1. Para cada EDO abaixo encontre duas soluções particulares linearmente independentes e a solução particular das condições iniciais dadas :

(1) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$ com $x(0) = 2$ e $\dot{x}(0) = 6$;

(2) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0$ com $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$.

(3) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$ com $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.

(4) $\ddot{x} + x = 0$ com $x(0) = 1$ e $x(\pi) = 1$. Note que a segunda condição diz respeito a $t = \pi$. Explique o que aconteceu.

(5) $4\ddot{x} - 20\dot{x} + 21x = 0$ com $x(0) = -4$ e $\dot{x}(0) = -12$.

2. Suponha que as raizes da equação auxiliar sejam $k_1 > 0$ e $-k_2 < 0$ de forma que a solução seja

$$x(t) = Ae^{k_1 t} + Be^{-k_2 t}$$

com CI : $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = y_0$

(1) Encontre uma relação entre x_0 e y_0 para que a a solução não va para $+\infty$ ou $-\infty$ quando $t \to \infty$.

3. Vamos mostrar que as soluções da EDO a coeficientes constantes $\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0$ com CI : $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = y_0$, não podem explodir para $x \to \infty$ em tempos finitos.

(1) Mostre que podemos escrever a ED0 de segunda ordem como duas EDO de primeira ordem definindo $\dot{x} = y$

(2) Suponha que se $dZ/dt \leq cZ$ segue que $Z(t) \leq Z(t_0)e^{c(t-t_0)}$. (Pode provar se quiser)

(3) Mostre primeiro que $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ e que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = (1 - q)xy - py^2.$$

Segue portanto

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) \leq (1 + |q| + 2|p|)(x^2 + y^2)$$

(4) Mostre que

$$\frac{1}{2}(x(t)^2 + y(t)^2) \leq (x(0)^2 + y(0)^2)e^{(1+|q|+2|p|)t}$$

e portanto para qualquer t finito a solução é limitada.

(5) Mostre que para $p = 0$ e $q \geq 0$ temos uma lei de conservação. Interprete.