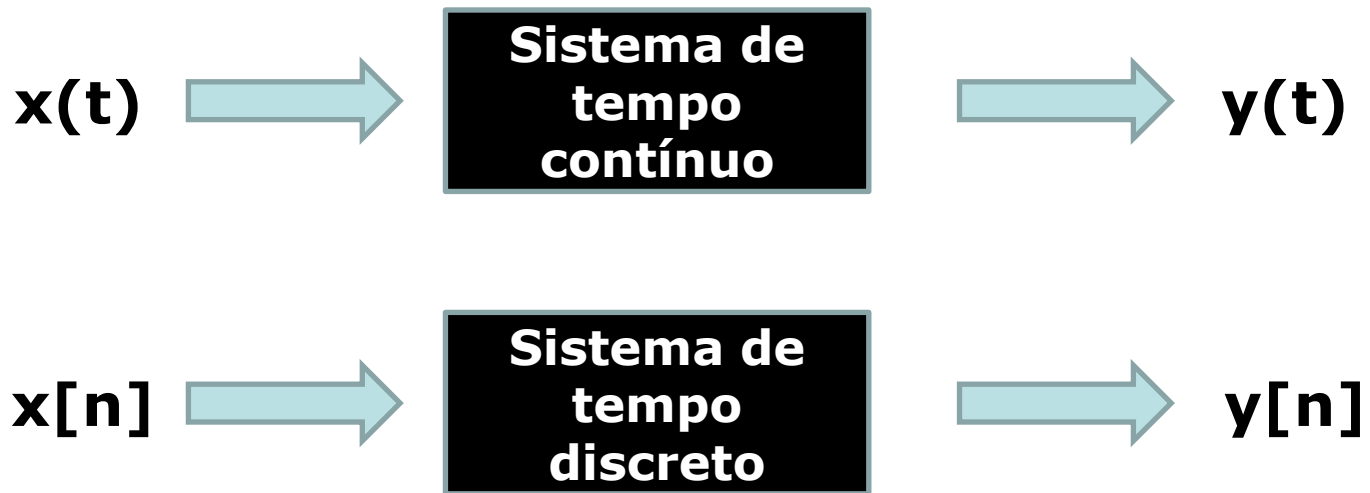


Convolução – Correlação

Profs. Theo Pavan e Adilton Carneiro
TAPS

Sistema

- Sistema → processo em que os sinais de entrada são transformados resultando em um outro sinal de saída.



Sistemas lineares e invariante no tempo

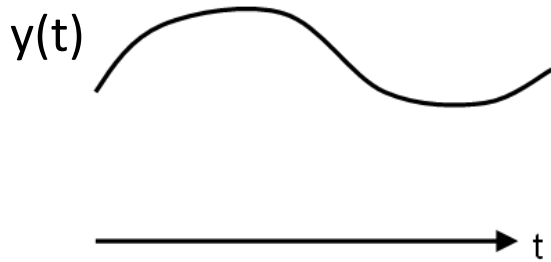
- Sistemas lineares e invariante no tempo (LIT).
- Sistema invariante no tempo \rightarrow características do sistema são fixas ao longo do tempo.

$$y_1[n] = S\{x_2[n]\} \rightarrow y_2[n-n_0] = S\{x_2[n-n_0]\}$$

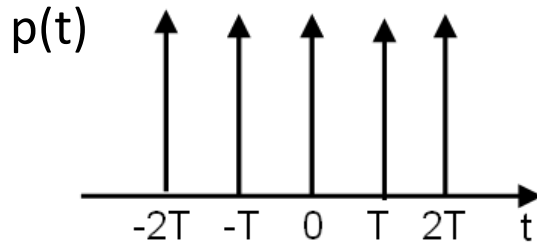
- Sistema linear \rightarrow possui a importante propriedade de superposição.

$$S\{a.x_1[n]+b.x_2[n]\} = a.S\{x_1[n]\} + b.S\{x_2[n]\}$$

Amostrar um sinal



Sinal contínuo



Trem de pulsos



$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$




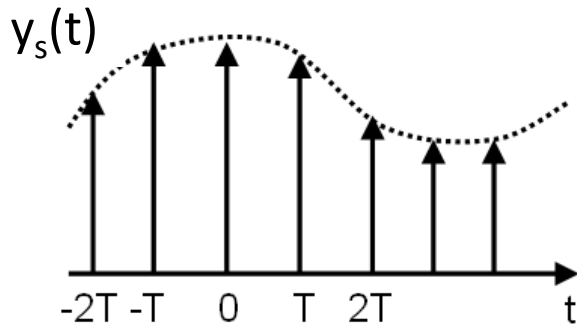
Função amostrada no tempo

$$y_s(t) = y(t) \cdot p(t)$$

$$y_s(t) = y(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Consideramos apenas $y(nT)$


$$y_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(nT) \delta(t - nT)$$



Resposta ao impulso

É uma maneira de avaliar a resposta de um sistema LIT.

Um impulso é um sinal de curta duração que vai de zero a um valor máximo e volta ao zero em curto espaço de tempo.

$$x_0 = 1$$

$$x_i = 0 \text{ para } i \neq 0$$

A resposta ao impulso de um sistema LIT representa os valores com os quais o sistema opera.

Em processamento de imagens a resposta ao impulso equivale à função de espalhamento pontual (Point Spread Function).

Sistema LIT

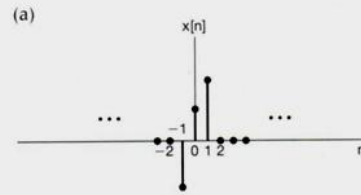
- Um conceito fundamental em processamento de sinais digitais é que um sinal (y_s) pode ser descrito como uma sequência de impulsos individuais.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \quad y[n] = T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \right\}$$



Superposição

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T \{ \delta[n-k] \} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]$$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

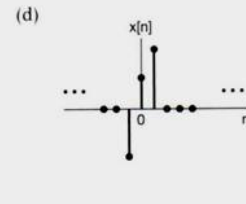
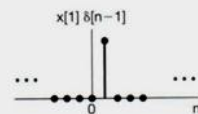
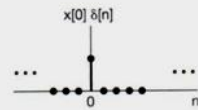
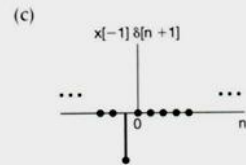


Figura 2.2 Interpretação gráfica da resposta de um sistema linear de tempo discreto conforme representado na Equação 2.3.

Sistema LIT

- Um conceito fundamental em processamento de sinais digitais é que um sinal (y_s) pode ser descrito como uma sequência de impulsos individuais.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \quad y[n] = T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k] \right\}$$



Superposição

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] T \{ \delta[n-k] \} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n]$$



Invariância no tempo

$h[n]$ é a resposta a $\delta[n]$
 $\delta[n-k]$ é $h[n-k]$

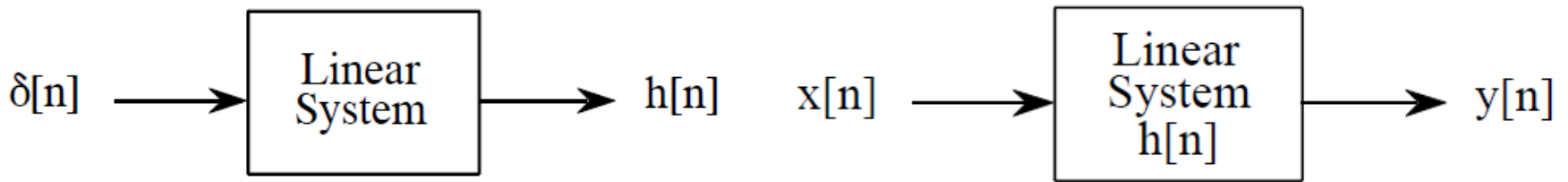
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

Convolução

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad \longrightarrow \quad y[n] = x[n] * h[n]$$

- A operação matemática da convolução expressa a resposta de um sistema LIT a uma entrada arbitrária em termos da resposta do sistema ao impulso unitário.
- É uma operação matemática como soma, em que sua aplicação sobre dois sinais implica na aparição de um terceiro sinal.

Convolução



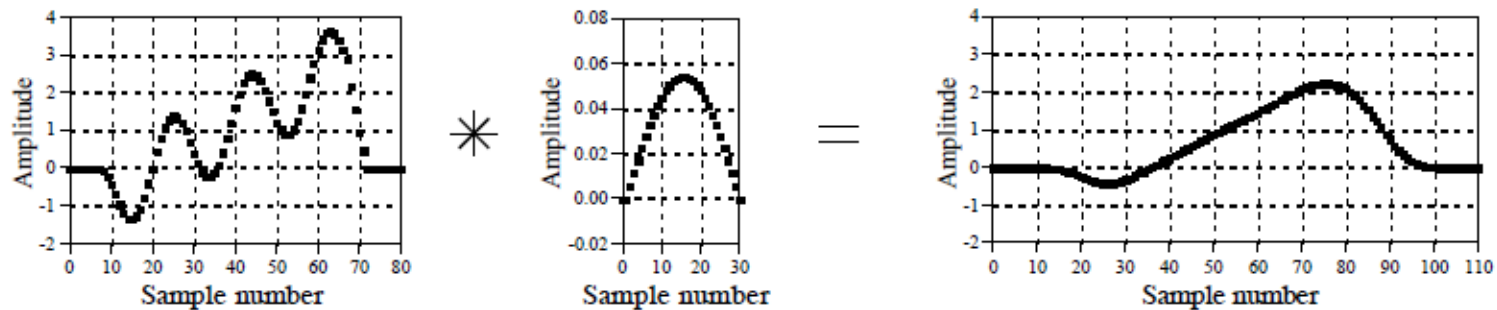
$$x[n] * h[n] = y[n]$$

Resumindo:

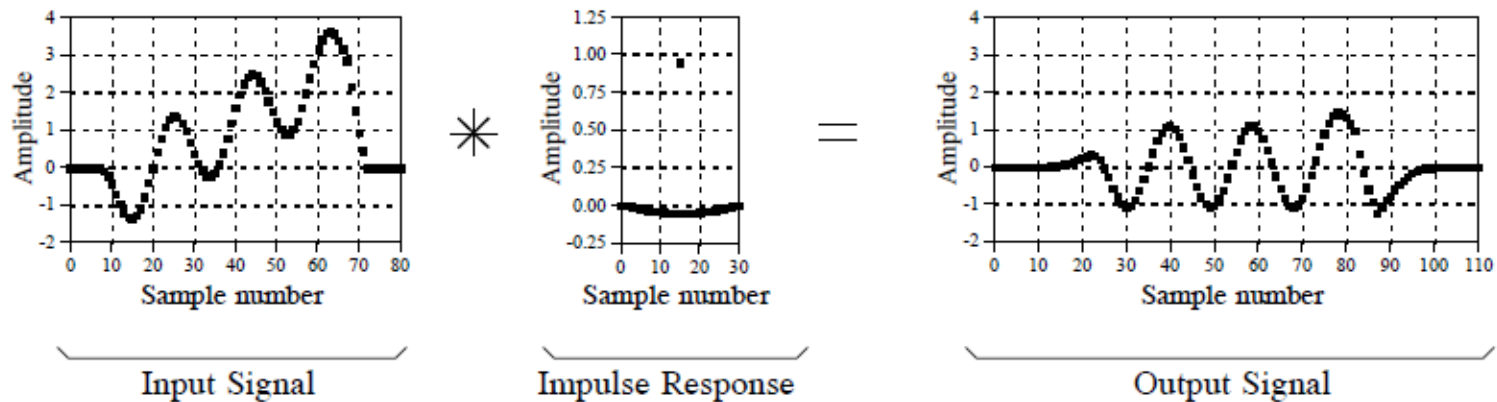
se conhecemos a resposta para um impulso de um sistema LIT, podemos calcular qual será a saída de qualquer sinal de entrada.

Operação pode ser por exemplo um filtro

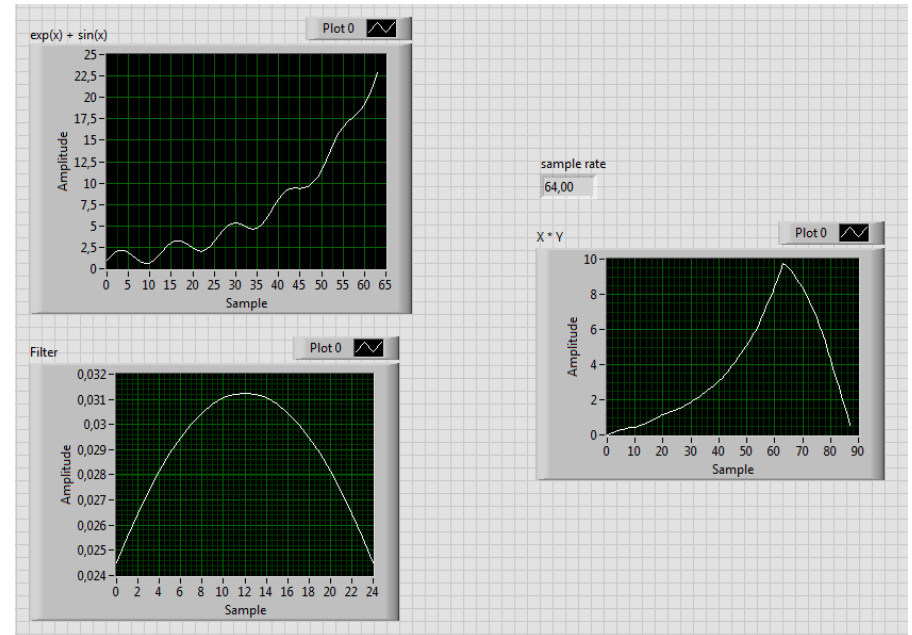
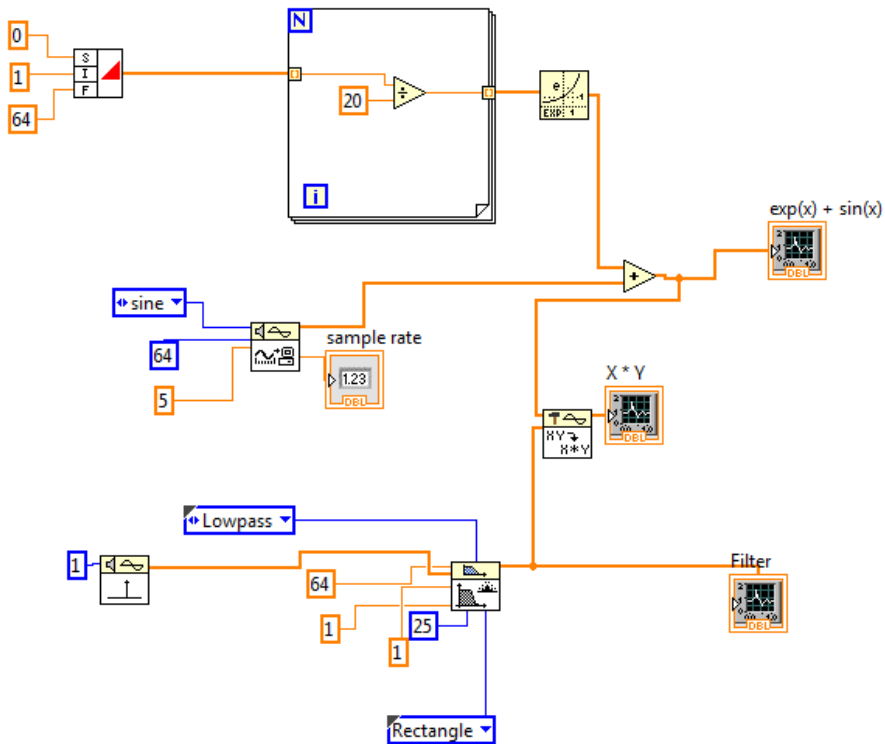
a. Low-pass Filter



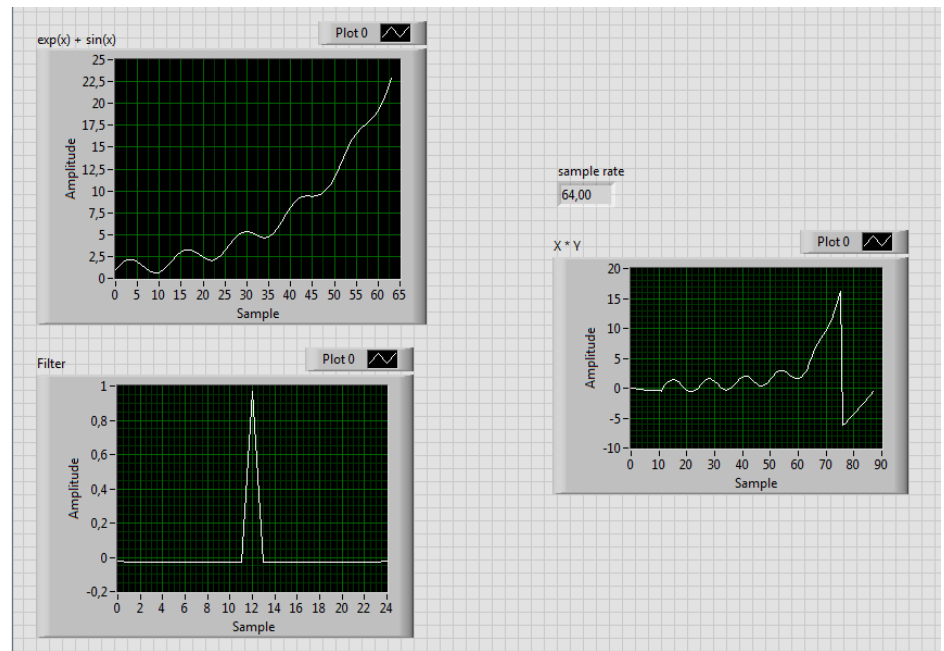
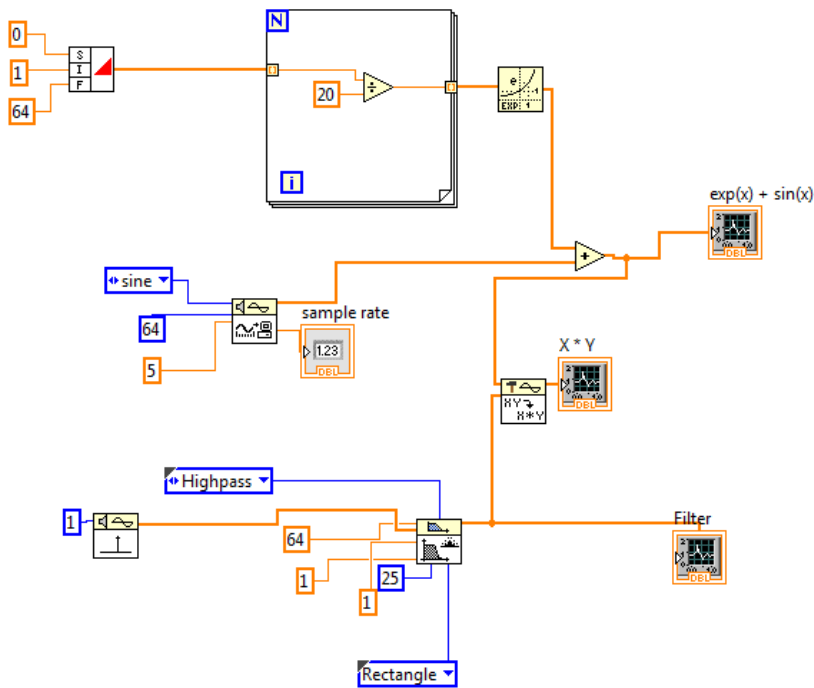
b. High-pass Filter



Exemplo LabView



Exemplo LabView



Exemplo convolução - filtros

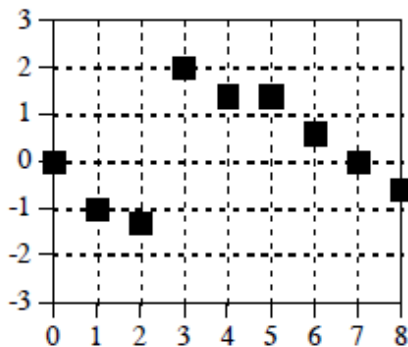
- A resposta ao impulso de um filtro **passa-baixas** é um **arco suave**. O resultado é que **somente a forma de onda** que **varia lentamente** com o tempo **passa** para a saída.
- De maneira similar, o filtro **passa-altas** permite que somente **mudanças mais rápidas passem** para a saída.

Calculando a convolução

Um exemplo simples

Entrada

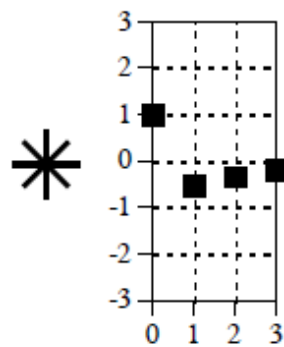
$x[n]$



9 pontos

**Resposta
ao impulso**

$h[n]$



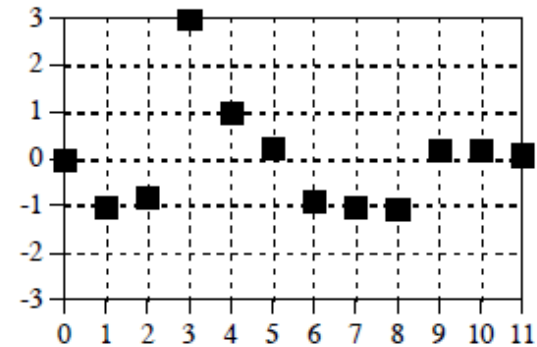
4 pontos

$*$

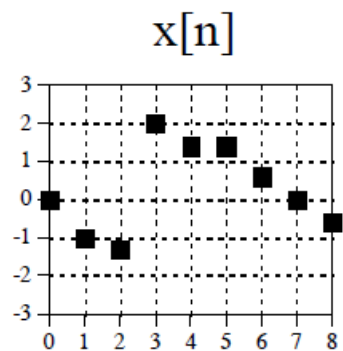
$=$

Saída

$y[n]$

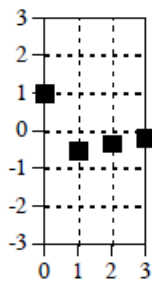


$9+4-1 = 12$ pontos



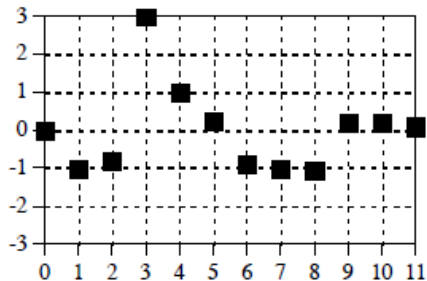
*

$h[n]$

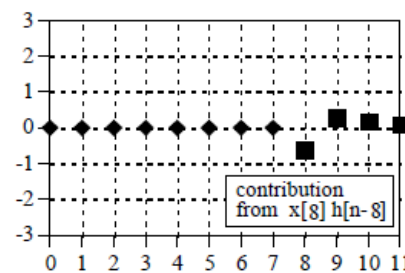
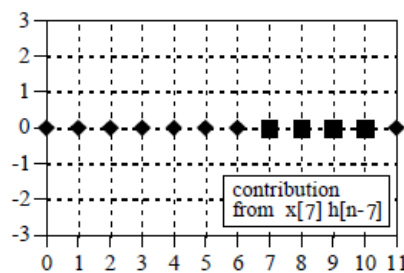
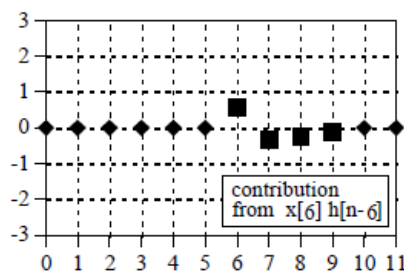
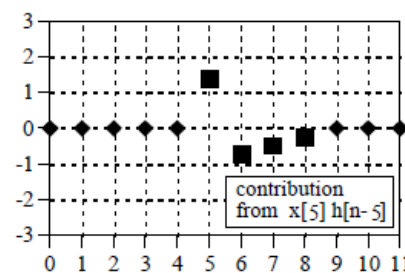
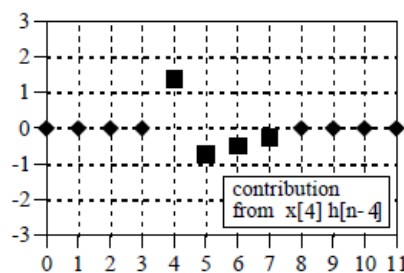
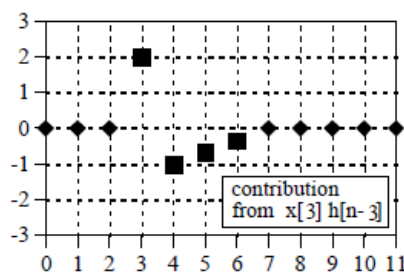
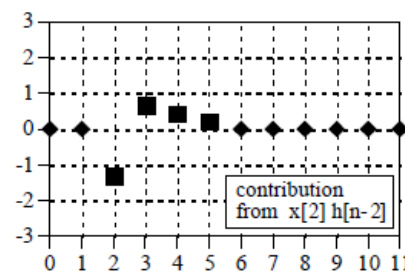
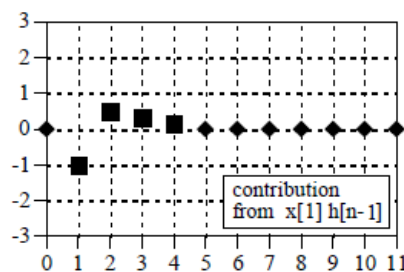
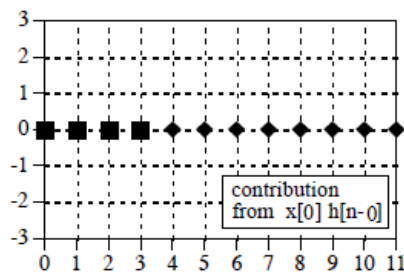


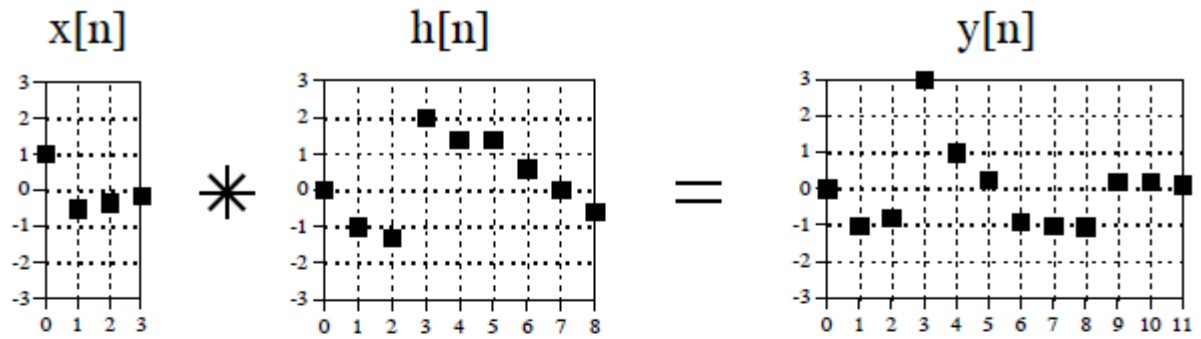
||

$y[n]$

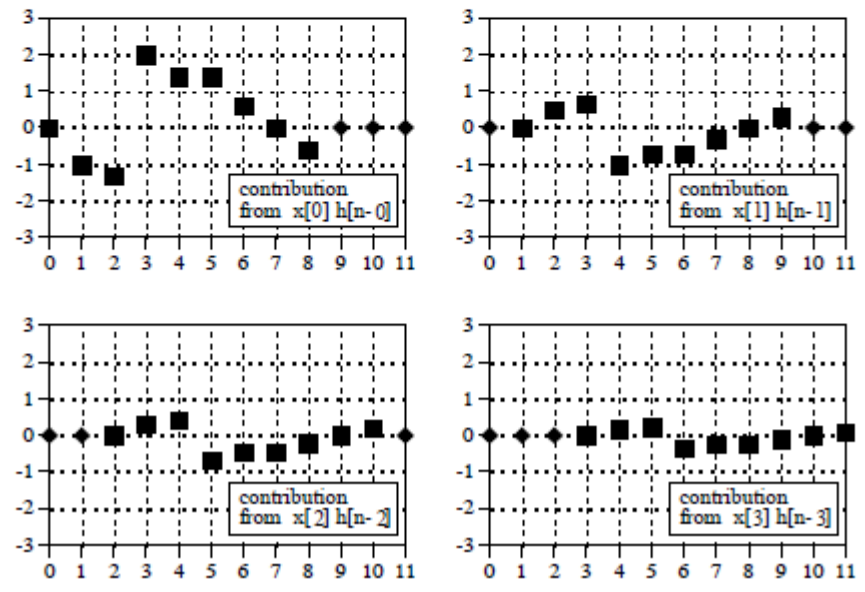


$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$





Output signal components



A convolução é comutativa

$$a[n] * b[n] = b[n] * a[n]$$

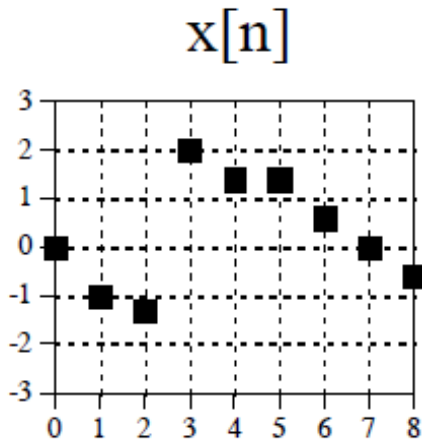
Calculando a convolução

- O método discutido analisou como cada ponto no sinal de entrada afetou o sinal de saída como um todo.
- Contudo, podemos analisar como cada ponto no sinal de saída é afetado pelo sinal de entrada.
- Para isso é preciso saber como cada ponto de saída é calculado de maneira independente dos demais.

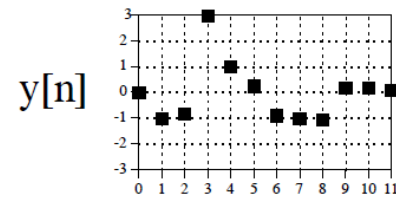
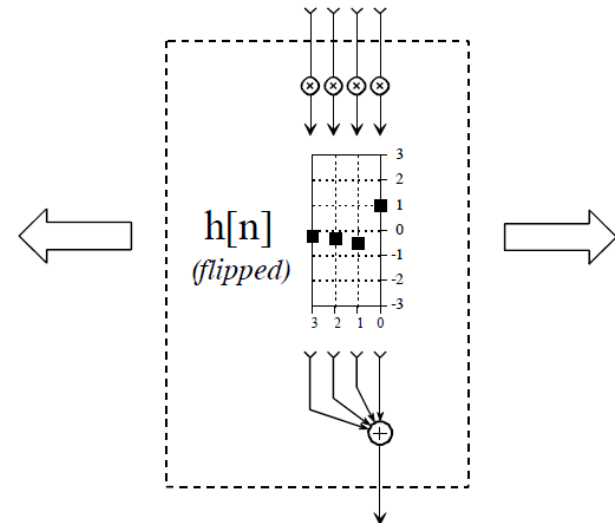
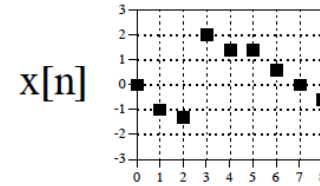
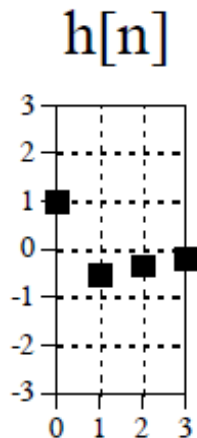
n = 6

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

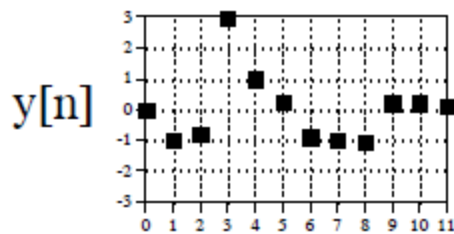
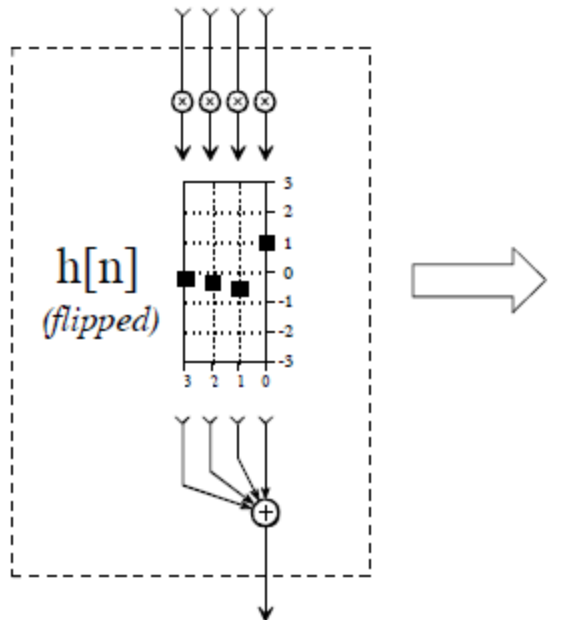
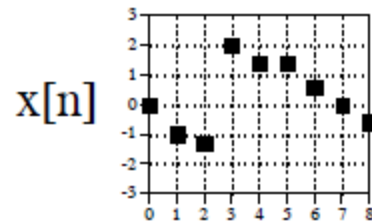
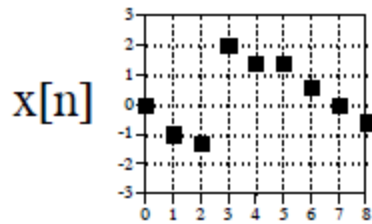
$$y[6] = x[3]h[3] + x[4]h[2] + x[5]h[1] + x[6]h[0]$$



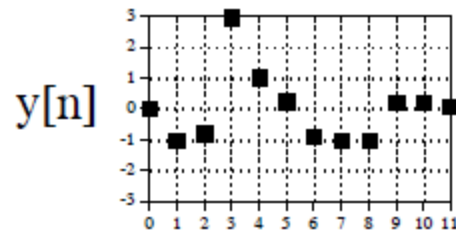
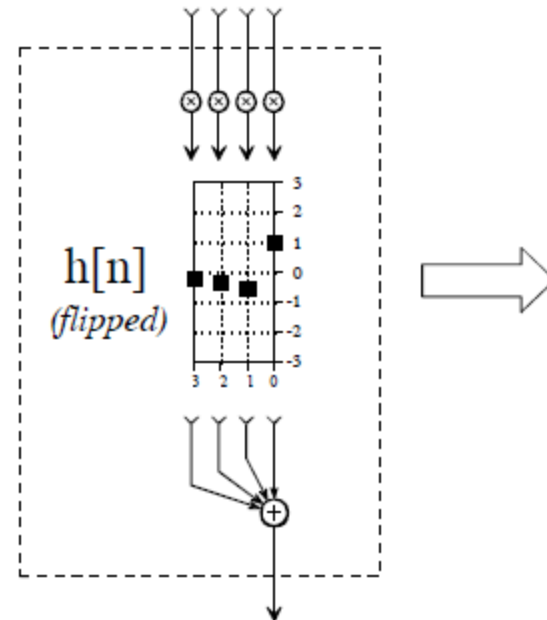
*



A resposta ao impulso é invertida no tempo

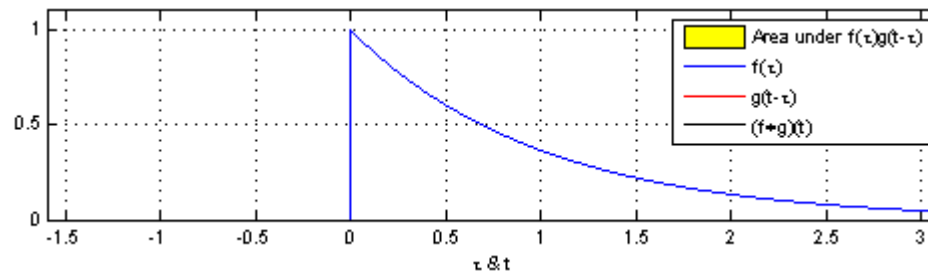
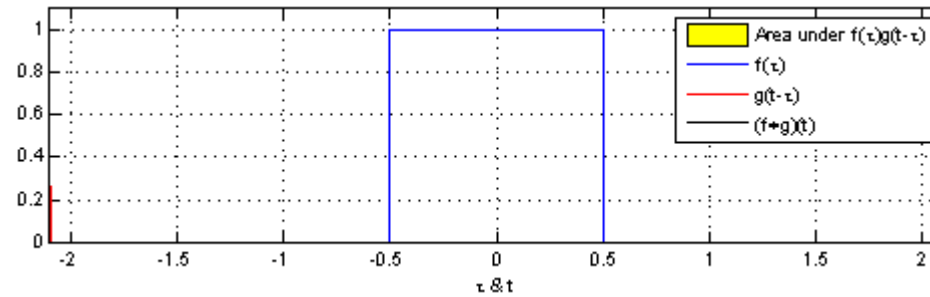


a. Set to calculate $y[0]$



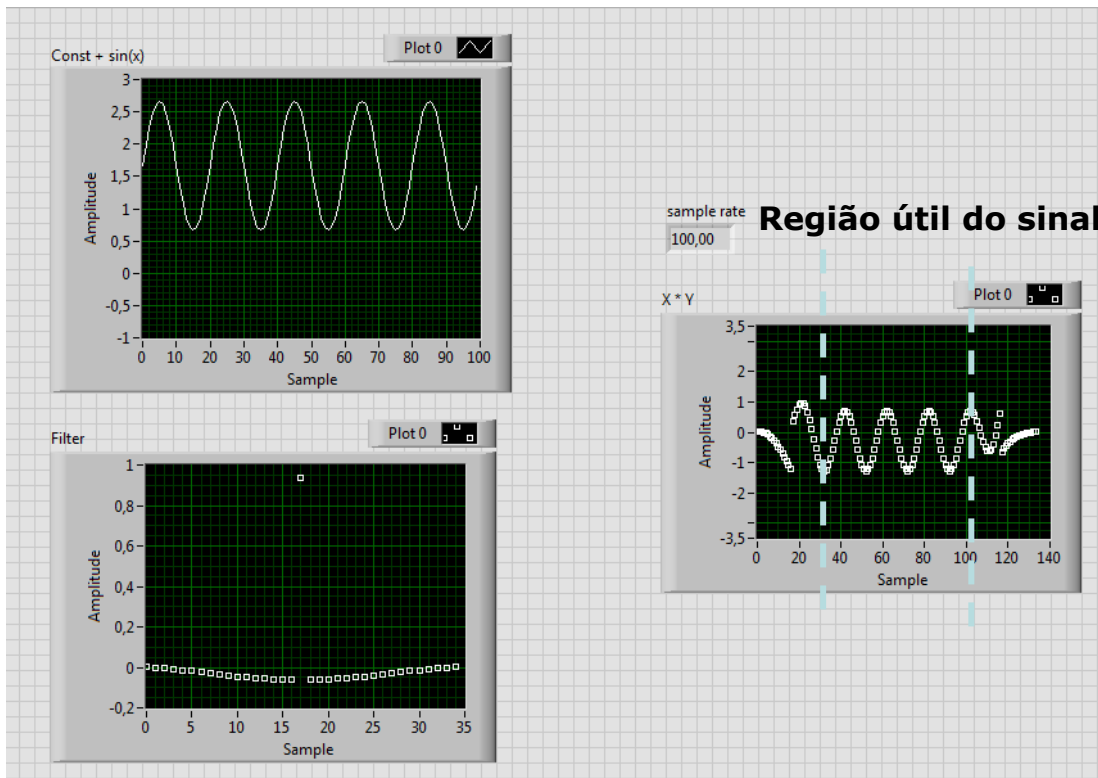
b. Set to calculate $y[3]$

Convolução



Convolução

Filtro passa altas para remover a componente DC do sinal



As regiões mais a esquerda e mais a direita no sinal de saída não carregam toda a informação da resposta ao impulso do sistema

Resumindo...

Um sistema LIT pode ser completamente descrito por sua resposta ao impulso.

Essa foi a base para descrever o **1º algoritmo**. Cada ponto no **sinal de entrada** contribui com o sinal de saída com uma **versão escalonada e deslocada da resposta ao impulso**.

A resposta ao impulso também pode ser observada como coeficientes de ponderação. Assim, **cada ponto no sinal de saída é uma soma de entradas ponderadas**, ou seja um ponto da saída é influenciada por uma região da entrada.

Essa foi a base para o **2º algoritmo**, na qual uma **região do sinal de entrada é multiplicada pela resposta ao impulso invertida no tempo**.

Exemplos de operações

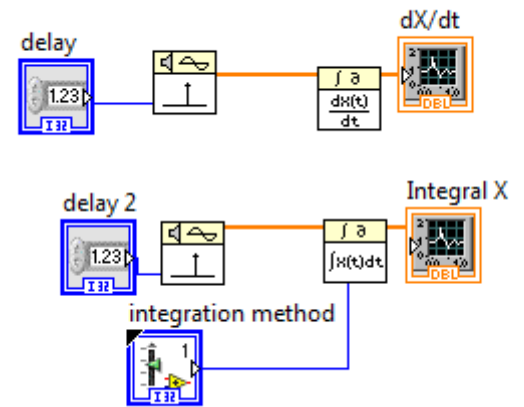
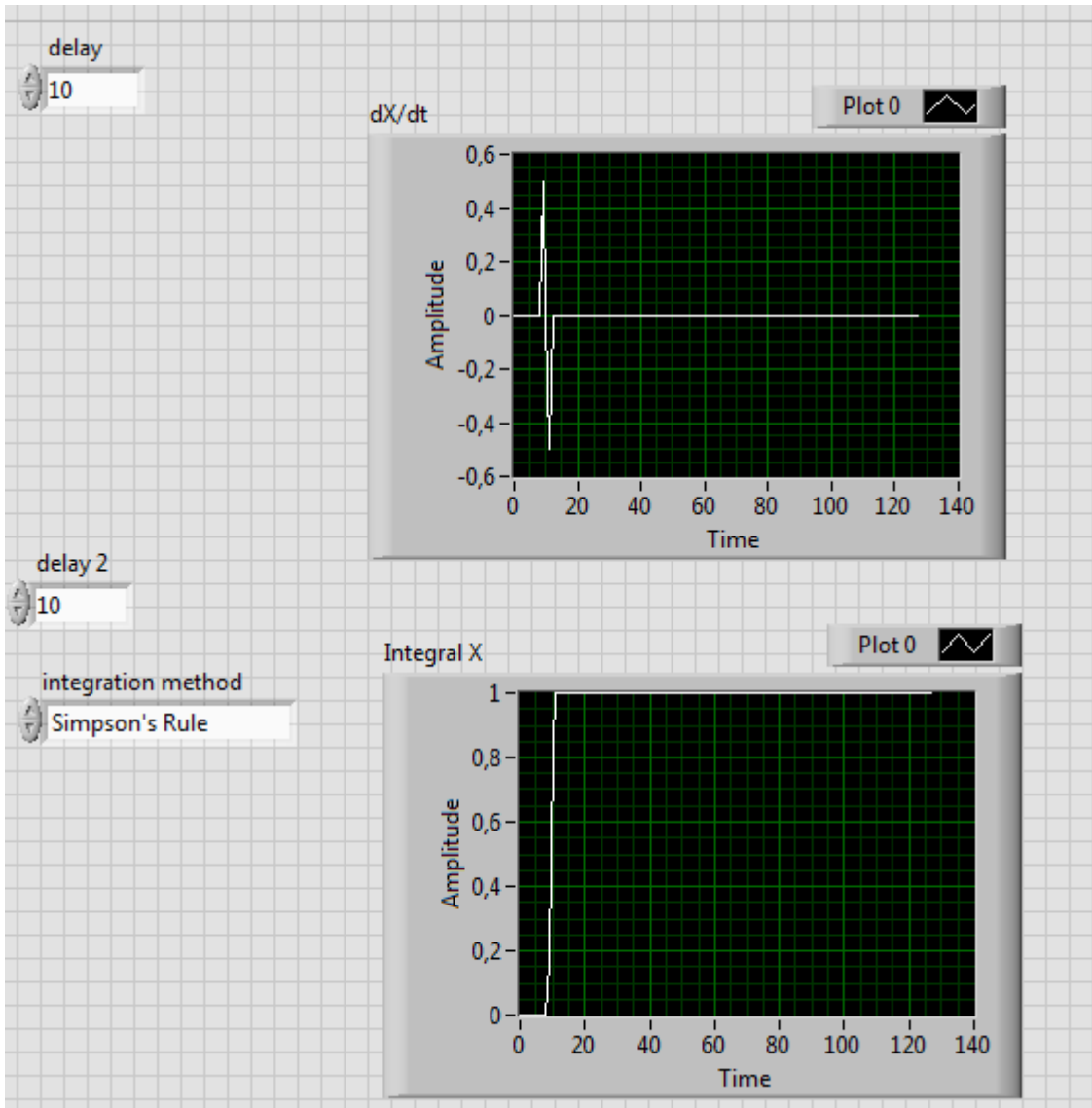
$$x[n] * \delta[n] = x[n] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Convolução sobre a função delta é} \\ \text{a própria função} \end{array} \right.$$

$$x[n] * k\delta[n] = kx[n] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Amplificador ou atenuador} \end{array} \right.$$

$$x[n] * \delta[n+s] = x[n+s] \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Avanço ou atraso no sinal} \end{array} \right.$$

Operações matemáticas

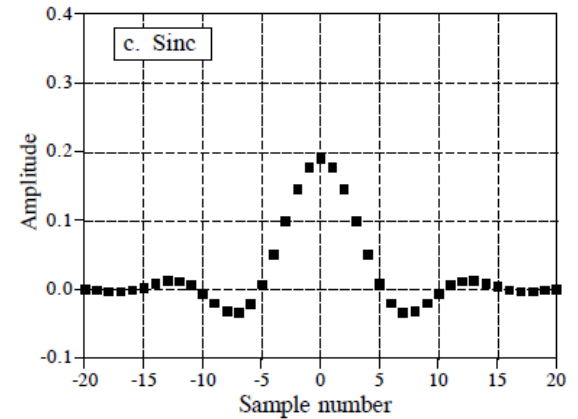
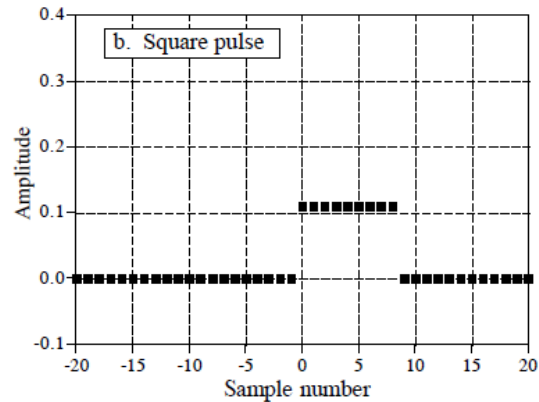
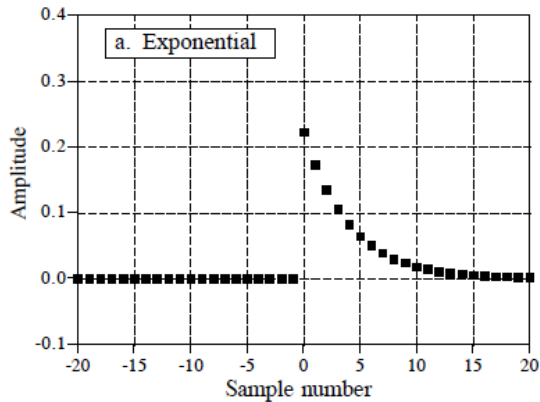
- Diferencial
 - Um ponto no sinal de saída (primeira diferença) é igual à diferença entre pontos adjacentes no sinal de entrada, ou seja a saída é a inclinação do sinal de entrada.
- Integral
 - Cada ponto no sinal de saída é igual à soma de todos os pontos a esquerda do sinal de entrada. Soma acumulada.



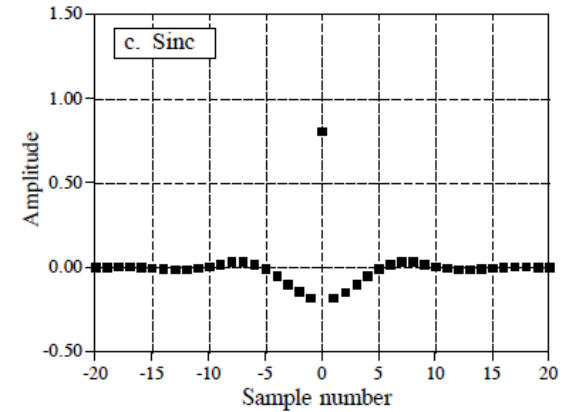
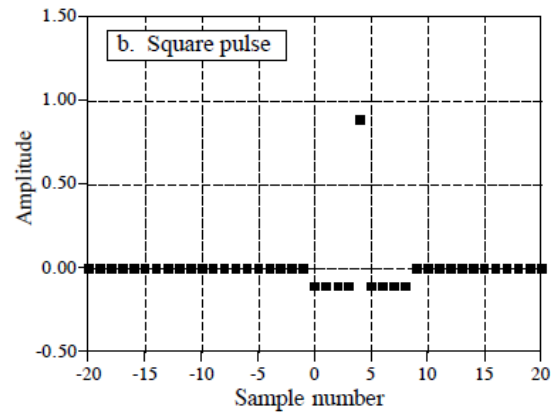
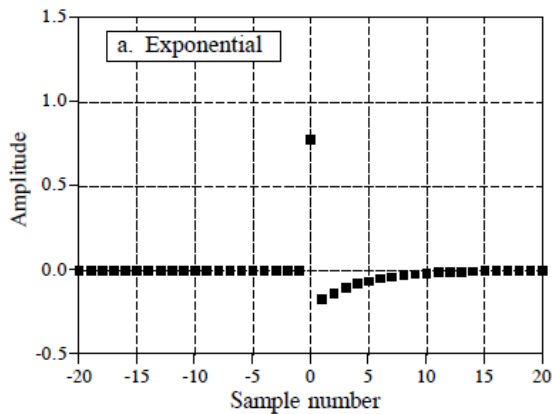
Filtros

- Discutiremos mais sobre os filtros em próximas aulas.
- **Filtro passa-baixas**, em geral, é composto de pontos positivos adjacentes. Isso resulta que em uma média ponderada de pontos vizinhos do sinal de entrada. Esse procedimento suaviza o sinal.
- **Filtro passa-altas**: todas menos as baixas frequências, ou seja, função delta menos a função correspondente ao passa-baixas.

Janelas aplicáveis a filtros passa-baixas

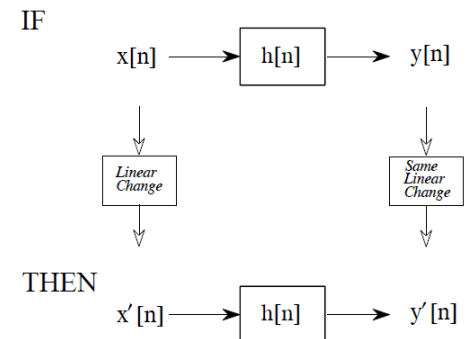


Janelas aplicáveis a filtros passa-altas



Propriedades da convolução

- Comutativa $a[n] * b[n] = b[n] * a[n]$
- Associativa $(a[n] * b[n]) * c[n] = a[n] * (b[n] * c[n])$
- Distributiva $a[n] * b[n] + a[n] * c[n] = a[n] * (b[n] + c[n])$
- Transferência entre entrada e saída



Correlação

- É uma operação similar à convolução.

$$R_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n+k]$$

- Essa operação aplicada a dois sinais para produzir um terceiro é chamada de **correlação cruzada**.
- Se o sinal é correlacionado com ele próprio denomina-se **autocorrelação**.

Correlação cruzada

- A amplitude de cada ponto no sinal da correlação cruzada é uma medida de similaridade entre os entre os sinais de entrada nesse ponto.
- A correlação é uma ótima técnica para detectar um sinal conhecido, mesmo com a presença de ruído.

Convolução Vs. Correlação

- Apesar da semelhança matemática, a convolução e a correlação são operações com significados distintos.

Convolução

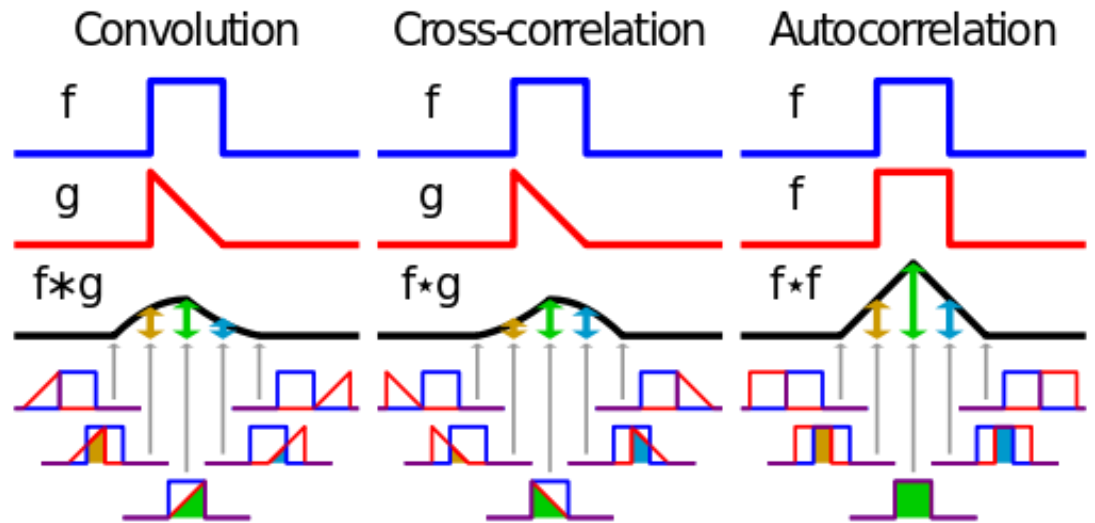
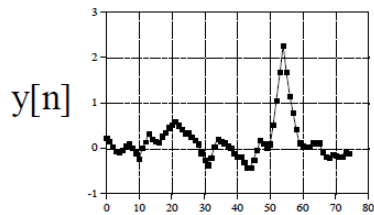
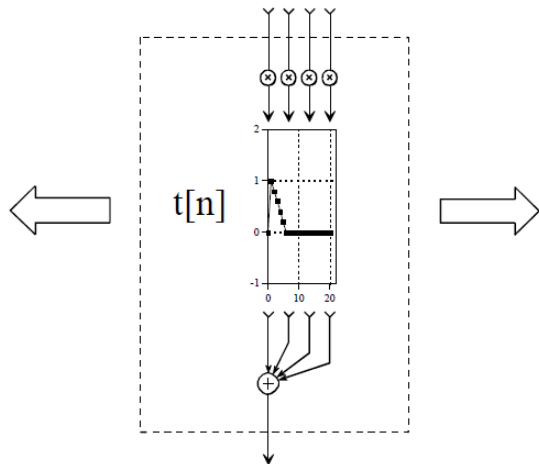
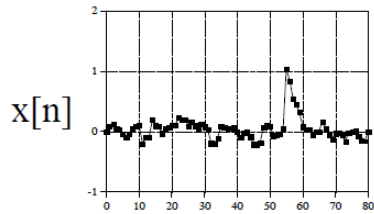
$$y[n] = x[n] * h[n]$$

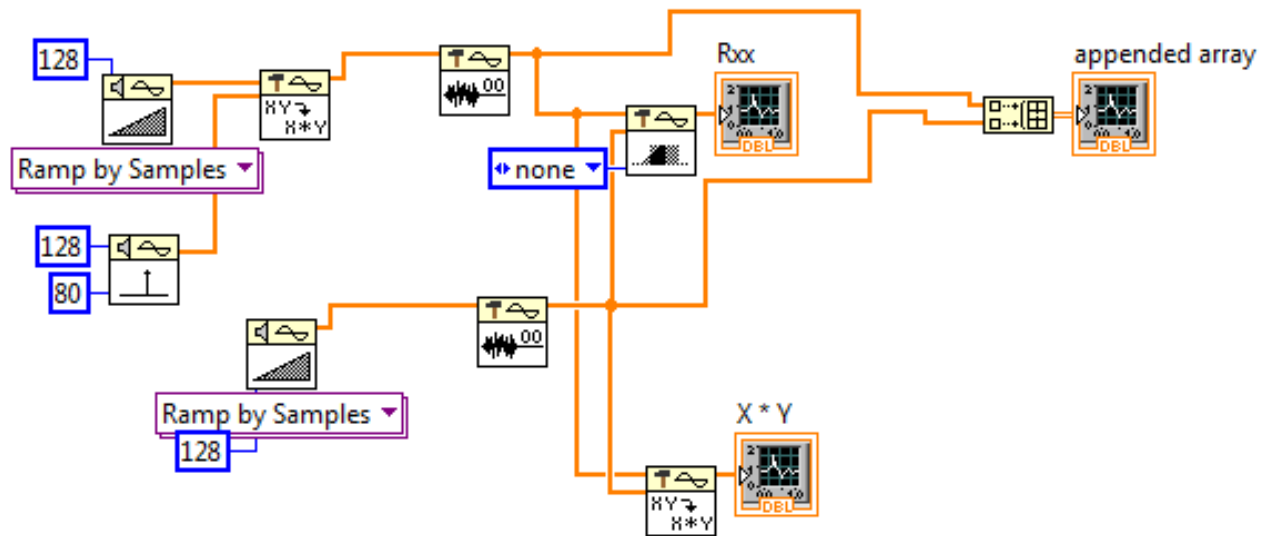
Relação entre o sinal de entrada ao sistema, o sinal de saída e a resposta ao impulso do sistema.

Correlação

$$y[n] = x[n] * h[-n]$$

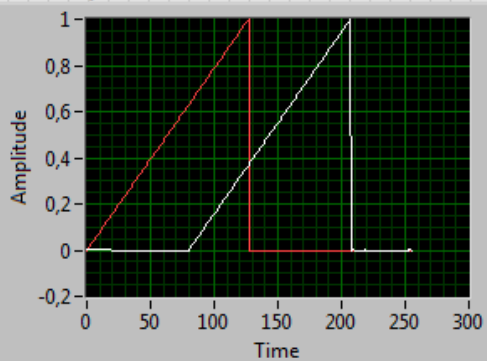
Ferramenta para avaliar a similaridade entre sinais. Muito aplicada na detecção de uma forma de onda conhecida imersa em ruído.





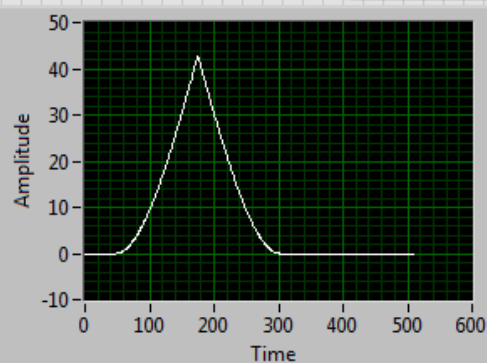
appended array

Plot 0



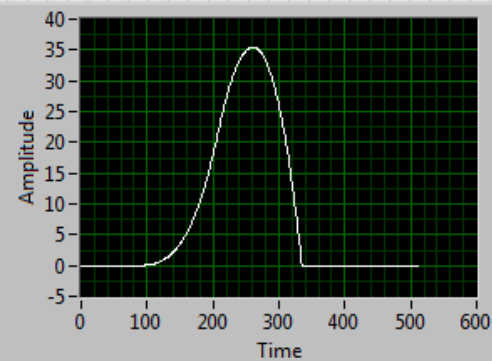
Rxx

Plot 0



X*Y

Plot 0



Bibliografia

- Smith, S.W. The Scientist and Engineer's Guide to Signal Processing (<http://www.dspguide.com/>)
- A. V. OPPENHEIM; A. S. Willsky. Sinais e Sistemas, 2ª ed., 2010.
- OPPENHEIM; R. W. SCHAFER & J. R. BUCK. Discrete-Time Signal Processing. Prentice Hall, 2ª ed., 1999.
- Carlos Alexandre Melo, Processamento de sinais, <http://www.cin.ufpe.br/~cabm/pds/PDS.pdf>