

# Deformação e Deslocamentos na Flexão

Edgard S. Almeida Neto  
Escola Politécnica da USP  
9 de Novembro de 2017

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Equação da Linha Elástica</b>	<b>3</b>
2.1	Hipóteses Básicas . . . . .	3
2.2	Dedução da Equação da Linha Elástica na Flexão Pura . . . . .	3
2.2.1	Distribuição das Tensões e Deformações na seção Transversal . . . . .	3
2.2.2	Equação da Linha Elástica . . . . .	5
2.2.3	Equação Aproximada da Linha Elástica . . . . .	6
2.3	Generalização para a Flexão Normal Simples . . . . .	6
2.4	Exemplos . . . . .	8
2.5	Vigas Simples Hiperestáticas . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Vigas Retas com Dois ou Mais Trechos</b>	<b>13</b>
3.1	Aplicação Direta da Equação da Linha Elástica por Trecho . . . . .	13
3.2	Funções de Macaulay* . . . . .	14
3.3	Analogia de Mohr* . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Efeitos Térmicos</b>	<b>26</b>
<b>5</b>	<b>Sistemas de Barras</b>	<b>28</b>

## 1 Introdução

No estudo das deformações das barras à flexão, a equação da linha elástica é obtida incorporando-se as equações constitutivas e de equilíbrio às equações de compatibilidade. A forma linearizada dessa equação mais as condições de contorno de uma estrutura reticulada possibilitam o cálculo dos deslocamentos e rotações das seções transversais (ST's) dessa estrutura sujeita a um carregamento qualquer.

A hipótese de Navier desempenha um papel fundamental no estudo pois ela conduz à hipótese de Bernoulli-Euler de distribuição linear das deformações na seção. Adicionalmente, admite-se a linearidade do problema; ou seja, a observância da linearidade física segundo a lei de Hooke e da linearidade geométrica mediante a hipótese de pequenas deformações e deslocamentos. A linearidade do problema possibilita o desacoplamento das deformações provocadas por cada esforço solicitante e o uso sistemático do princípio da superposição de efeitos na determinação dos deslocamentos.

Embora seja importante por si só, o estudo das deformações das barras é essencial em outros tópicos da Mecânica das Estruturas, tais como:

- resolução de estruturas hiperestáticas (nas quais é impossível obter todos os esforços internos a partir das equações de equilíbrio ao contrário das estruturas isostáticas);
- estudo da estabilidade de estruturas formadas por barras esbeltas (emprego da equação da linha elástica considerando efeitos de segunda ordem);
- verificação da segurança em relação a deformações excessivas (estado limite de utilização);
- estudo das vibrações.

Duas formas da equação da linha elástica são deduzidas na Seção 2. A equação com a curvatura da barra, que requer a hipótese de pequenas deformações, e a sua forma linearizada com a derivada segunda dos deslocamentos transversais, que requer a hipótese adicional de pequenas rotações.

Três processos de cálculo da *deflexão* das barras, ou seja da deformação provocada pela flexão, são examinados: (a) aplicação direta da equação da linha elástica, com ou sem o emprego das funções de Macaulay; (b) analogia com as equações diferenciais de equilíbrio, denominada *analogia de Mohr* e (c) composição dos deslocamentos e rotações nas extremidades dos trechos de barra que constituem a estrutura. O último processo é usado na determinação direta dos deslocamentos de sistemas de barras.

Para completar o estudo, discutem-se as deformações longitudinais por momento fletor e as transversais por força cortante. Os exemplos apresentados mostram de forma clara quando os efeitos dessas deformações podem ser desprezados.

## 2 Equação da Linha Elástica

### 2.1 Hipóteses Básicas

As seguintes *hipóteses* são consideradas no cálculo das deformações por flexão:

1. as deformações, as rotações e os deslocamentos são pequenos<sup>1</sup>;
2. o material da barra é homogêneo, isótropo e elástico linear;
3. a barra tem eixo reto na configuração indeformada e a variação das dimensões da seção transversal é pequena ao longo da barra;
4. as seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo deformado da barra (*hipótese de Navier*);

### 2.2 Dedução da Equação da Linha Elástica na Flexão Pura

#### 2.2.1 Distribuição das Tensões e Deformações na seção Transversal

Na Figura 1, uma viga biapoiada é usada para ilustrar as convenções de sinal adotadas na demonstração. O deslocamento transversal  $v(x)$  é positivo quando tem o mesmo sentido do eixo  $y$ , o qual encontra-se orientado para baixo em virtude da predominância dos esforços gravitacionais nas estruturas civis. A rotação  $\varphi(x)$  é positiva quando a seção transversal (ST) gira do eixo  $x$  para o  $y$ , correspondendo ao sentido horário na figura.

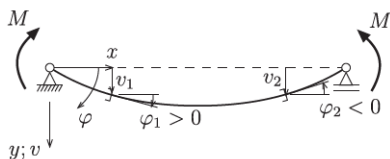


Fig. 1: Convenção de sinais para o deslocamento  $v$  e a rotação  $\varphi$ .

<sup>1</sup>Ou seja, as equações de equilíbrio podem ser escritas na configuração indeformada da estrutura.

Consideremos o trecho de comprimento infinitesimal  $dx$  indicado na Fig. 2. Ele é delimitado pelas seções AGC e BHD, que assumem as posições A'G'C' e B'H'D' após a deformação. Em decorrência da hipótese de Navier, os planos das seções formam um ângulo  $d\theta$  e as fibras longitudinais formam arcos concêntricos após a deformação. O *raio de curvatura*  $\rho$  mede a distância do centro O à fibra G'H' que permanece com o mesmo comprimento  $dx$  após a deformação<sup>2</sup>. Para a situação ilustrada, as fibras acima de G'H' estão comprimidas e as abaixo estão tracionadas.

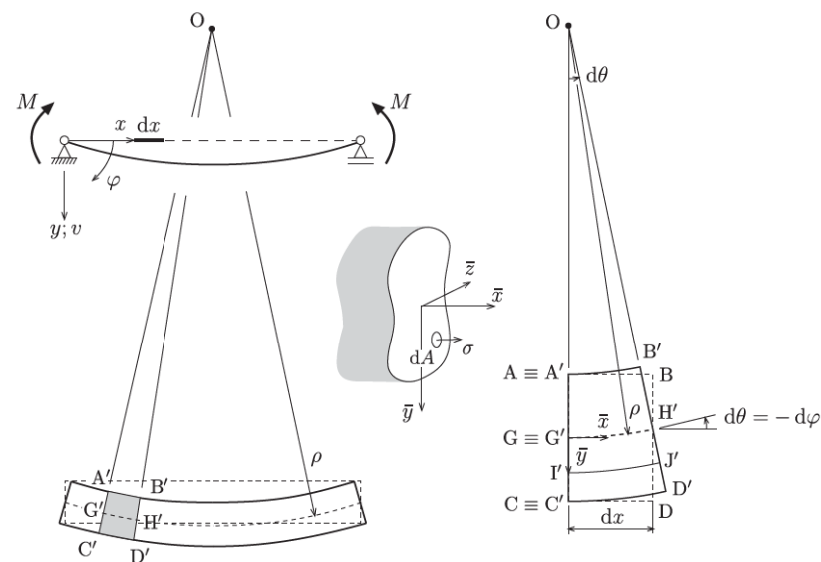


Fig. 2: Deformação de um trecho de viga com comprimento  $dx$  na flexão pura.

Definindo um sistema de eixos locais  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  com origem em  $G'$  e orientados conforme mostra a figura, a deformação  $\varepsilon(\bar{y})$  de uma fibra longitudinal  $I'J'$  com ordenada  $\bar{y}$  é dada por

$$\varepsilon(\bar{y}) = \frac{I'J' - IJ}{IJ} = \frac{I'J' - G'H'}{G'H'} = \frac{(\rho + \bar{y}) d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{\bar{y}}{\rho}, \quad (1)$$

em que  $I'J'$  denota o comprimento de arco deformado e  $IJ$  o comprimento indeformado. A

<sup>2</sup>A superfície na qual as fibras longitudinais permanecem com o mesmo comprimento  $dx$  é denominada *superfície neutra*, e sua intersecção com a ST é denominada *linha neutra* (LN).

substituição de  $\varepsilon(\bar{y})$  na lei de Hooke,  $\sigma = E\varepsilon$ , fornece

$$\sigma(\bar{y}) = E \frac{\bar{y}}{\rho}. \quad (2)$$

A dependência linear da coordenada  $\bar{y}$  nas Eqs. (1) e (2) demonstra que as deformações  $\varepsilon$  e as tensões normais  $\sigma$  possuem distribuições planas na ST.

### 2.2.2 Equação da Linha Elástica

Se introduzirmos a Eq. (2) nas relações entre os esforços solicitantes e as tensões normais, obteremos os resultados a seguir:

**A origem  $G'$  coincide com o centro de gravidade da ST**

$$N = \int_A \sigma dA \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{E}{\rho} \overbrace{\int_A \bar{y} dA}^{S_{\bar{z}}} \quad \Rightarrow \quad S_{\bar{z}} = 0. \quad (3)$$

**Os eixos  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$  são eixos centrais-principais**

$$M_{\bar{y}} = \int_A \sigma \bar{z} dA \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{E}{\rho} \overbrace{\int_A \bar{y} \bar{z} dA}^{I_{\bar{y}\bar{z}}} \quad \Rightarrow \quad I_{\bar{y}\bar{z}} = 0. \quad (4)$$

Em decorrência das Eqs. (3) e (4) a linha neutra (LN) coincide com o eixo central-principal  $\bar{z}$  na flexão pura.

**Curvatura do eixo deformado é proporcional ao momento fletor**

$$-M_{\bar{z}} = M = \int_A \sigma \bar{y} dA \quad \Rightarrow \quad M = \frac{E}{\rho} \overbrace{\int_A \bar{y}^2 dA}^{I_{\bar{z}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_{\bar{z}}},$$

com o momento fletor  $M(x)$  sendo positivo quando traciona as fibras inferiores da viga. O produto  $EI$  é denominado *produto de rigidez à flexão*.

A equação do eixo deformado da barra é conhecida por *equação da linha elástica*. Na sua forma mais geral ela é expressa em termos da *curvatura* do eixo — indicada pela letra grega  $\kappa$ ,

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_{\bar{z}}}. \quad (5)$$

Contudo, a equação admite uma forma aproximada no caso de pequenas rotações da ST, como mostrado a seguir.

### 2.2.3 Equação Aproximada da Linha Elástica

Da Geometria Analítica, obtemos a seguinte expressão da curvatura:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} \quad (6)$$

em que  $v' = dv/dx$  e  $v'' = d^2v/dx^2$ . Para pequenas rotações,  $(v')^2 \ll 1$  e o denominador da Eq. (6) é praticamente<sup>3</sup> igual a um<sup>4</sup>. Consequentemente, a equação da linha elástica admite a seguinte forma linearizada:

$$\boxed{v''(x) = -\frac{M(x)}{EI}}. \quad (7)$$

O sinal negativo decorre da convenção de sinal de  $\varphi(x)$  indicada na Fig. 1. Quando o centro de curvatura encontra-se do lado negativo de  $\bar{y}$ , como admitido na dedução, a curvatura provocada por um momento fletor positivo está associada a uma variação angular  $\Delta\varphi \approx \Delta v'$  negativa e, portanto, a  $v'' < 0$ .

Podemos ressaltar a linearidade entre momento fletor e  $v''$  escrevendo,

$$M(x) = -EIv''. \quad (8)$$

## 2.3 Generalização para a Flexão Normal Simples

A consideração das equações diferenciais de equilíbrio para um trecho de barra,

$$V = \frac{dM}{dx} = M', \quad p(x) = -\frac{dV}{dx} = -V',$$

<sup>3</sup>A aproximação é muito boa para pequenas rotações, com um erro de 1% para ângulos de  $47^\circ$ .

<sup>4</sup>Para pequenas deformações e rotações, as relações obtidas a partir da Fig. 2 permitem escrever:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \approx \frac{d\theta}{dx} = -\frac{d\varphi}{dx} \approx -\frac{d}{dx} \tan \varphi = -\frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \right) = -\frac{d^2v}{dx^2}.$$

em que  $V$  é a força cortante e  $p$  a força distribuída normal ao eixo da barra e orientada para baixo, fornece as relações:

$$V(x) = -[EIv''(x)]', \quad (9)$$

$$p(x) = [EIv''(x)]''. \quad (10)$$

No caso de uma viga prismática, chegamos a

$$p(x) = EIv^{iv}. \quad (11)$$

**Nota 1 (Efeito da Distorção nos Deslocamentos Transversais)** É usual que o momento fletor esteja acompanhado da força cortante na seção transversal pois  $M' = V$ . Entretanto, as deformações originadas por esses esforços têm naturezas distintas como indicado na Fig. 3:

- $M$  está associado ao alongamento linear das fibras longitudinais,
- $V$  está associada à variação angular, ou distorção, dos planos longitudinais com o plano da seção.

Adicionalmente, a distorção é não-uniforme ao longo da altura da seção, refletindo a distribuição das tensões tangenciais, e provoca o empenamento da seção originalmente plana.

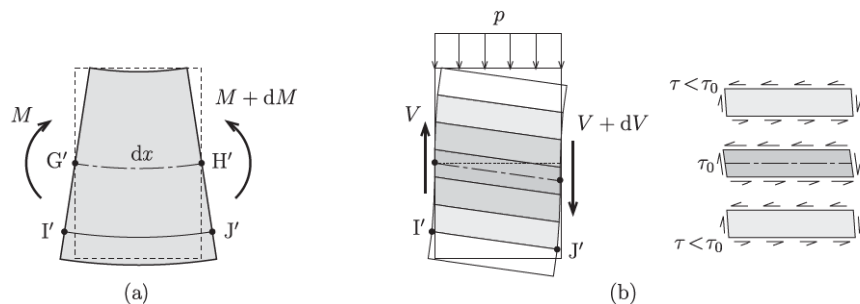


Fig. 3: Deformações de um trecho de viga: (a) por flexão e (b) por cisalhamento.

Embora as considerações acima pareçam invalidar a hipótese de Navier, constatamos que o efeito mútuo entre as deformações é muito pequeno. O empenamento da seção provocado pela força cortante praticamente não altera os comprimentos das fibras longitudinais admitidas na dedução da equação da linha elástica, o que permite desacoplar as deformações por  $V$  e  $M$ .

Finalmente, será mostrado adiante que os deslocamentos transversais decorrentes da distorção por  $V$  só adquirem importância frente aos deslocamentos transversais por flexão no caso de vigas curtas.

## 2.4 Exemplos

Os exemplos a seguir têm a finalidade de consolidar a convenção de sinais e apresentar os aspectos básicos da solução da equação diferencial da linha elástica.

**Exemplo 1** Determine as expressões do deslocamento transversal  $v(x)$  e da rotação  $\varphi(x)$  para a viga prismática indicada na figura.

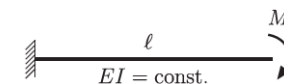


Fig. E1

SOLUÇÃO

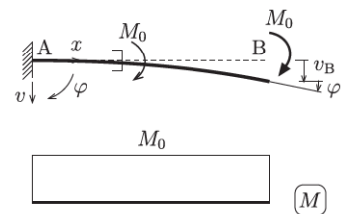


Fig. E1-i

O momento fletor em uma seção genérica é dado por

$$M(x) = -M_0.$$

Aplicando a equação da linha elástica, temos

$$v'' = -\frac{M(x)}{EI} = \frac{M_0}{EI}.$$

Integrando uma vez, temos

$$\varphi = v' = \frac{M_0}{EI}x + C_1,$$

e integrando novamente,

$$v = \frac{M_0}{2EI}x^2 + C_1x + C_2.$$

Finalmente, impondo as condições de contorno a seguir:

$$\varphi(0) = 0, \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0;$$

$$v(0) = 0, \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0;$$

chegamos à expressão da rotação

$$\varphi(x) = \frac{M_0}{EI}x$$

e à dos deslocamentos do eixo da barra,

$$v(x) = \frac{M_0}{2EI}x^2. \quad (12)$$

Os valores máximos de rotação e de deslocamento ocorrem na extremidade livre para  $x = \ell$ , ou seja

$$\boxed{\varphi(\ell) = \frac{M_0\ell}{EI}}, \quad \boxed{v(\ell) = \frac{M_0\ell^2}{2EI}}. \quad (13)$$

△

**Exemplo 2** Determine a flecha e a rotação na extremidade da viga. Considere  $EI = \text{const.}$

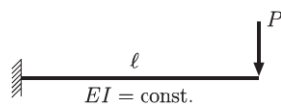


Fig. E2

SOLUÇÃO  
Adotando os eixos indicados na Fig. E2-i, temos

$$M(x) = -P(\ell - x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} v'' &= \frac{P}{EI} (\ell - x), \\ v' &= \frac{P}{EI} \left( \ell x - \frac{x^2}{2} + C_1 \right), \\ v &= \frac{P}{EI} \left( \frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right). \end{aligned}$$

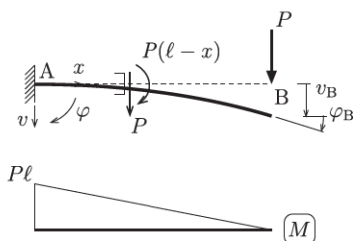


Fig. E2-i

Impondo as condições de contorno, obtemos as constantes de integração,

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0, & \Rightarrow C_1 = 0; \\ v(0) = 0, & \Rightarrow C_2 = 0; \end{aligned}$$

e as expressões

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{P}{EI} \left( \ell x - \frac{x^2}{2} \right), \\ v(x) &= \frac{P}{EI} \left( \frac{\ell x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \end{aligned}$$

Assim, para  $x = \ell$ ,

$$\boxed{\varphi(\ell) = \frac{P\ell^2}{2EI}}, \quad \boxed{v(\ell) = \frac{P\ell^3}{3EI}}. \quad (14)$$

Também podemos adotar um sistema de coordenadas com origem na extremidade livre da viga, Fig. E2-ii,

$$M(s) = -Ps,$$

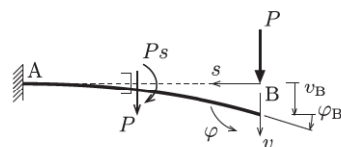


Fig. E2-ii

Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} v'' &= \frac{P}{EI} s, \\ \varphi &= \frac{P}{EI} \left( \frac{s^2}{2} + B_1 \right), \\ v &= \frac{P}{EI} \left( \frac{s^3}{6} + B_1 s + B_2 \right). \end{aligned}$$

Impondo as condições de contorno no engaste, chegamos às constantes de integração

$$\begin{aligned} \varphi(\ell) = 0: \\ \frac{\ell^2}{2} + B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = -\frac{\ell^2}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\ell) = 0: \\ \frac{\ell^3}{6} - \frac{\ell^3}{2} + B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = \frac{\ell^3}{3}; \end{aligned}$$

as quais possibilitam o cálculo da rotação e deslocamentos pedidos,

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \frac{P}{EI} \left( \frac{s^2}{2} - \frac{\ell^2}{2} \right), \\ \Rightarrow \varphi(0) &= \frac{-P\ell^2}{2EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(s) &= \frac{P}{EI} \left( \frac{s^3}{6} - \frac{\ell s}{2} + \frac{\ell^3}{3} \right), \\ \Rightarrow v(0) &= \frac{P\ell^3}{3EI}. \end{aligned}$$

△

**Exemplo 3** Determine o deslocamento máximo e a rotação no apoio direito da viga biapoiada da figura.

Considere  $EI = \text{const.}$

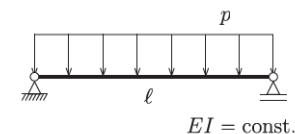


Fig. E3

SOLUÇÃO

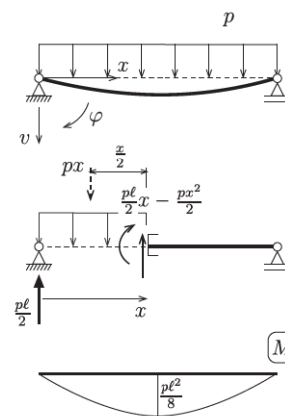


Fig. E3-i

Integrando a equação da linha elástica, temos

$$\begin{aligned} v'' &= -\frac{M(x)}{EI} = \frac{p}{EI} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{\ell x}{2} \right), \\ v' &= \frac{p}{EI} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{\ell x^2}{4} + C_1 \right), \\ v &= \frac{p}{EI} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{\ell x^3}{12} + C_1 x + C_2 \right). \end{aligned}$$

Impondo as condições de contorno, chegamos a

$$\begin{aligned} v(0) = 0 & \Rightarrow C_2 = 0, \\ v(\ell) = 0 & \Rightarrow C_1 = \frac{\ell^3}{24}; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{p}{EI} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{\ell x^2}{4} + \frac{\ell^3}{24} \right), \\ v(x) &= \frac{p}{EI} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{\ell x^3}{12} + \frac{\ell^3 x}{24} \right). \end{aligned}$$

Considerando a simetria, os valores pedidos são

$$\boxed{v\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{5p\ell^4}{384EI}}, \quad \boxed{\varphi(\ell) = -\varphi(0) = -\frac{p\ell^3}{24EI}}. \quad (15)$$

△

Momento fletor,

$$M(x) = \frac{p\ell x}{2} - \frac{px^2}{2}.$$

**Problema 1** Determine a flecha e a rotação na extremidade da viga em balanço submetida a um carregamento uniformemente distribuído. Considere  $EI = \text{const.}$

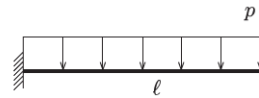


Fig. P 1

R.:  $\varphi(\ell) = \frac{p\ell^3}{6EI}$ ,  $v(\ell) = \frac{p\ell^4}{8EI}$ .

**Problema 2** Determine os valores extremos dos deslocamento e rotações para uma viga biapoiada submetida aos carregamentos senoidal e triangular indicados na figura. Considere  $EI = \text{const.}$



Fig. P 2 Viga biapoiada com carregamento distribuído não-uniforme.

R.: (a)  $\varphi(0) = \frac{p_0\ell^3}{EI\pi^3}$ ,  $v(\ell/2) = \frac{p_0\ell^4}{EI\pi^4}$ ;  
 (b)  $\varphi(0) = \frac{7p_0\ell^3}{360EI}$ ,  $\varphi(\ell) = -\frac{8p_0\ell^3}{360EI}$ ,  $f = v(0,51933\ell) = 0,00652\frac{p_0\ell^4}{EI}$ .

### 2.5 Vigas Simples Hiperestáticas

Nas estruturas hiperestáticas, os esforços solicitantes dependem das propriedades mecânicas dos materiais e das propriedades geométricas das seções transversais das barras. Como o emprego da equação da linha elástica já considera essas propriedades, podemos resolver facilmente vigas simples hiperestáticas pelo processo dos esforços.

**Exemplo 4** Determine a equação da linha elástica para viga apoiada-engastada da figura e trace o diagrama de momentos. Considere  $EI = \text{const.}$

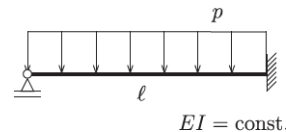


Fig. E 4

#### SOLUÇÃO

A viga tem grau de hiperestaticidade  $\text{GH} = 1$ . Na estrutura isostática fundamental (EIF) mostrada na Fig. E4-i, a incógnita hiperestática  $X$  substitui o vínculo vertical à esquerda e o momento fletor em uma seção arbitrária é dado por

$$M(x) = Xx - \frac{px^2}{2}.$$

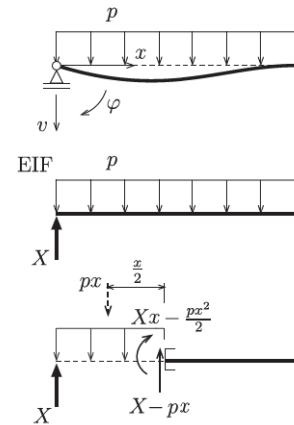


Fig. E4-i

A equação diferencial da linha elástica fornece

$$v'' = -\frac{M(x)}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{px^2}{2} - Xx \right),$$

$$v' = \frac{1}{EI} \left( \frac{px^3}{6} - \frac{Xx^2}{2} + C_1 \right),$$

$$v = \frac{1}{EI} \left( \frac{px^4}{24} - \frac{Xx^3}{6} + C_1x + C_2 \right).$$

A determinação de  $X$ ,  $C_1$  e  $C_2$  requer 3 condições de contorno, sendo que uma delas deve restabelecer a vinculação associada à incógnita hiperestática.

$$v(0) = 0 : C_2 = 0,$$

$$v(\ell) = 0 : \frac{p\ell^4}{24} - \frac{X\ell^3}{6} + C_1\ell = 0,$$

$$\varphi(\ell) = 0 : \frac{p\ell^3}{6} - \frac{X\ell^2}{2} + C_1 = 0.$$

Resolvendo o seguinte sistema de equações,

$$C_1 - \frac{X\ell^2}{6} = -\frac{p\ell^3}{24}$$

$$C_1 - \frac{X\ell^2}{2} = -\frac{p\ell^3}{6},$$

obtemos

$$X = \frac{3}{8}p\ell, \quad C_1 = \frac{1}{48}p\ell^3,$$

que introduzidas nas expressões de  $v'(x)$  e  $v(x)$  fornecem

$$\varphi(x) = \frac{p}{EI} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{3\ell x^2}{16} + \frac{\ell^3}{48} \right),$$

$$v(x) = \frac{p}{EI} \left( \frac{x^4}{24} - \frac{\ell x^3}{16} + \frac{\ell^3 x}{48} \right).$$

Substituindo  $X$  na expressão do momento fletor na EIF, obtemos

$$M(x) = \frac{3p\ell}{8}x - \frac{px^2}{2}.$$

O valor máximo ocorre para  $x = \frac{3\ell}{8}$ ,

$$M_{\text{máx}} = \frac{3p\ell}{8} \left( \frac{3\ell}{8} \right) - \frac{p}{2} \left( \frac{3\ell}{8} \right)^2 = \frac{9p\ell^2}{128}.$$

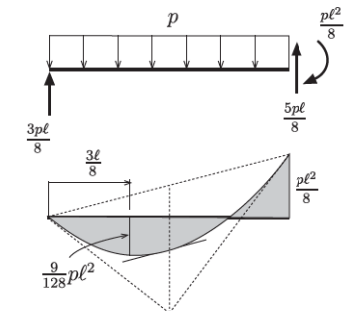


Fig. E 4-ii

△

### 3 Vigas Retas com Dois ou Mais Trechos

#### 3.1 Aplicação Direta da Equação da Linha Elástica por Trecho

**Exemplo 5** Determine o deslocamento no meio do vão e as rotações nos apoios para a viga ao lado.

Considere  $EI = \text{const.}$

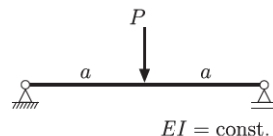


Fig. E5

**SOLUÇÃO**

A equação da linha elástica deve ser escrita para cada trecho do diagrama de momento fletor com derivada  $dM/dx$  contínua,

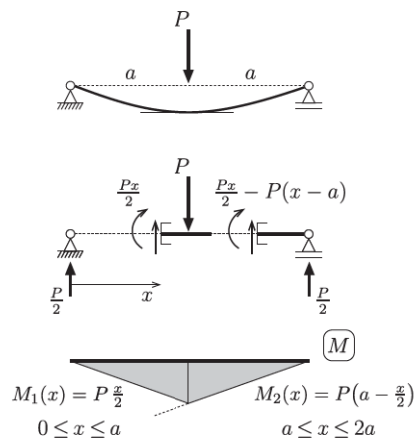


Fig. E5-i

Primeiro trecho:

$$\begin{aligned} v_1''(x) &= -\frac{M_1(x)}{EI} = -\frac{Px}{2EI}, \\ v_1'(x) &= \frac{P}{EI} \left( -\frac{x^2}{4} + C_1 \right), \\ v_1(x) &= \frac{P}{EI} \left( -\frac{x^3}{12} + C_1x + C_2 \right). \end{aligned}$$

Segundo trecho:

$$\begin{aligned} M_2(x) &= Pa - \frac{Px}{2}, \\ v_2''(x) &= -\frac{M_2(x)}{EI} = \frac{P}{EI} \left( \frac{x}{2} - a \right), \\ v_2'(x) &= \frac{P}{EI} \left( \frac{x^2}{4} - ax + D_1 \right), \\ v_2(x) &= \frac{P}{EI} \left( \frac{x^3}{12} - \frac{ax^2}{2} + D_1x + D_2 \right). \end{aligned}$$

Condições de contorno:

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 0 & C_2 &= 0, \\ v_2(2a) &= 0 & \frac{2a^3}{3} - 2a^3 + 2aD_1 + D_2 &= 0 \\ & & 2aD_1 + D_2 &= \frac{4a^3}{3}, \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} v_1'(a) &= v_2'(a) : \\ -\frac{a^2}{4} + C_1 &= \frac{a^2}{4} - a^2 + D_1 \\ C_1 - D_1 &= -\frac{a^2}{2}, \end{aligned} \quad (b)$$

$v_1(a) = v_2(a) :$

$$\begin{aligned} -\frac{a^3}{12} + C_1a &= -\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{12} + D_1a + D_2 \\ a(C_1 - D_1) - D_2 &= -\frac{a^3}{3}. \end{aligned} \quad (c)$$

Substituindo (b) em (c), obtemos

$$D_2 = \frac{a^3}{3} + \left( -\frac{a^3}{2} \right) = -\frac{a^3}{6}.$$

Introduzindo  $D_2$  em (a), temos

$$\begin{aligned} 2D_1a &= \left( \frac{4}{3} + \frac{1}{6} \right) a^3 = \frac{3a^3}{2} \\ \Rightarrow D_1 &= \frac{3}{4} a^2 \end{aligned}$$

e  $D_1$  em (b),

$$C_1 = \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) a^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Dessa forma chegamos a

$$\begin{aligned} v_1(x) &= -\frac{Px^3}{12EI} + \frac{Pa^2}{4EI}x, \\ \varphi_1(x) &= -\frac{Px^2}{4EI} + \frac{Pa^2}{4EI}. \end{aligned}$$

A rotação máxima ocorre junto aos apoios e a flecha ocorre no meio do vão,

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{máx}} &= \varphi_1(0) = \frac{Pa^2}{4EI}, \\ v_{\text{máx}} &= v_1(a) = -\frac{Pa^3}{12EI} + \frac{Pa^3}{4EI} = \frac{Pa^3}{6EI}. \end{aligned}$$

Para esse carregamento em particular, a simetria permite que as condições sejam impostas em um único trecho,

$$\begin{aligned} v_1(0) &= 0 & C_2 &= 0; \\ v_1'(a) &= 0 & -\frac{a^2}{4} + C_1 &= 0 \Rightarrow C_1 = \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

Lembrando que  $\ell = 2a$ , resultam as relações

$$\boxed{v_1\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{P\ell^3}{48EI}}, \quad \boxed{\varphi_1(0) = \frac{P\ell^2}{16EI}}. \quad (16)$$

△

Mesmo nesse exemplo simples, a imposição da continuidade dos trechos complica sobremaneira a obtenção da linha elástica. A seguir, examinaremos dois procedimentos de cálculo que evitam as condições de continuidade. Na primeira, integra-se uma única expressão de momento fletor válida para toda a viga. E na segunda, faz-se uso da analogia entre as equações diferenciais da linha elástica e as de equilíbrio de um trecho de viga.

#### 3.2 Funções de Macaulay\*

Podemos dispensar as condições de contorno relativas à continuidade dos trechos se escrevermos o momento fletor  $M(x)$  em uma única expressão válida para todos os trechos da viga. Isso é possível se empregarmos as *funções de Macaulay* ilustradas na Fig. 4 e definidas por

$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{para } x < a \\ (x - a)^n & \text{para } x \geq a, \end{cases} \quad (17)$$

em que  $n \geq 0$ . As funções de Macaulay apresentam a vantagem das regras de integração serem análoga à de polinômios,

$$\int \langle x - a \rangle^n dx = \frac{\langle x - a \rangle^{n+1}}{n+1} + C.$$

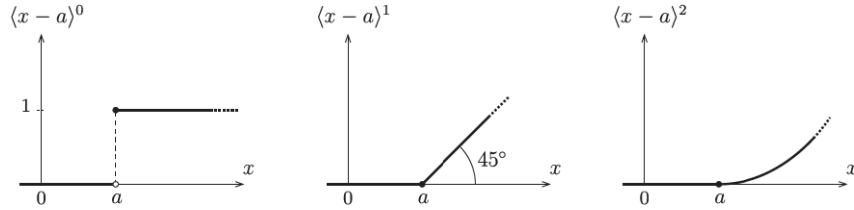


Fig. 4: Funções de Macaulay.

Considere a viga da Fig. 5 submetida ao carregamento indicado. No carregamento equivalente logo abaixo, a carga distribuída no intervalo  $[b, c]$  foi substituída por duas outras que terminam no final da viga: uma para baixo começando em  $b$  e a outra para cima começando em  $c$ . Na parte inferior da figura aparecem as parcelas de momento fletor que são acrescentadas em cada trecho ao percorrermos a viga da esquerda para a direita. Para obter uma expressão do momento fletor  $M(x)$  que é válida para toda a viga basta substituímos em cada parcela o termo entre parênteses pela correspondente função de Macaulay,

$$M(x) = R_A x + Q \langle x - a \rangle - \frac{p}{2} \langle x - b \rangle^2 + \frac{p}{2} \langle x - c \rangle^2 + M_0 \langle x - d \rangle^0 + R_B \langle x - e \rangle.$$

Note que não há necessidade de incluir a carga  $2Q$  na extremidade direita pois seu efeito já está incluído nas reações  $R_A$  e  $R_B$ . Aplicando a equação da linha elástica, temos

$$\begin{aligned} EIV'' &= -R_A x - Q \langle x - a \rangle + \frac{p}{2} \langle x - b \rangle^2 - \frac{p}{2} \langle x - c \rangle^2 - M_0 \langle x - d \rangle^0 + R_B \langle x - e \rangle \\ EIV' &= -\frac{R_A}{2} x^2 - \frac{Q}{2} \langle x - a \rangle^2 + \frac{p}{6} \langle x - b \rangle^3 - \frac{p}{6} \langle x - c \rangle^3 - M_0 \langle x - d \rangle + \frac{R_B}{2} \langle x - e \rangle^2 + C_1 \\ EIV &= -\frac{R_A}{6} x^3 - \frac{Q}{6} \langle x - a \rangle^3 + \frac{p}{24} \langle x - b \rangle^4 - \frac{p}{24} \langle x - c \rangle^4 - \frac{M_0}{2} \langle x - d \rangle^2 + \frac{R_B}{6} \langle x - e \rangle^3 \\ &\quad + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Finalmente, a determinação das constantes de integração requer apenas duas condições de

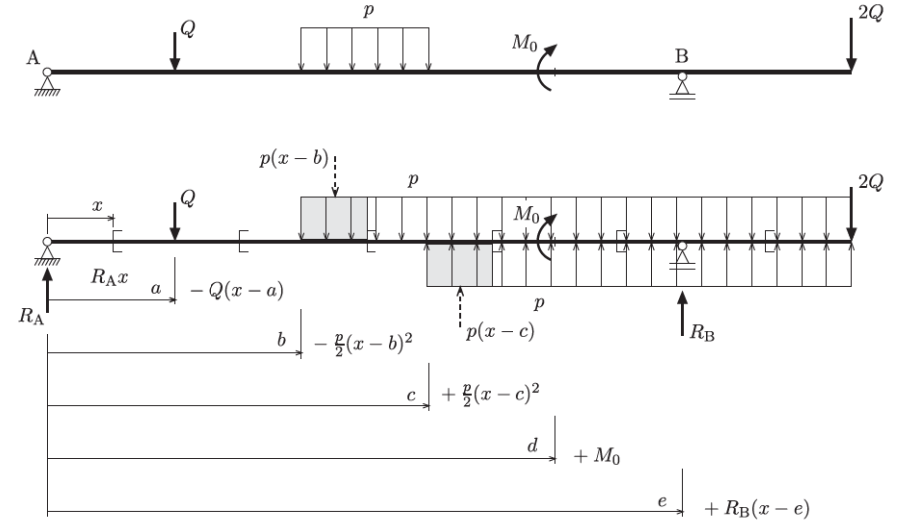


Fig. 5: Viga biapoiada com balanço: acréscimos de momento nos trechos.

contorno

$$v(0) = 0, \quad v(e) = 0.$$



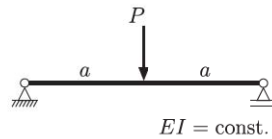


Fig. E6

**Exemplo 6** Refaça o exemplo anterior empregando as funções de singularidade na expressão do momento fletor.

$$M(x) = \frac{P}{2}x - P\langle x-a \rangle^1$$

Logo: 
$$v'' = -\frac{M}{EI} = \frac{P}{EI} \left[ -\frac{x}{2} + \langle x-a \rangle^1 \right]$$

$$\varphi(x) = v' = \frac{P}{EI} \left[ -\frac{x^2}{4} + \frac{\langle x-a \rangle^2}{2} + C_1 \right]$$

$$v(x) = \frac{P}{EI} \left[ -\frac{x^3}{12} + \frac{\langle x-a \rangle^3}{6} + C_1x + C_2 \right]$$

CC:

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$v(2a) = 0 \Rightarrow -\frac{8a^3}{12} + \frac{a^3}{6} + 2aC_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{a^2}{4}$$

$$v(x) = \frac{P}{EI} \left[ -\frac{x^3}{12} + \frac{\langle x-a \rangle^3}{6} + \frac{a^2x}{4} \right]$$

$$\varphi(x) = \frac{P}{EI} \left[ -\frac{x^2}{4} + \frac{\langle x-a \rangle^2}{2} + \frac{a^2}{4} \right]$$

$$\varphi_{max} = \varphi(0) = \frac{Pa^2}{4EI}$$

$$v_{max} = v(a) = \frac{P}{EI} \left[ -\frac{a^3}{12} + \frac{a^3}{4} \right] = \frac{Pa^3}{6EI}$$

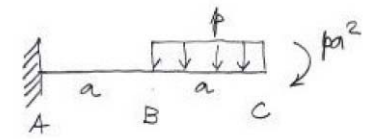


Fig. E7

**Exemplo 7** Determine a equação da linha elástica, o deslocamento do ponto B e a rotação do ponto C da viga em balanço. Considere  $EI = \text{const.}$

$$EIv'' = -\left[ -\frac{5pa^2}{2}\langle x-0 \rangle^0 + \frac{pa}{1!}\langle x-0 \rangle^1 + 0 \right] + \left[ 0 + 0 - \frac{p}{2!}\langle x-a \rangle^2 \right]$$

$$EIv'' = \frac{5pa^2}{2} - pax + \frac{p}{2!}\langle x-a \rangle^2$$

$$EIv' = \frac{5pa^2}{2}x - \frac{pax^2}{2} + \frac{p}{3!}\langle x-a \rangle^3 + C_1$$

$$EIv = \frac{5pa^2}{4}x^2 - \frac{pax^3}{6} + \frac{p}{4!}\langle x-a \rangle^4 + C_1x + C_2$$

CC:  $\varphi(0) = v'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$   
 $v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{5pa^2}{2}x - \frac{pax^2}{2} + \frac{p}{6}\langle x-a \rangle^3 \right]$$

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{5pa^2}{4}x^2 - \frac{pax^3}{6} + \frac{p}{24}\langle x-a \rangle^4 \right]$$

$$v_B = v(a) = \frac{pa^4}{EI} \left[ \frac{5}{4} - \frac{1}{6} \right] = \frac{13}{12} \frac{pa^4}{EI}$$

$$\varphi_C = \varphi(2a) = \frac{pa^3}{EI} \left[ 5 - 2 + \frac{1}{6} \right] = \frac{19}{6} \frac{pa^3}{EI}$$

**Exemplo 8** Determine a equação da linha elástica, o deslocamento e a rotação da extremidade direita da viga ao lado. Considere  $EI = \text{const.}$

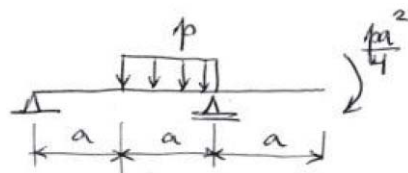
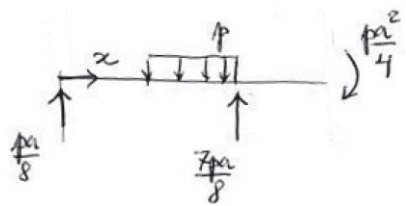


Fig. E8



$$M(x) = \frac{Pa}{8} \cdot x - \frac{p}{2} \langle x-a \rangle^2 + \frac{p}{2} \langle x-2a \rangle^2 + \frac{7pa}{8} \langle x-2a \rangle$$

$$EI v'' = -M(x)$$

CC:  $v(0) = 0$  e  $v(2a) = 0$

$$EI v'' = -\frac{Pa}{8} x + \frac{p}{2} \langle x-a \rangle^2 - \frac{p}{2} \langle x-2a \rangle^2 - \frac{7pa}{8} \langle x-2a \rangle$$

$$EI v' = -\frac{Pa}{16} x^2 + \frac{p}{6} \langle x-a \rangle^3 - \frac{p}{6} \langle x-2a \rangle^3 - \frac{7pa}{16} \langle x-2a \rangle^2 + C_2$$

$$EI v = -\frac{Pa}{48} x^3 + \frac{p}{24} \langle x-a \rangle^4 - \frac{p}{24} \langle x-2a \rangle^4 - \frac{7pa}{48} \langle x-2a \rangle^3 + C_1 x + C_2$$

CC:  $EI v(0) = C_2 = 0$

$$EI v(2a) = -\frac{8}{48} pa^4 + \frac{pa^4}{24} - 0 - 0 + 2a C_1 = 0$$

$$\Rightarrow + \frac{pa^4}{8} = 2a C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{pa^3}{16}$$

$$v(x) = \frac{p}{EI} \left[ -\frac{ax^3}{48} + \frac{\langle x-a \rangle^4}{24} - \frac{\langle x-2a \rangle^4}{24} - \frac{7a}{48} \langle x-2a \rangle^3 + \frac{pa^3}{16} x \right]$$

$$v_B = v(3a) = \frac{pa^4}{EI} \left[ -\frac{27}{48} + \frac{16}{24} - \frac{1}{24} - \frac{7}{48} + \frac{3}{16} \right] = \frac{5}{48} \frac{pa^4}{EI} = 0,1042 \frac{pa^4}{EI}$$

$$\theta_B = v'(3a) = \frac{pa^3}{EI} \left[ -\frac{9}{16} + \frac{8}{16} - \frac{1}{6} - \frac{7}{16} + \frac{1}{16} \right] = \frac{11}{48} \frac{pa^3}{EI} = 0,2292 \frac{pa^3}{EI}$$

**Exemplo 9** Determine a equação da linha elástica para a viga Gerber da figura. Considere  $EI = \text{const.}$

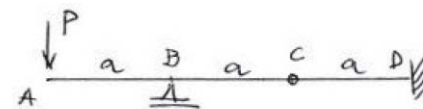
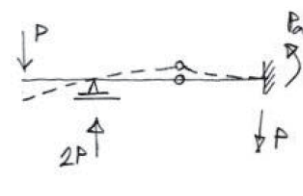


Fig. E9



Nota: O deslocamento  $v_C$  e a rotação  $\theta_C^{\text{dir}}$  podem ser determinados imediatamente

$$v_C = -\frac{Pa^3}{3EI} \quad \theta_C^{\text{dir}} = \frac{Pa^2}{2EI}$$

Na integração da linha elástica, a presença de rotações distintas à esquerda e à direita da articulação requer uma constante adicional  $C^l$  na equação de  $\psi(x)$ .

$$M(x) = -Px + 2P \langle x-a \rangle$$

↑  
condição rotacional  
 $M=0$  na art.

$$EI v'' = Px - 2P \langle x-a \rangle$$

$$EI v' = \frac{Px^2}{2} - P \langle x-a \rangle^2 + C_1 + C^l \langle x-2a \rangle^0$$

$$EI v = \frac{Px^3}{6} - \frac{P \langle x-a \rangle^3}{3} + C_1 x + C^l \langle x-2a \rangle + C_2$$

CC:  $v(a) = 0 \quad \frac{Pa^3}{6} + C_1 a + C_2 = 0$

$\psi(3a) = 0 \quad \frac{9Pa^2}{2} - 4Pa^2 + C_1 + C^l = 0$

$v(3a) = 0 \quad \frac{9Pa^3}{2} - \frac{8Pa^3}{3} + 3Ca + C^l a + C_2 = 0$

$$\begin{cases} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{cases} \begin{cases} C_1 \\ C_2 \\ C^l \end{cases} = \begin{cases} 1/6 \\ -1/2 \\ -1/6 \end{cases} Pa^3$$

$$C_1 = -\frac{3Pa^2}{2}, \quad C^l = Pa^2, \quad C_2 = \frac{5}{3} Pa^3$$

Res.:  $\psi(x) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Px^3}{6} - P \langle x-a \rangle^2 - \frac{3Pa^2}{2} x + Pa^2 \langle x-2a \rangle^0 \right]$

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Px^3}{6} - \frac{P \langle x-a \rangle^3}{3} - \frac{3Pa^2 x}{2} + Pa^2 \langle x-2a \rangle + \frac{5}{3} Pa^3 \right]$$

OBS:  $\theta_C^e = \frac{1}{EI} \left[ 2Pa^2 - Pa^2 - \frac{3Pa^2}{2} \right] = -\frac{Pa^2}{2EI}$

$$\theta_C^d = \frac{Pa^2}{EI} \left[ -\frac{1}{2} + 1 \right] = \frac{Pa^2}{2EI}$$

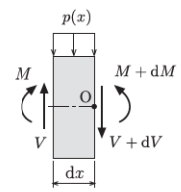
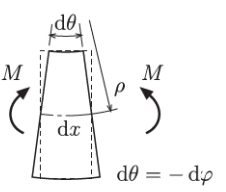
### 3.3 Analogia de Mohr\*

A *analogia de Mohr* faz uso da semelhança entre as equações diferenciais da linha elástica e as equações de equilíbrio de um trecho de viga, conforme mostrado na Tab. 1. A correspondência entre as variáveis dos dois problemas faz com que os valores do deslocamento  $v$  e da rotação  $\varphi$  de uma seção qualquer da viga sejam numericamente iguais aos do momento fletor  $\bar{M}$  e da força cortante  $\bar{V}$ , ambos fictícios e atuando na mesma seção, de uma *viga análoga* carregada por uma força distribuída  $\bar{q}(x) = M(x)/EI$ .

Como as condições de contorno dos dois problemas são diferentes, a viga análoga tem a finalidade de expressar as condições de contorno em deslocamento e rotação, denominadas *condições de contorno essenciais*, mediante a introdução de vinculações fictícias que gerem os correspondentes momentos fletores e forças cortantes fictícios nas seções em que são impostas as condições essenciais reais.

No caso da viga engastada à esquerda na Fig. 6-a, as condições essenciais  $v_A = \varphi_A = 0$  correspondem às condições  $\bar{M}_A = \bar{V}_A = 0$ , situação que ocorre apenas na extremidade livre de uma viga. Admitindo que A seja uma extremidade livre, um engaste fictício deve ser

Tabela 1: Analogia de Mohr.

Equilíbrio	Deformação
	
$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = -p(x)$ $\frac{dM}{dx} = V(x)$	$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{M(x)}{EI}$ $\frac{dv}{dx} = \varphi(x)$
$M(x) \leftrightarrow v(x)$	$V(x) \leftrightarrow \varphi(x)$
	$p(x) \leftrightarrow \frac{M(x)}{EI}$

acrescentado à direita para eliminar movimentos de corpo rígido e tornar a viga isostática. Conclui-se, portanto, que a viga análoga e a viga real possuem engastes em extremidade opostas.

No caso da viga biapoiada na Fig. 6-b, as condições essenciais  $v_A = v_B = 0$  correspondem às condições  $\bar{M}_A = \bar{M}_B = 0$  que ocorrem em seções articuladas da barra. Para eliminar movimentos de corpo rígido da viga análoga articulada nas duas extremidades, um apoio fixo e outro móvel devem ser acrescentados às extremidades. Portanto, a viga análoga de uma viga biapoiada é outra viga biapoiada.

O mesmo raciocínio pode ser usado para definir a viga análoga de uma viga biapoiada com um balanço à esquerda na Fig. 6-c como sendo uma viga Gerber apoiada à esquerda e engastada à direita. Ou que a viga análoga da viga Gerber na Fig. 6-d é uma viga biapoiada com um balanço. Repare que a posição do apoio móvel intermediário é definida pelo ponto de descontinuidade da força cortante fictícia, ou seja da rotação.

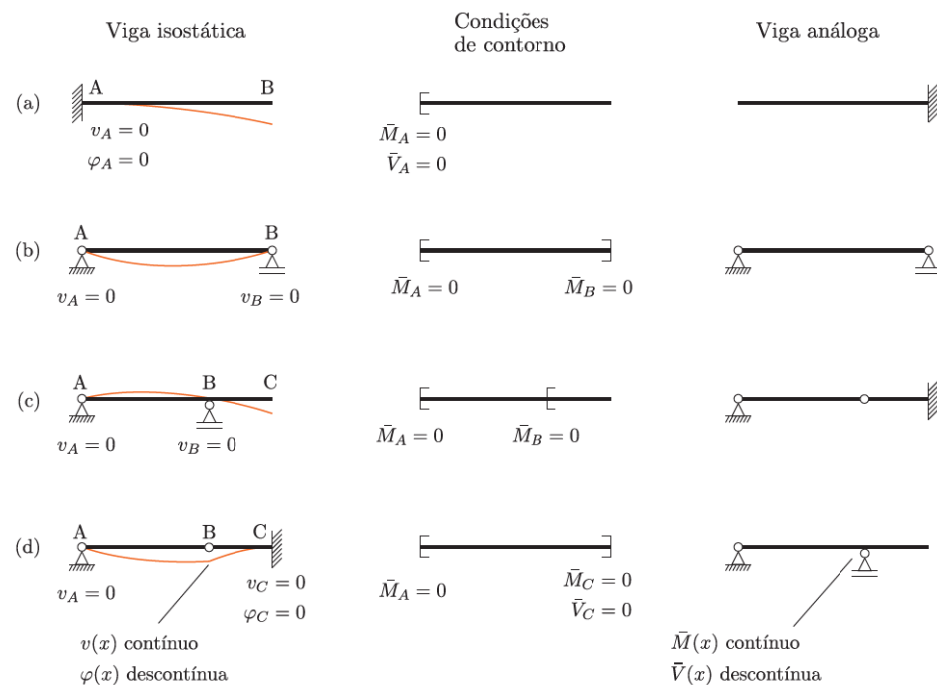


Fig. 6: Determinação da viga análoga a partir das condições de contorno essenciais da viga isostática real.

Para agilizar o cálculo dos momentos fletores e forças cortantes fictícias, as áreas e as posições do centro de gravidade das figuras elementares indicadas na Fig. 7 são usadas nos exercícios para obter as resultantes das forças distribuídas e seus respectivos momentos. Note que nas duas parábolas à direita, o ponto de tangente nula coincide com uma das extremidades.

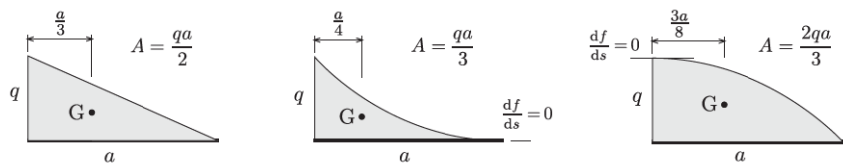


Fig. 7: Área e abscissa do centro de gravidade G de três figuras planas.

**Exemplo 10** Determine o deslocamento a rotação na extremidade livre da viga em balanço.

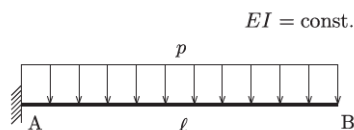


Fig. E10

SOLUÇÃO

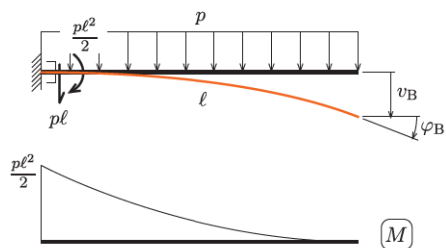


Fig. E10-i: Digrama de momento.

A viga análoga engastada à direita deve ser carregada com o diagrama de momento fletor dividido pelo produto EI. Repare que a força distribuída é para cima em virtude do momento fletor ser negativo.

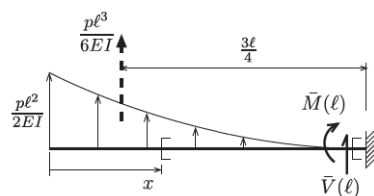


Fig. E10-ii: Viga análoga

A resultante do diagrama parabólico e sua posição estão indicadas na figura. O deslocamento e a rotação na extremidade B são iguais aos esforços solicitantes fictícios na seção correspondente da viga análoga,

$$\varphi_B = \bar{V}(\ell) = \frac{1}{3}q\ell = \frac{p\ell^3}{6EI} (\curvearrowright)$$

$$v_B = \bar{M}(\ell) = \frac{p\ell^3}{6EI} \times \frac{3\ell}{4} = \frac{p\ell^4}{8EI} (\downarrow). \quad \Delta$$

**Exemplo 11** Calcule as rotações nos dois apoios, o deslocamento e a rotação sob a carga P.

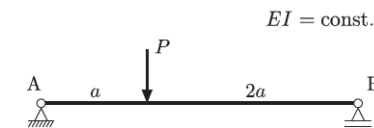


Fig. E11

SOLUÇÃO

As reações de apoio e o diagrama de momentos estão indicados abaixo.

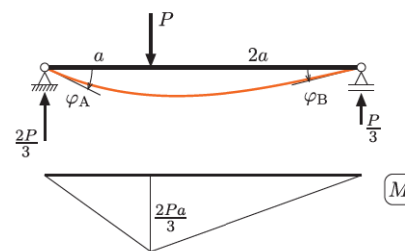


Fig. E11-i: Digrama de momento.

As reações fictícias na viga análoga da Fig. E11-ii são obtidas por equilíbrio,

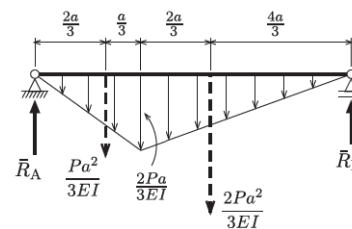


Fig. E11-ii: Viga análoga

$$\begin{cases} \bar{R}_A + \bar{R}_B = \frac{Pa^2}{3EI} + \frac{2Pa^2}{3EI} = \frac{Pa^2}{EI} \\ \bar{R}_A 3a - \frac{Pa^2}{3EI} \left(\frac{a}{3} + 2a\right) - \frac{2Pa^2}{3EI} \frac{4a}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\bar{R}_A = \frac{Pa^2}{9EI} \left(\frac{7}{3} + \frac{8}{3}\right) = \frac{5Pa^2}{9EI},$$

$$\bar{R}_B = \frac{Pa^2}{EI} - \bar{R}_A = \frac{4Pa^2}{9EI}.$$

Assim, as rotações nas duas extremidades são

$$\varphi_A = \bar{R}_A = \frac{5Pa^2}{9EI}, \quad \varphi_B = -\bar{R}_B = -\frac{4Pa^2}{9EI}.$$

E o deslocamento e a rotação sob a carga são

$$\varphi(a) = \bar{V}(a) = \bar{R}_A - \frac{Pa^2}{3EI} = \frac{2Pa^2}{9EI} (\curvearrowright)$$

$$v(a) = \bar{M}(a) = \bar{R}_A a - \frac{Pa^2}{3EI} \times \frac{a}{3} = \frac{4Pa^3}{9EI} (\downarrow).$$

O valor positivo da rotação confirma que a seção com o deslocamento máximo está à direita da carga P.  $\Delta$

**Exemplo 12** Determine a equação da linha elástica para a viga em balanço com mudança abrupta de seção transversal. Considere  $EI_1 = EI_2/2 = EI$ . Verifique os deslocamentos da extremidade livre usando a analogia de Mohr.

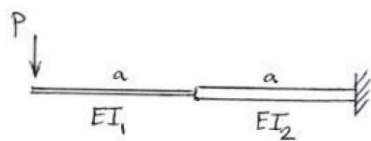


Fig. E 12

$$M(x) = -Px$$

$$\left. \begin{aligned} v_1''(x) &= \frac{-M(x)}{EI_1} \\ v_2''(x) &= \frac{-M(x)}{2EI} \end{aligned} \right\} v''(x) = \begin{cases} -\frac{M(x)}{EI} & 0 \leq x < a \\ -\frac{M(x)}{2EI} & a \leq x \leq 2a \end{cases}$$

$$v''(x) = \frac{Px}{EI} - \frac{Px}{2EI} \langle x-a \rangle^0 = \frac{Px}{EI} - \frac{Px}{2EI} \langle x-a \rangle^0$$

$$v'(x) = \frac{Px^2}{2EI} - \frac{P}{2EI} \left[ x \langle x-a \rangle - \frac{\langle x-a \rangle^2}{2} \right] + C_1$$

$$v(x) = \frac{Px^3}{6EI} - \frac{P}{2EI} \left[ \frac{x \langle x-a \rangle^2}{2} - \frac{\langle x-a \rangle^3}{6} - \frac{\langle x-a \rangle^3}{6} \right] + C_1 x + C_2$$

$$= \frac{P}{12EI} [2x^3 - 3x \langle x-a \rangle^2 + 2 \langle x-a \rangle^3] + C_1 x + C_2$$

CC:

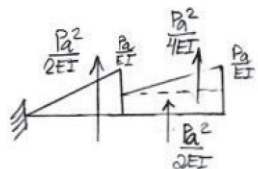
$$\varphi(2a) = 0 \Rightarrow \frac{2Pa^2}{EI} - \frac{P}{2EI} [2a^2 - \frac{a^2}{2}] + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{5}{4} \frac{Pa^2}{EI}$$

$$v(2a) = 0 \Rightarrow \frac{Pa^3}{EI} + 2a \left( -\frac{5}{4} \frac{Pa^2}{EI} \right) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{3}{2} \frac{Pa^3}{EI}$$

$$v(x) = \frac{Px^3}{12EI} [2x^3 - 3x \langle x-a \rangle^2 + 2 \langle x-a \rangle^3] - \frac{5}{4} \frac{Pa^2}{EI} x + \frac{3}{2} \frac{Pa^3}{EI}$$

$$\varphi(0) = \frac{3}{2} \frac{Pa^2}{EI}$$

$$\varphi(b) = -\frac{5}{4} \frac{Pa^2}{EI}$$



$$\varphi = -\frac{Pa^2}{EI} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{5}{4} \frac{Pa^2}{EI}$$

$$v = \frac{Pa^2}{2EI} \times \frac{2}{3} a + \frac{Pa^2}{2EI} \left( \frac{3}{2} a \right) + \frac{Pa^2}{4EI} \left( \frac{5a}{3} \right) = +\frac{3}{2} \frac{Pa^3}{EI}$$

## 4 Efeitos Térmicos

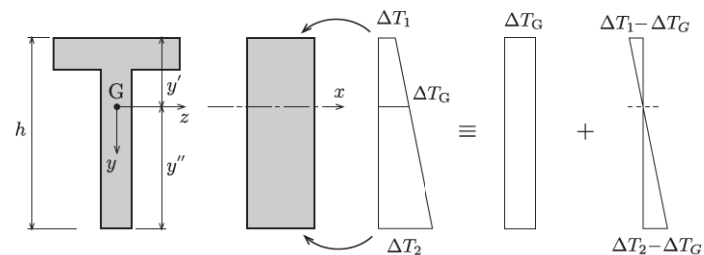


Fig. 8: Gradiente de temperatura.

Para um trecho de comprimento infinitesimal  $dx$ , uma variação linear de temperatura ao longo da altura  $h$  da ST pode ser decomposta em uma distribuição uniforme mais outra linear com valor zero no centro de gravidade  $G$ , Fig. 8. Conhecidos os acréscimos  $\Delta T_1$  e  $\Delta T_2$  nas fibras superior e inferior, o acréscimo de temperatura no centro de gravidade  $G$  é dado por

$$\Delta T_G = \Delta T_2 + (\Delta T_1 - \Delta T_2) \frac{y''}{h}$$

em que  $y''$  é a distância de  $G$  à fibra inferior da ST. Conforme a Fig. 9, a deformação resultante pode ser decomposta numa deformação axial,

$$du = \alpha \Delta T_G dx,$$

e numa deflexão caracterizada pela curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{h} \tag{18}$$

A equação acima é obtida subtraindo-se os comprimentos das fibras inferior e superior de um trecho de viga,

$$\text{fibra inferior: } (\rho + y'') d\theta = [1 + \alpha(\Delta T_2 - \Delta T_G)] dx,$$

$$\text{fibra superior: } (\rho - y') d\theta = [1 + \alpha(\Delta T_1 - \Delta T_G)] dx;$$

ou seja,

$$h d\theta = \alpha(\Delta T_2 - \Delta T_1) dx;$$

e lembrando que  $dx = \rho d\theta$ . A linearização da Eq. (18) é análoga à da Eq. (5) efetuada na seção 2.2.3 e fornece

$$v'' = -\frac{\alpha(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{h} \quad (19)$$

em que  $\Delta T_2$  é a variação de temperatura no lado positivo de  $y$ .

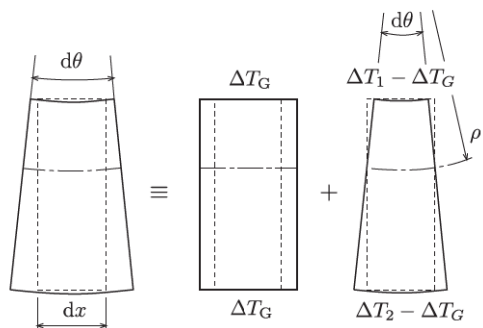


Fig. 9: Decomposição da deformação.

**Exemplo 13** Determine o deslocamento transversal e a rotação na extremidade livre da viga ao lado submetida a um gradiente linear de temperatura  $\Delta t$  na altura  $h$  da seção.

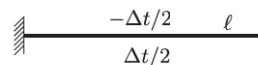


Fig. E 13

SOLUÇÃO

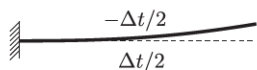


Fig. E 13-i

Aplicando a Eq. (19), temos

$$v'' = -\frac{\alpha(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{h} = -\frac{\alpha \Delta t}{h}.$$

Integrando duas vezes,

$$\begin{aligned} v' &= -\frac{\alpha \Delta t}{h}x + C_1, \\ v &= -\frac{\alpha \Delta t}{2h}x^2 + C_1x + C_2. \end{aligned}$$

E impondo as condições de contorno,

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0, & \Rightarrow C_1 = 0, \\ v(0) = 0, & \Rightarrow C_2 = 0; \end{aligned}$$

chegamos a

$$\varphi(\ell) = -\frac{\alpha \Delta t \ell}{h}, \quad v(\ell) = -\frac{\alpha \Delta t \ell^2}{2h}. \quad (20)$$

△

**Exemplo 14** Determine o deslocamento transversal máximo e a rotação na extremidade esquerda da viga ao lado sujeita a um gradiente de temperatura com uma variação de temperatura  $\Delta t$  na fibra inferior da viga. Considere a seção retangular com altura  $h$ .

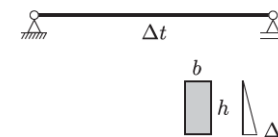


Fig. E 14

SOLUÇÃO

Podemos decompor a deformação provocada pelo gradiente de temperatura em duas partes conforme a figura.

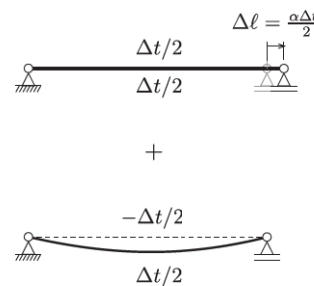


Fig. E 14-i

A primeira parte não produz deslocamentos transversais. Aplicando a Eq. (19) para a segunda parte, temos

$$v'' = -\frac{\alpha(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{h} = -\frac{\alpha \Delta t}{h}.$$

Integrando duas vezes,

$$\begin{aligned} v' &= -\frac{\alpha \Delta t}{h}x + C_1, \\ v &= -\frac{\alpha \Delta t}{2h}x^2 + C_1x + C_2. \end{aligned}$$

E impondo as condições de contorno,

$$\begin{aligned} v(0) = 0, & \Rightarrow C_2 = 0; \\ v(\ell) = 0, & \Rightarrow -\frac{\alpha \Delta t \ell^2}{2h} + C_1 \ell = 0 \\ C_1 &= \frac{\alpha \Delta t \ell}{2h}, \end{aligned}$$

obtemos as expressões

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{\alpha \Delta t}{h}x + \frac{\alpha \Delta t \ell}{2h}, \\ v(x) &= -\frac{\alpha \Delta t}{2h}x^2 + \frac{\alpha \Delta t \ell}{2h}x. \end{aligned}$$

O deslocamento máximo ocorre no meio do vão e vale

$$f = v\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{\alpha \Delta t}{2h}\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{\alpha \Delta t \ell}{2h}\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{\alpha \Delta t \ell^2}{8h},$$

enquanto a rotação no apoio A vale

$$\varphi_A = \varphi(0) = \frac{\alpha \Delta t \ell}{2h}.$$

△

## 5 Sistemas de Barras

A integração direta da linha elástica é ineficiente quando lidamos com estruturas formadas por dois ou mais trechos de barra, particularmente quando as barras têm direções distintas.

Sabemos que a presença de vários trechos de barra requer a compatibilidade de deslocamentos e rotações nas extremidades dos mesmos e, portanto, necessitamos de uma forma prática para impor essa compatibilidade. Nos exemplos a seguir, os trechos da estrutura permanecem unidos de modo a garantir a continuidade, mas os efeitos da deformabilidade de cada trecho são considerados separadamente.

A seguir explicitamos as hipóteses usadas no cálculo dos deslocamentos de um sistema de barras:

1. as tensões nas barras permanecem no intervalo elástico-linear do material<sup>5</sup> (linearidade física);
2. os deslocamentos são muito pequenos face às dimensões da estrutura, enquanto as rotações medidas em radianos são muito pequenas face à unidade (linearidade geométrica), Fig. 10;
3. os nós da estrutura são admitidos rígidos, isto é, não existe rotação relativa entre as extremidades das barras que se encontram no nó, Fig. 11;
4. apenas os efeitos das deformações transversais por momento fletor são considerados (os efeitos das deformações longitudinais por força normal e momento fletor, e das transversais por força cortante são desprezados salvo quando especificado em contrário), Fig. 12.

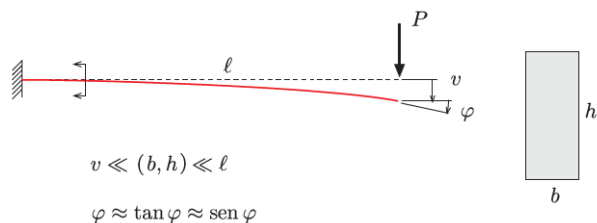


Fig. 10: Linearidade geométrica.

A observância das linearidades física e geométrica garante o comportamento linear da estrutura. Ou seja, podemos contar com a proporcionalidade entre os esforços aplicados e os deslocamentos na estrutura e também com a validade do princípio da superposição de efeitos. Dessa forma, é possível calcular os deslocamentos a partir de valores parciais obtidos

<sup>5</sup>Em outras palavras, é válida a lei de Hooke unidimensional,  $\sigma = E\varepsilon$ .

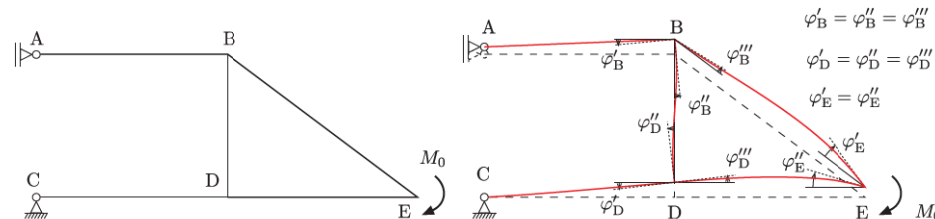


Fig. 11: Rotações nas extremidades das barras.

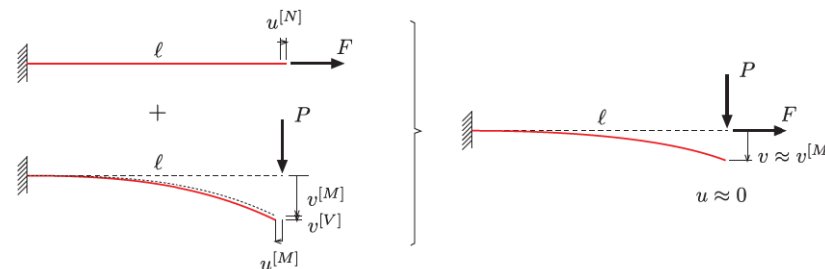


Fig. 12: Predominância das deformações transversais por M.

considerando isoladamente a flexibilidade de cada trecho de barra como será ilustrado nos exemplos.

As Tabelas 2 e 3 apresentam os deslocamentos máximos e as rotações de extremidade para vigas prismáticas em balanço e biapoiadas, respectivamente, submetidas aos carregamentos usuais. Na primeira tabela, salientamos a regra mnemônica para a carga ou momento concentrado em que os expoentes do comprimento  $\ell$  coincidem com os coeficientes no denominador, Fig. 13-a. Na segunda tabela, vale a pena decorar as expressões das rotações para um momento aplicado na extremidade da viga, Fig. 13-b.

**Exemplo 15** Determine o deslocamento na extremidade direita da viga.

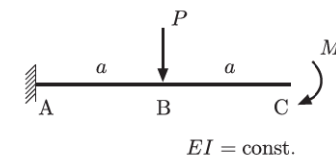


Fig. E 15: Viga simples.

Tabela 2: Viga em balanço: deslocamentos e rotações.

Convenções	Carregamento		$\phi_A$	$\phi_B$
		$v(\ell) = \frac{P\ell^3}{3EI}$	0	$\frac{P\ell^2}{2EI}$
		$v(\ell) = -\frac{M\ell^2}{2EI}$	0	$-\frac{M\ell}{EI}$
		$v(\ell) = \frac{p\ell^4}{8EI}$	0	$\frac{p\ell^3}{6EI}$
		$v(\ell) = -\frac{\alpha\Delta t\ell^2}{2h}$	0	$-\frac{\alpha\Delta t\ell}{h}$

Tabela 3: Viga biapoada: deslocamentos e rotações.

Convenções	Carregamento		$\phi_A$	$\phi_B$
		$v(\frac{\ell}{2}) = \frac{P\ell^3}{48EI}$	$\frac{P\ell^2}{16EI}$	$-\frac{P\ell^2}{16EI}$
		$v(x) = \frac{Pbx(\ell^2 - b^2 - x^2)}{6EI}$ $\varphi(x) = \frac{Pb(\ell^2 - b^2 - 3x^2)}{6EI}$ $0 \leq x \leq a$	$\frac{Pab(\ell+b)}{6EI\ell}$	$-\frac{Pab(\ell+a)}{6EI\ell}$
		$v(x) = \frac{Mx(\ell^2 - x^2)}{6EI}$ $\varphi(x) = \frac{M(\ell^2 - 3x^2)}{6EI}$	$\frac{M\ell}{6EI}$	$-\frac{M\ell}{3EI}$
		$\phi(\frac{\ell}{2}) = -\frac{M\ell}{12EI}$	$\frac{M\ell}{24EI}$	$\frac{M\ell}{24EI}$
		$v(x) = \frac{Mx(\ell^2 - 3b^2 - x^2)}{6EI}$ $\varphi(x) = \frac{M(\ell^2 - 3b^2 - 3x^2)}{6EI}$ $0 \leq x \leq a$	$\frac{M(\ell^2 - 3b^2)}{6EI}$	$\frac{M(\ell^2 - 3a^2)}{6EI}$
		$v(\frac{\ell}{2}) = \frac{5}{384} \frac{p\ell^4}{EI}$	$\frac{p\ell^3}{24EI}$	$-\frac{p\ell^3}{24EI}$
		$v(\frac{\ell}{2}) = \frac{\alpha\Delta t\ell^2}{8h}$	$\frac{\alpha\Delta t\ell}{2h}$	$-\frac{\alpha\Delta t\ell}{2h}$



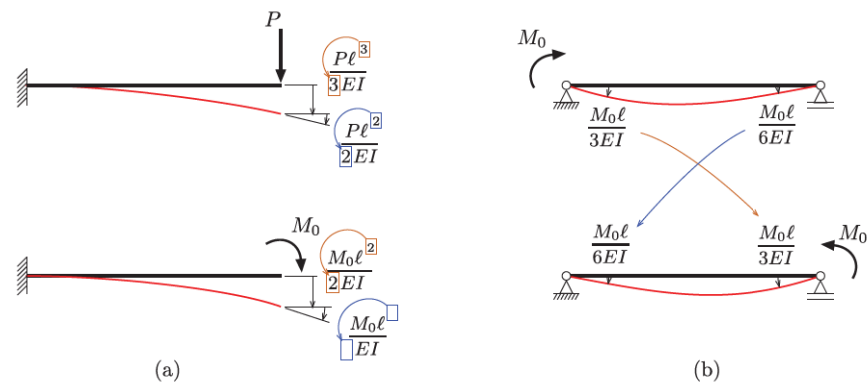


Fig. 13: Memorização de algumas expressões.

SOLUÇÃO

Primeiro consideremos o trecho AB rígido e o trecho BC flexível; desse modo o deslocamento e a rotação em B são nulos e o trecho BC comporta-se como uma viga em balanço. Segundo, consideremos AB flexível e BC rígido; agora o trecho se deforma sob a ação dos esforços  $P$  e  $M_0$  em sua extremidade e o trecho BC sofre um movimento de corpo rígido determinado pelos deslocamentos e a rotação em B.

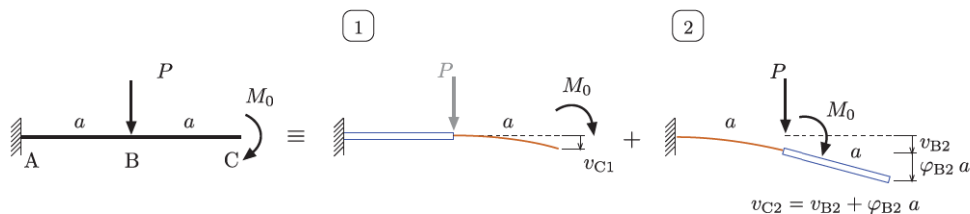


Fig. E 15-i: Deslocamentos dos trechos.

O deslocamento final é obtido somando-se as duas parcelas:

$$\begin{aligned}
 v_C &= v_{C1} + v_{C2} = v_{C1} + (v_{B2} + \varphi_{B2}a) \\
 &= \frac{M_0 a^2}{2EI} + \left[ \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{M_0 a^2}{2EI} + \left( \frac{Pa^2}{2EI} + \frac{M_0 a}{EI} \right) a \right] \\
 &= \frac{2M_0 a^2}{EI} + \frac{5Pa^3}{6EI}.
 \end{aligned}$$

**Exemplo 16** Determine o deslocamento  $v_C$  para a viga da figura.

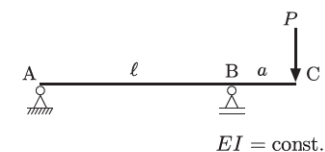


Fig. E 16: Viga com balanço.

SOLUÇÃO

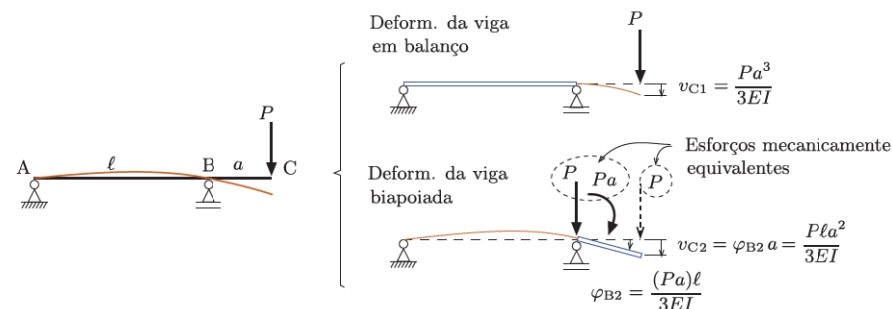


Fig. E 16-i: Deslocamentos dos trechos.

Empregando o mesmo procedimento do exemplo anterior, calculamos os valores parciais indicados na Fig. E 16-i, os quais permitem obter o deslocamento procurado

$$v_C = v_{C1} + v_{C2} = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pla^2}{3EI} = \frac{Pa^2(a + l)}{3EI}.$$

**Exemplo 17** Mostre que os deslocamentos na extremidade D são os mesmos para as duas vigas poligonais abaixo.

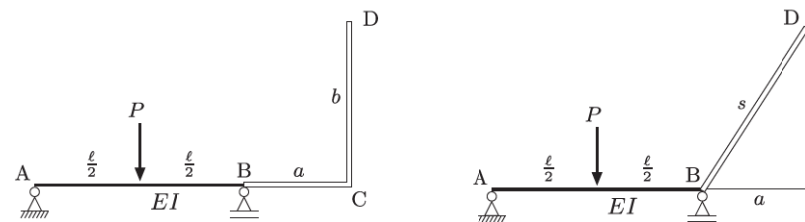


Fig. E 17: Viga com balanço.

SOLUÇÃO

Tanto os trechos BC e CD na primeira viga quanto o trecho BD na segunda não estão solicitados e, portanto, não sofrem deformações. Logo, o deslocamento da extremidade D fica determinado pela

rotação em B nas duas vigas como mostrado na Fig. E 17-i. Os sinais seguem os sentidos indicados nas figuras.

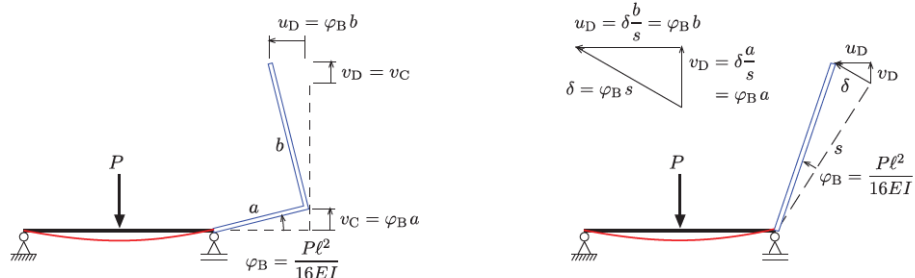


Fig. E 17-i: Cálculo dos deslocamentos.

$$u_D = \varphi_B b = \frac{P\ell^2 b}{16EI}$$

$$v_D = \varphi_B a = \frac{P\ell^2 a}{16EI}$$

Este exemplo sugere a possibilidade da troca de uma sequência de trechos rígidos por um único trecho rígido ligando o primeiro ao último ponto dos trechos ou, melhor ainda, por dois trechos rígidos nas direções dos eixos coordenados.

**Exemplo 18** Determine a rotação e as componentes de deslocamento da extremidade A da viga poligonal. Considere  $EI = \text{const.}$  e despreze os efeitos das deformações por força normal e força cortante.

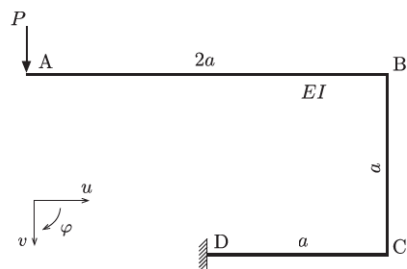


Fig. E 18: Viga poligonal.

SOLUÇÃO

O esboço da configuração deformada é facilitado por haver uma única força externa  $P$ .

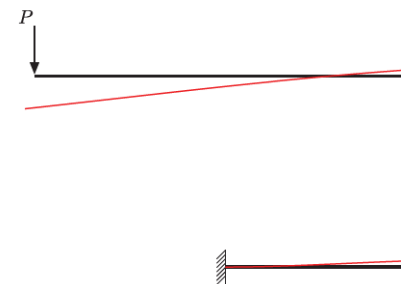


Fig. E 18-i: Configuração deformada.

Deslocamentos e rotações

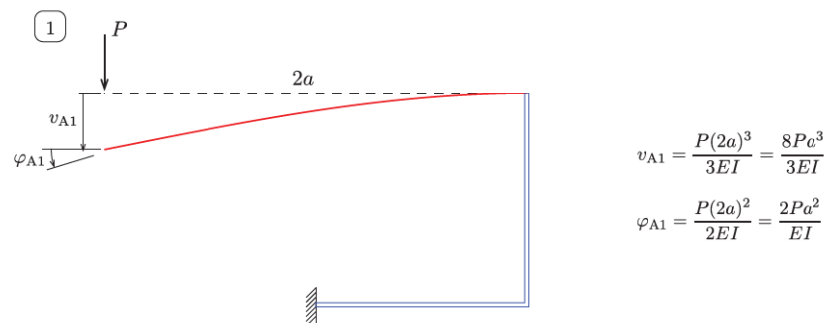


Fig. E 18-ii: Barra AB flexível.

Para calcular os deslocamentos, consideremos as flexibilidades dos trechos AB, BC e CD separadamente nas Figs. E 18-ii a iv. Os sentidos positivos dos deslocamentos e rotações estão indicados nas próprias figuras.

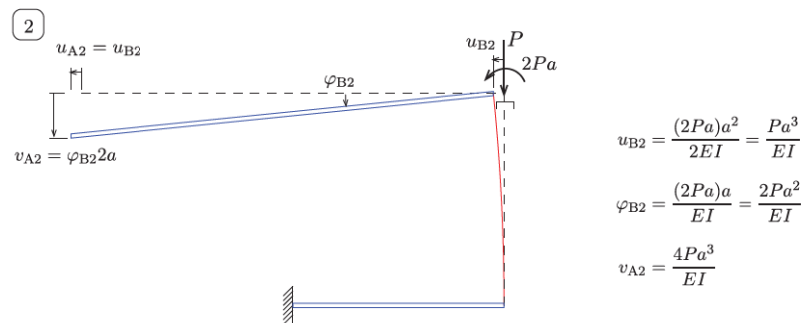


Fig. E 18-iii: Barra BC flexível.

$$u_{B2} = \frac{(2Pa)a^2}{2EI} = \frac{Pa^3}{EI}$$

$$\varphi_{B2} = \frac{(2Pa)a}{EI} = \frac{2Pa^2}{EI}$$

$$v_{A2} = \frac{4Pa^3}{EI}$$

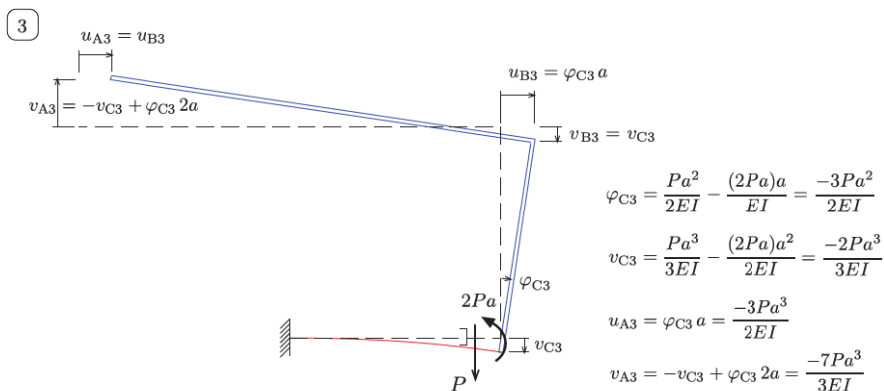


Fig. E 18-iv: Barra CD flexível.

$$\varphi_{C3} = \frac{Pa^2}{2EI} - \frac{(2Pa)a}{EI} = \frac{-3Pa^2}{2EI}$$

$$v_{C3} = \frac{Pa^3}{3EI} - \frac{(2Pa)a^2}{2EI} = \frac{-2Pa^3}{3EI}$$

$$u_{A3} = \varphi_{C3} a = \frac{-3Pa^3}{2EI}$$

$$v_{A3} = -v_{C3} + \varphi_{C3} 2a = \frac{-7Pa^3}{3EI}$$

Na deformada [3], repare que  $P$  e  $2Pa$  têm efeitos com sentidos contrários. A deformada corresponde ao efeito de  $P$  e foi adotada por apresentar uma rotação  $\varphi_{C3}$  positiva conveniente nas expressões algébricas. Entretanto, o sinal negativo de  $\varphi_{C3}$  mostra que o efeito do momento predomina e o sentido é anti-horário.

Somando os valores parciais indicados nas figuras, temos

$$\varphi_A = -\varphi_{A1} - \varphi_{B2} + \varphi_{C3} = \left(-2 - 2 - \frac{3}{2}\right) \frac{Pa^2}{EI} = -\frac{11 Pa^2}{2 EI} \quad (\curvearrowleft)$$

$$u_A = 0 - u_{A2} + u_{A3} = \left(0 - 1 - \frac{3}{2}\right) \frac{Pa^3}{EI} = -\frac{5 Pa^3}{2 EI} \quad (\leftarrow)$$

$$v_A = v_{A1} + v_{A2} - v_{A3} = \left(\frac{8}{3} + 4 + \frac{7}{3}\right) \frac{Pa^3}{EI} = \frac{9Pa^3}{EI} \quad (\downarrow)$$

**Exemplo 19** Determine a rotação e as componentes de deslocamento da extremidade E da estrutura ao lado. Considere a barra ABCD com produto de rigidez à flexão  $EI$  e a barra vertical BE com  $2EI$ . Despreze os efeitos das deformações por força normal e força cortante.

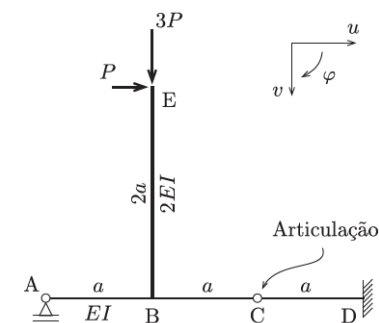


Fig. E 19: Estrutura com articulação.

**SOLUÇÃO**

Vamos começar traçando a configuração deformada da estrutura. Mesmo aproximada, ela permite verificar os sinais dos deslocamentos e rotações. Note que o traçado pode ser melhorado posteriormente com base nas deformadas individuais de cada trecho.

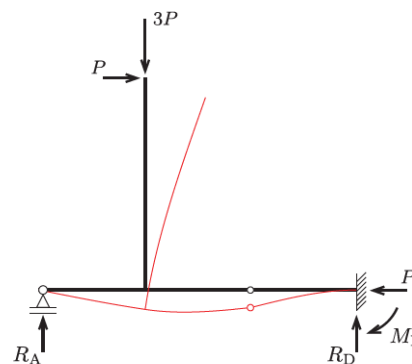


Fig. E 19-1: Reações e estrutura deformada.

**Reações de apoio e momentos fletores**

$$\uparrow \{ R_A + R_D = 3P$$

$$\circlearrowleft D \{ R_A 3a + P 2a - 3P 2a + M_D = 0$$

$$\Rightarrow 3R_A + M_D = 4Pa$$

$$M_C = 0 \quad \{ R_A 2a + P 2a - 3P a = 0$$

$$R_A = \frac{P}{2}, \quad R_D = \frac{5P}{2}, \quad M_D = \frac{5Pa}{2}$$

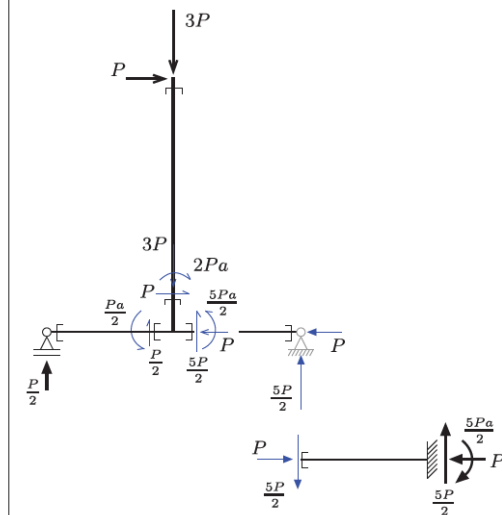


Fig. E 19-2: Esforços nos trechos.

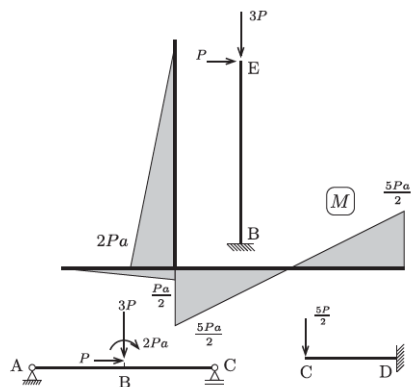


Fig. E 19-3: Diagrama de momentos.

**Deslocamentos e rotações**

O princípio da superposição de efeitos permite que se considere a flexibilidade dos trechos BE, ABC e CD separadamente. Para o trecho ABC, o carregamento foi decomposto em dois.

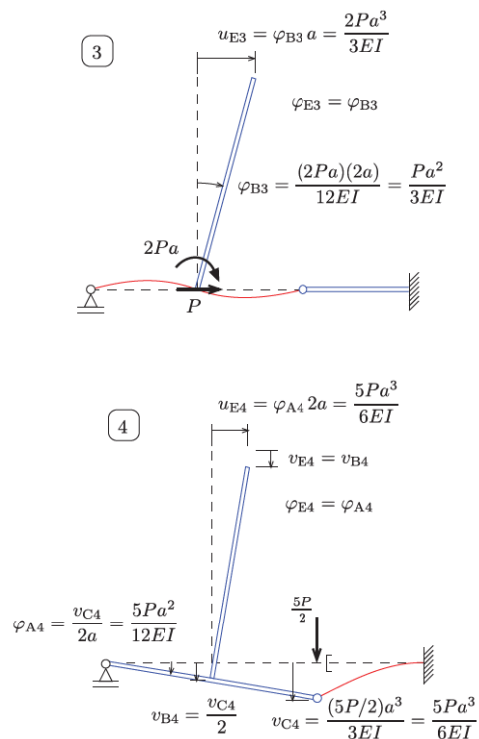
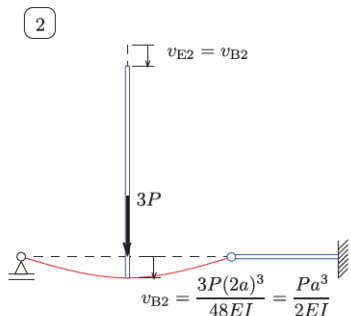
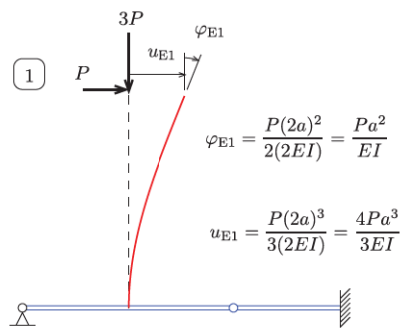


Fig. E 19-4: Decomposição da estrutura.

Somando os valores parciais, obtemos

$$u_E = \left( \frac{4}{3} + 0 + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \right) \frac{Pa^3}{EI}$$

$$= \frac{17 Pa^3}{6 EI} \quad (\rightarrow)$$

$$v_E = \left( 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{5}{12} \right) \frac{Pa^3}{EI}$$

$$= \frac{11 Pa^3}{12 EI} \quad (\downarrow)$$

$$\varphi_E = \left( 1 + 0 + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} \right) \frac{Pa^2}{EI}$$

$$= \frac{7 Pa^2}{4 EI} \quad (\curvearrow)$$

**Referências**

- [1] Hibbeler, R. C. *Resistência dos Materiais*. 5ª ed., LTC - Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 2004.
- [2] Boresi, A. P., Schmidt, R. J. e Sidebottom, O. M. *Advanced Mechanics of Materials*. 5th ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- [3] Crandall, S. H., Dahl, N. C. and Lardner, T. J. *An Introduction to the Mechanics of Solids*. 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1978.
- [4] Diogo, L. A. C., *Resistência dos Materiais*. Apostila do PEF, 2000.
- [5] Feodosiev, V. I. *Resistencia de Materiales*. Segunda edição em espanhol, MIR, Moscow, 1980.

## Index

analogia de Mohr, 2, 21

condições de contorno essenciais, 21

curvatura, 5

deflexão, 2

equação da linha elástica, 5

funções de Macaulay, 14

hipótese

de Navier, 3

hipótese de Navier, 3

hipóteses básicas, 3

linha neutra, 4

produto de rigidez à flexão, 5

raio de curvatura, 4

superfície neutra, 4

viga análoga, 21