Programa de Pós-Graduação em Eng Mecânica – PPGEM

PME-5015 – Tópicos da Teoria da Elasticidade

2ª Lista de Exercícios – Estudo das Tensões

1) A lâmina plana unidirecional indicada na figura abaixo é formada por fibras de carbono distribuídas homogeneamente e dispostas segundo um ângulo θ medido em relação ao eixo horizontal Ox do sistema de coordenadas Oxy. Considerando que a lâmina apresentada está submetida a um estado uniforme de tensões (planas) de tal modo que o tensor das tensões escrito na base $b = \left(\vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z\right)$ seja dado por:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} 50 & -20 & 0 \\ -20 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ (tensões em MPa)}$$

Pede-se:

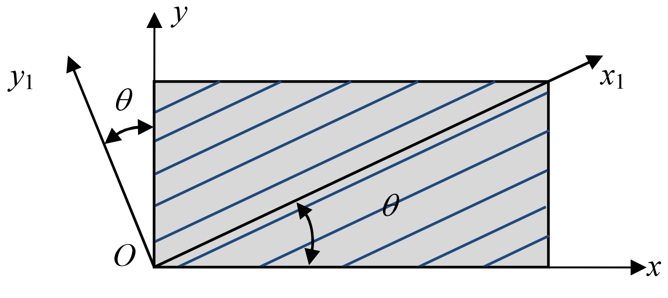
a) Determinar as tensões principais e as direções principais de tensão nos pontos da lâmina;

b) Determinar a máxima tensão de cisalhamento na lâmina e as direções das normais aos planos em que estas máximas tensões cisalhantes atuam;

c) Determinar se existem tensões normais que atuam nos planos de máxima tensão de cisalhamento e, em caso positivo, o valor destas tensões normais;

d) Determinar as componentes do tensor das tensões segundo a base $b_1 = \left(\vec{e}_{x1},\ \vec{e}_{y1},\ \vec{e}_{z1}\right)$ onde os eixos Ox_1y_1 correspondem aos eixos de simetria elástica (como indicados na figura);

e) Verificar que os invariantes do tensor das tensões (I_1, I_2 e I_3) permanecem os mesmos nas duas bases consideradas (bases b e b_1).

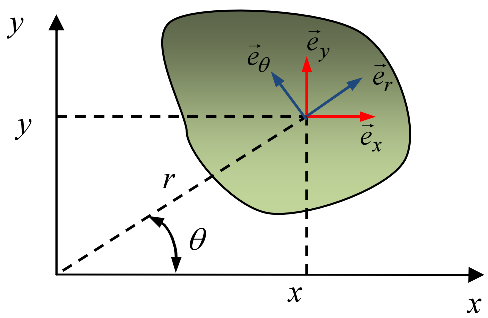


2) Considere que o tensor das tensões em um determinado ponto de uma estrutura seja escrito na base $b=\left(\vec{e}_x,\, \vec{e}_y,\, \vec{e}_z\right)$, associada ao sistema de coordenadas cartesianas, na forma:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

sendo: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ e $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

Pede-se: determinar as novas componentes do tensor das tensões na base $b_1 = \left(\vec{e}_r,\, \vec{e}_\theta,\, \vec{e}_z\right)$, também ortonormal e com orientação positiva, associada ao sistema de coordenadas cilíndricas. Sugestão: utilize a fórmula de transformação de tensão, determinando, antes, a matriz de mudança de base entre as duas bases indicadas.



3) Considere que o tensor das tensões em um determinado ponto de uma estrutura seja dado por:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

sendo $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (tensor simétrico). Pede-se:

a) Mostre que, além da tensão principal $\sigma = \sigma_z$, as demais tensões principais no ponto ficam dadas pelas relações:

$$\sigma = \sigma = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\tau_{xy}\right)^2}$$

b) Verifique que, entre os planos paralelos à direção principal $\vec{e}_z$, aqueles em que atua a máxima tensão de cisalhamento serão os planos que formam 45° com as direções principais associadas às duas tensões principais indicadas no item anterior.

4) Seja o tensor das tensões em um ponto de uma estrutura, escrito numa dada base $b=\left(\vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z\right)$, dado por:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{(tensões em MPa)}$$

Pede-se:

a) Determinar as tensões principais no ponto e traçar os círculos de Mohr das tensões;

b) Determinar as direções principais de tensão no ponto;

c) Determinar a máxima tensão de cisalhamento no ponto;

d) Determinar as componentes esférica e anti-esférica do tensor das tensões;

e) Determinar as tensões principais da parte anti-esférica do tensor das tensões, verificando, após a obtenção das mesmas, que valem as relações: $\sigma_i = \sigma_m + s_i$ (i = 1, 2, 3)

f) Determinar os invariantes de tensão I_1, I_2, I_3, J_2, J_3 do tensor (não se esqueça de indicar as unidades!)

g) Escrever o tensor das tensões e suas componentes esférica e anti-esférica na base formada pelas direções principais de tensão e verifique que todos os invariantes calculados anteriormente não se alteram (independem da base).

5) Considere que o material da estrutura do problema anterior tenha comportamento dúctil com tensão de escoamento $\sigma_e =$ 250 MPa. Determine os coeficientes de segurança (com relação ao início do escoamento), para o estado tensional indicado no problema, considerando:

a) o critério de von Mises (máxima densidade de energia de distorção);

b) o critério de Tresca (máxima tensão de cisalhamento);

c) Responda: qual dos critérios forneceu um resultado mais conservativo?

6) Considere que o tensor das tensões em um determinado ponto de uma estrutura, escrito na base formada pelas direções principais de tensão seja dado por:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Pede-se:

a) Determinar as componentes esférica e anti-esférica do tensor das tensões;

b) Determinar os invariantes de tensão I_1, I_2, I_3, J_2, J_3 do tensor;

c) Determinar o vetor tensão atuante no plano octaédrico de normal $\vec{n}_o = \left(\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\right)$;

d) Determinar a componente normal (σ_o) e cisalhante (τ_o) do vetor tensão que atua no plano octaédrico;

e) Verificar que a componente da tensão de cisalhamento atuante no plano octaédrico é proporcional a $\sqrt{J_2}$.

7) Utilizando os resultados do exercício anterior, mostre que são válidas as seguintes relações entres os invariantes de tensão:

$$J_2 = \frac{(I_1)^2}{3} - I_2$$

$$J_3 = \frac{2(I_1)^3}{27} - \frac{I_1 I_2}{3} + I_3$$

8) Lembrando que a "posição" de um ponto no espaço das tensões principais pode ser descrita tanto pela terna $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ quanto pela terna (q, r, θ), mostre que valem as relações:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{I_1}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{2}{3}\sqrt{3J_2}\,.\begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \cos\left(\theta - 2\pi/3\right) \\ \cos\left(\theta + 2\pi/3\right) \end{Bmatrix}$$