pds/PDS.pdf>
- Exemplos LabView.