

deduzida é usada para ilustrar a verificação das tensões extremas e o dimensionamento de seções.

### 1.1 Nomenclatura e Convenção de Sinais

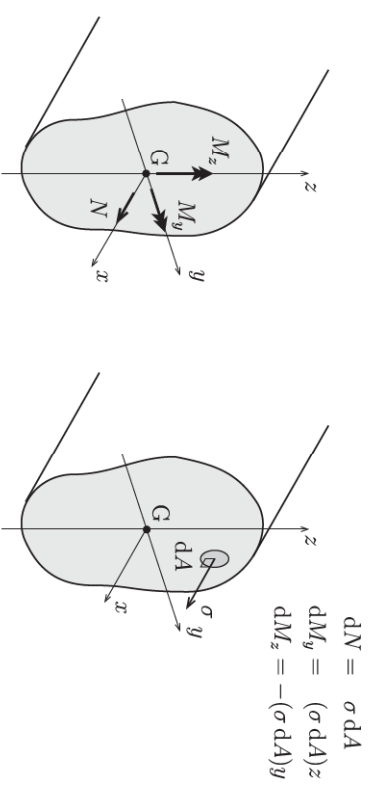


Fig. 1: Convenção de sinais: força normal  $N$ , momentos fletores  $M_y$  e  $M_z$ ; tensão normal  $\sigma$ .

**Relação entre os Esforços Solicitantes e a Tensão Normal** Para a dedução da fórmula da flexão de vigas<sup>1</sup>, convém recordar as relações entre os esforços solicitantes ( $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ) e a tensão normal  $\sigma$  na ST,

$$N = \int_A \sigma dA, \quad M_y = \int_A \sigma z dA, \quad M_z = - \int_A \sigma y dA. \quad (1)$$

Os sentidos positivos da força normal e dos momentos fletores estão indicados na Fig. 1.

**Nomenclatura** A flexão é denominada *pura* quando o momento fletor é o único esforço solicitante na seção. O uso do adjetivo se justifica pois o momento fletor geralmente está acompanhado da força cortante na flexão. Os adjetivos *normal* e *obliqua* descrevem a posição do vetor momento fletor em relação aos eixos centrais (Fig. 2). Na flexão normal, o vetor momento fletor é normal a um dos eixos centrais da seção e o plano de atuação do momento coincide com o de deflexão da barra. Já na flexão oblíqua, o vetor momento é oblíquo aos eixos centrais e o plano de deflexão usualmente não coincide com o plano de atuação do momento. Os adjetivos *simples* e *composto* são usados para identificar, respectivamente, a ausência e a

# Introdução à Flexão Normal

Edgard S. Almeida Neto  
Escola Politécnica da USP

29 de Setembro de 2017

## Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Nomenclatura e Convenção de Sinais	2
1.2	Hipóteses	3
2	Tensões Normais na Flexão Pura	4
3	Flexão Normal	7
3.1	Flexão Normal Simples ( $N = 0$ )	7
3.1.1	Dimensionamento da ST	10
3.1.2	Vigas de Perfis Metálicos	10
3.2	Flexão Normal Composta ( $N \neq 0$ )	11
A	Tabelas de Perfis de Aço	12
B	Exemplos	16

## 1 Introdução

Neste Capítulo, estudamos as tensões normais na seção transversal (ST) associadas ao momento fletor. A equação da tensão normal na flexão pura é deduzida admitindo que a seção permaneça plana e perpendicular ao eixo da barra após a deformação (hipótese de Navier). Admite-se também que o material tenha um comportamento elástico-linear e que a estrutura reticulada esteja sujeita a pequenos deslocamentos e rotações. Posteriormente, a equação

<sup>1</sup>Denomina-se *viga* a barra que trabalha predominantemente à flexão.

presença da força normal na flexão. A combinação dos adjetivos acima é capaz de descrever o tipo de flexão considerado, como ilustrado na Fig. 3.

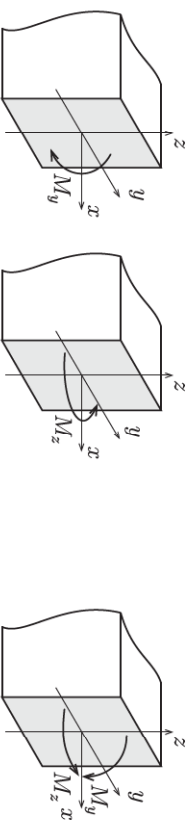
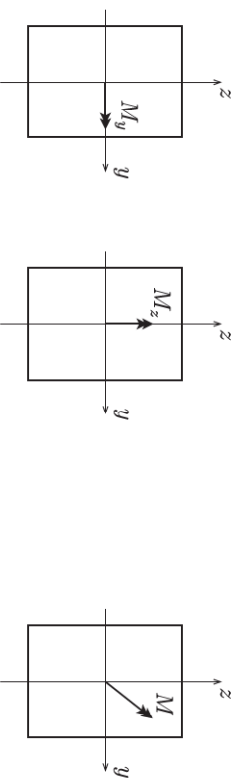


Fig. 2: Flexão normal e Flexão oblíqua.

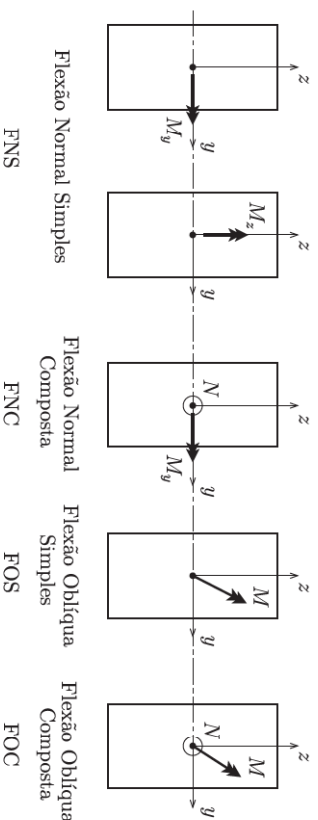


Fig. 3: Tipos de Flexão para  $V \neq 0$ . Vista frontal da ST.

## 1.2 Hipóteses

A dedução da distribuição das tensões normais no plano da seção transversal de uma barra requer as seguintes hipóteses:

### MATERIAL

- O material da barra é homogêneo e isotrópico.

- O material tem comportamento elástico-linear (*Lei de Hooke, linearidade física*).

### BARRA

- A barra tem eixo reto na configuração indeformada.
- A seção é constante ou suas dimensões variam pouco ao longo da barra.
- É válido o Princípio de Saint-Venant.

### DEFORMAÇÕES

- Deformações, rotações e deslocamentos são suficientemente pequenos para que as equações de equilíbrio possam ser escritas na configuração indeformada da estrutura (*linearidade geométrica*).

- A deformação transversal da seção é desconsiderada, ou seja, despreza-se o efeito do coeficiente de Poisson  $\nu$ .
- As seções transversais permanecem planas após a deformação e continuam perpendiculares ao eixo deformado (*hipótese de Navier*).

**Nota 1** As hipóteses envolvendo as linearidades física e geométrica garantem que os efeitos de um esforço solicitante nas deformações provocadas pelos demais esforços sejam desprezíveis [1] e que o *Princípio da Superposição de Efeitos* seja válido.

As hipóteses formuladas permitem que se calcule com razoável precisão as tensões normais em barras com diferentes tamanhos e STs. Mesmo para barras de pequena curvatura<sup>2</sup> e mudança gradual da ST, a fórmula geral pode ser usada de modo aproximado. Contudo, existem casos onde ela não se aplica: as barras com seções retangulares muito estreitas, por apresentarem instabilidade lateral à torção e perderem com facilidade a sua forma; e as vigas parede, com um vão-livre inferior a cinco vezes a altura da ST ( $\ell/h < 5$ ), por se comportarem como chapas e não como vigas [1].

## 2 Tensões Normais na Flexão Pura

A dedução da tensão normal  $\sigma$  na flexão pura segue uma estratégia bem definida. Primeiro, submetemos um trecho genérico de barra a um momento fletor  $M$  e obtemos a distribuição das deformações e das tensões na ST usando a hipótese de Navier e a Lei de Hooke. Depois, aplicando as relações entre a tensão normal e os esforços solicitantes, Eqs. (1), chegamos às condições para que a deflexão ocorra no mesmo plano de atuação do momento  $M$ .

<sup>2</sup>Os erros são de até 7% para seções retangulares de barras com raio de curvatura  $\rho > 5h$ , onde  $h$  é a altura da ST [2].

**I. Compatibilidade de Deformações** Consideremos um trecho infinitesimal de barra delimitado pelas seções AC e BD afastadas de  $dx$ , cuja configuração deformada encontra-se representada na Fig. 4-a. As fibras longitudinais desse trecho, originalmente retas e de mesmo comprimento  $dx$ , se deformam sob a ação do momento fletor. As fibras superiores se encurtam e as inferiores se esticam; contudo todas elas se transformam em arcos de circunferência concêntricos em decorrência da hipótese de Navier.

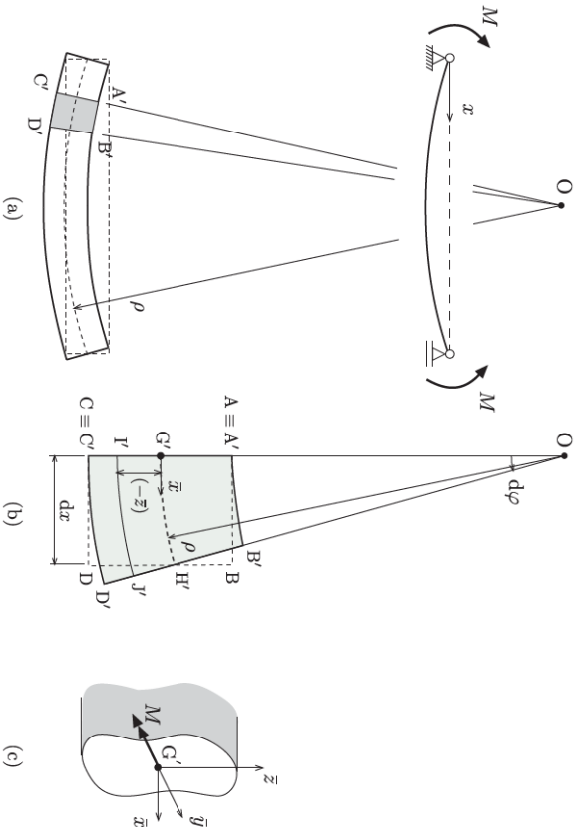


Fig. 4: Deformação de um trecho de barra submetido à flexão pura.

Na Fig. 4-b, as configurações deformada e indeformada do trecho considerado foram sobrepostas de modo que as seções AC e A'C' coincidissem. O exame da configuração deformada evidencia a presença de uma superfície longitudinal G'H' cujas fibras mantêm o comprimento original  $dx$ . Essa superfície recebe o nome de *superfície neutra* e sua interseção com o plano da ST determina a *linha neutra* que separa as partes tracionada e comprimida da ST.

Se definirmos um sistema de coordenadas com origem em G' e formado pelos eixos locais  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$  orientados conforme mostra a Fig. 4-c, então a deformação  $\epsilon$  da fibra longitudinal T'J', distante  $(-\bar{z})$  da superfície neutra, é dada por

$$\epsilon = \frac{T'J' - IJ}{IJ} = \frac{T'J' - G'H'}{G'H'} = \frac{[\rho + (-\bar{z})]d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = -\frac{\bar{z}}{\rho},$$

onde IJ denota o comprimento indeformado. Assim, para uma fibra genérica na cota  $\bar{z}$ , temos

$$\epsilon(\bar{z}) = -\frac{\bar{z}}{\rho}, \quad (2)$$

**II. Equação Constitutiva** Introduzindo a deformação acima na lei de Hooke unidimensional,  $\sigma = E\epsilon$ , obtemos

$$\sigma(\bar{z}) = -E\frac{\bar{z}}{\rho}. \quad (3)$$

Concluímos das Eqs. (2) e (3) que as deformações e as tensões possuem distribuições planas na ST.

**III. Resultantes na ST** As relações entre esforços solicitantes e as tensões normais, Eq. (1), nos permitem chegar às seguintes conclusões:

**A origem G' coincide com o centro de gravidade da ST**

$$N = \int_A \sigma dA \implies 0 = -\frac{E}{\rho} \int_A \bar{z} dA \implies S_{\bar{z}} = 0. \quad (4)$$

**Os eixos  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$  coincidem com os eixos centrais  $y$  e  $z$  da ST**

$$M_{\bar{z}} = -\int_A \sigma \bar{y} dA \implies 0 = \frac{E}{\rho} \int_A \underbrace{\bar{y}\bar{z}}_{I_{y\bar{z}}} dA \implies I_{y\bar{z}} = 0. \quad (5)$$

Em decorrência das Eqs. (4) e (5), a LN coincide com o eixo central<sup>3</sup>  $y$ . Portanto, quando o momento  $M$  atua num plano central definido pelo eixo da barra e um dos eixos centrais, a deflexão ocorrerá neste plano.

**Curvatura do eixo deformado da barra**

$$M_y = \int_A \sigma z dA \implies -M = -\frac{E}{\rho} \int_A \underbrace{z^2}_{I_y} dA \implies \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_y}, \quad (6)$$

em que o momento fletor  $M$  é positivo quando traciona as fibras inferiores da viga.

<sup>3</sup> Eixos centrais são eixos principais passando pelo centro de gravidade da seção.

Tensões normais na ST Introduzindo a Eq. (6) em (3), temos

$$\sigma = -\frac{M}{I_y} z. \quad (7)$$

### 3 Flexão Normal

A flexão normal<sup>4</sup> ocorre quando uma barra prismática<sup>5</sup> é submetida a esforços externos atuando somente em um dos planos centrais de inércia. Esse é o caso das vigas com seções simétricas carregadas no plano de simetria.

Adotando a convenção de sinal da Resistência dos Materiais para os momentos fletores e considerando o eixo  $z$  vertical para cima, chegamos à fórmula da *flexão normal composta* (FNC)

$$\sigma(z) = \frac{N}{A} - \frac{M}{I_y} z, \quad (8)$$

A presença da força cortante  $V$  praticamente não afeta o comprimento das fibras longitudinais e, conseqüentemente, não altera a distribuição das tensões normais na seção.

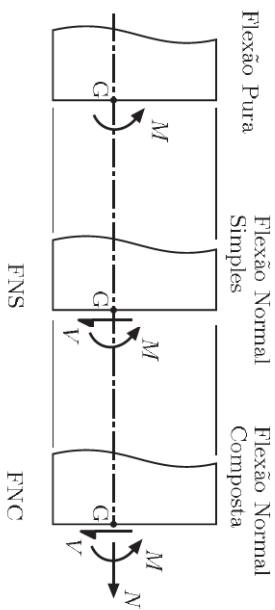


Fig. 5: Flexão em um plano central. Vista lateral.

#### 3.1 Flexão Normal Simples ( $N = 0$ )

A *linha neutra* (LN) é o lugar geométrico dos pontos do plano da seção transversal com tensão normal nula, correspondendo à reta de intersecção da superfície neutra com o plano da seção.

A posição da linha neutra na flexão normal<sup>6</sup> simples é obtida anulando-se a Eq. (8) com

<sup>4</sup>Também são usadas as expressões *flexão reta* ou *flexão plana*.

<sup>5</sup>É possível estender o conceito para barras retas não-prismáticas desde que a orientação dos eixos centrais seja a mesma para todas as STs.

<sup>6</sup>Omitiremos o índice  $y$  do momento de inércia para abreviar as expressões.

$N = 0$ ,

$$-\frac{M}{I_y} z = 0, \quad \Rightarrow \quad z = 0.$$

Desse modo a linha neutra coincide com o eixo  $y$  e a distribuição das tensões admite a representação plana da Fig. 6.

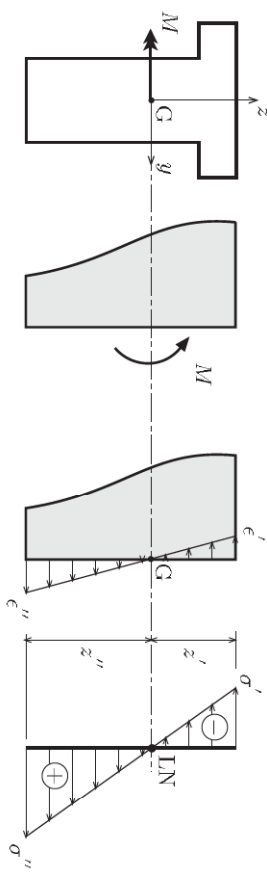


Fig. 6: Distribuição das deformações e das tensões normais na FNS.

É usual designarmos as grandezas associadas aos pontos superior e inferior da ST e as respectivas fibras longitudinais com os sobrescritos ( $'$ ) ou ( $''$ ). Eles se referem aos pontos mais afastados da LN que estão submetidos às tensões normais extremas,

$$\sigma' = -\frac{M}{I_y} z', \quad \sigma'' = \frac{M}{I_y} z''. \quad (9)$$

em que  $z'$  é a distância da LN ao ponto superior e  $z''$ , a distância ao ponto inferior, *ambas tomadas em módulo* (Fig. 6).

Para um momento positivo,  $\sigma'$  é a tensão normal na fibra superior mais comprimida, enquanto  $\sigma''$  é a tensão na fibra inferior mais traçionada. Uma característica importante da FNS é que, em módulo, as tensões extremas são proporcionais às distâncias ao centro de gravidade

$$\frac{|\sigma'|}{z'} = \frac{|\sigma''|}{z''}.$$

Na Eq. (9), o momento de inércia  $I_y$  e as distâncias  $z'$  e  $z''$  são propriedades geométricas, podendo ser reunidas nos *módulos de resistência à flexão superior e inferior* da seção ([L]<sup>3</sup>), respectivamente,

$$W' = \frac{I_y}{z'}, \quad W'' = \frac{I_y}{z''}. \quad (10)$$

Introduzindo as Eqs. (10) em (9), obtemos

$$\sigma' = -\frac{M}{W'} \quad \sigma'' = \frac{M}{W''} \quad (11)$$

Os módulos de resistência à flexão estão associados à capacidade da seção de resistir momentos fletores. Por exemplo, se a tensão normal admissível  $\bar{\sigma}$  for a mesma na tração e na compressão, o momento fletor admissível resistido pela seção será

$$\bar{M} = \bar{\sigma}W,$$

em que  $W$  é o menor dos módulos de resistência.

A Fig. 7 apresenta os módulos de resistência de várias seções com a mesma área. Verifica-se que as seções com áreas mais afastadas do eixo  $y$  são as mais eficazes à flexão em torno desse eixo.

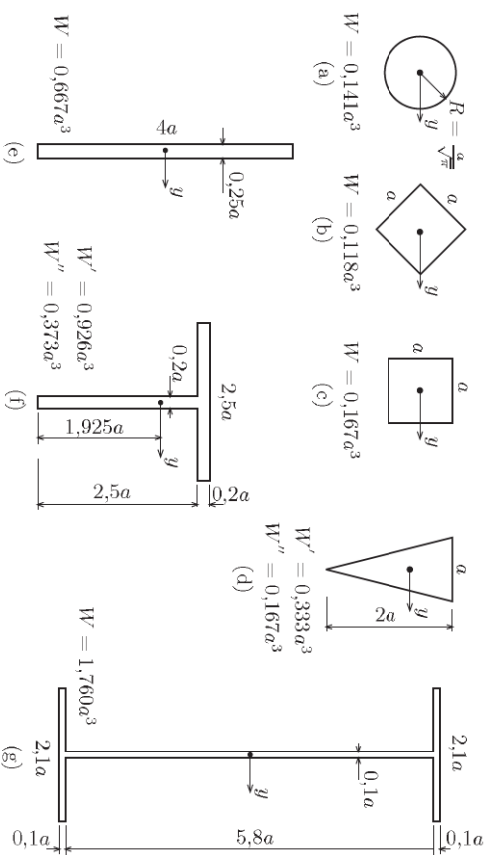


Fig. 7: Módulos de resistência à flexão de seções com a mesma área.

**Problema 1** Verifique os módulos de resistência à flexão para as seções de mesma área ( $A = a^2$ ) ilustradas na Fig. 7.

### 3.1.1 Dimensionamento da ST

Os módulos de resistência são muito úteis no dimensionamento da seção. Depois de adotada a forma (retangular, circular, em ‘T’ etc.), as dimensões devem ser escolhidas de modo que  $W$  seja maior ou igual ao momento fletor dividido pela tensão admissível. No caso das tensões admissíveis à tração e à compressão serem iguais em valor absoluto, o ponto mais afastado da LN, associado ao valor  $W = \min(W', W'')$ , comanda o dimensionamento e fornece

$$\sigma = \frac{|M|}{W} \leq \bar{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = \frac{|M|}{\bar{\sigma}}}.$$

Caso contrário, os pontos mais solicitados à compressão e à tração são identificados e os respectivos módulos de resistência são confrontados com

$$W_c = \frac{|M|}{\bar{\sigma}_c}, \quad W_t = \frac{|M|}{\bar{\sigma}_t}.$$

Por exemplo, para um momento tracionando embaixo, impõem-se  $W_c \leq W_t$  e  $W'' \leq W_t$  para as fibras superior e inferior, respectivamente.

### 3.1.2 Vigas de Perfis Metálicos

O emprego de tabelas com as propriedades das seções (ver Apêndice A) facilita o dimensionamento e a verificação de estruturas formadas por perfis metálicos com seção padronizada. Adicionalmente, é possível otimizar o peso da estrutura escolhendo o perfil com menor área dentre aqueles satisfazendo o critério para o módulo de rigidez à flexão.

**Exemplo 1** Empregando a Tabela 1 do Apêndice A, escolha a seção transversal mais econômica para um momento fletor de 500 kN m. Considere uma tensão admissível de  $\bar{\sigma} = 100$  MPa para o aço.

**SOLUÇÃO**

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} &= 100 \text{ N/mm}^2 \\ M &= 500 \times 10^6 \text{ N mm} \end{aligned} \right\} \quad W \geq \frac{M}{\bar{\sigma}} = 5 \times 10^6 \text{ mm}^3.$$

Na tabela, encontramos  $W_y = 6,655 \times 10^6 \text{ mm}^3$  correspondendo à seção  $W 33 \times 130$  com  $h = 840 \text{ mm}$ ,  $b = 292 \text{ mm}$  e  $A = 24710 \text{ mm}^2$ . Por sua vez, o emprego de  $W_y$  fornece a tensão máxima  $\sigma_y = 75 \text{ MPa} \leq \bar{\sigma}$ .

### 3.2 Flexão Normal Composta ( $N \neq 0$ )

Na flexão normal composta, a presença da força normal faz com que a LN se mova paralelamente ao eixo  $y$  (Fig. 8),

$$N - \frac{M}{I} z = 0 \implies z = \frac{N}{M} \frac{I}{A}$$

As tensões extremas ocorrem nos pontos mais afastados da LN,

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M}{I} z \implies \begin{cases} \sigma' = \frac{N}{A} - \frac{M}{W'} \\ \sigma'' = \frac{N}{A} + \frac{M}{W''} \end{cases} \quad (12)$$

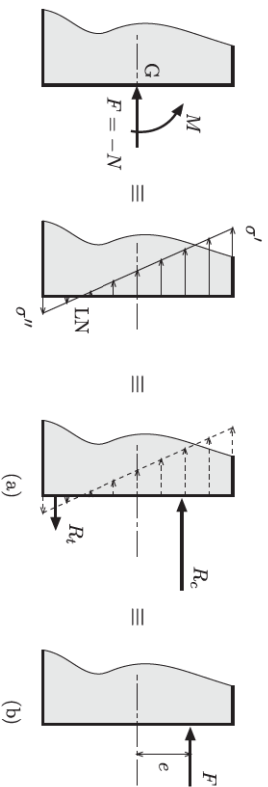


Fig. 8: Distribuição das tensões normais na FNC e esforços mecanicamente equivalentes na ST.

**Esforços Mecanicamente Equivalentes** A solicitação da seção pode ser representada por *esforços mecanicamente equivalentes* aos esforços solicitantes  $M$  e  $N$ . Por exemplo, o par das resultantes  $R_t$  e  $R_c$  das tensões de tração e compressão, Fig. 8-a, ou uma única força  $F$  com excentricidade  $e = M/F$ , Fig. 8-b. Esta última representação é útil na resolução de problemas envolvendo materiais com resistência à tração muito inferior à resistência à compressão (ferro fundido, concreto simples etc.). Na figura, o contorno da ST não restringe a posição do ponto de aplicação da força  $F$ , caso contrário seria impossível representar a flexão normal simples em que  $e = \pm\infty$ .

## A Tabelas de Perfis de Aço

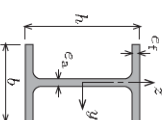


Tabela 1: Vigas  $W^{(a)}$  (padrão americano) [6, p. 620].

US <sup>(b)</sup>	SI <sup>(c)</sup>	Flange			Alma		Eixo $y$		Eixo $z$			
		$A$ mm <sup>2</sup>	$h$ mm	$b$ mm	$e_f$ mm	$e_a$ mm	$I_y$ mm <sup>4</sup>	$W_y$ mm <sup>3</sup>	$t_y$ mm	$I_z$ mm <sup>4</sup>	$W_z$ mm <sup>3</sup>	$t_z$ mm
36×230	914×342	43610	912	418	32.0	19.3	6245	13715	378	391	1870	93.7
160	238	30325	915	305	25.9	16.5	4060	8880	366	123	805	64.5
33×201	838×299	38130	855	400	29.2	18.2	4785	11210	356	312	1560	90.4
152	226	28850	851	294	26.8	16.1	3395	7980	343	114	775	62.7
130	193	24710	840	292	21.7	14.7	2795	6655	335	90.7	620	60.7
30×132	762×196	25100	770	268	25.4	15.6	2400	6225	310	81.6	610	57.2
108	161	20450	758	266	19.3	13.8	1860	4900	302	60.8	457	54.6
27×146	686×217	27675	695	355	24.8	15.4	2345	6735	290	184	1040	81.5
94	140	17870	684	254	18.9	12.4	1360	3980	277	51.6	406	53.8
24×104	610×155	19740	611	324	19.1	12.7	1290	4230	257	108	667	73.9
84	125	15935	612	229	19.6	11.9	985	3210	249	39.3	342	49.5
62	92	11750	603	179	15.0	10.9	645	2145	234	14.4	161	35.1
21×101	533×150	19225	543	312	20.3	12.7	1005	3720	229	103	660	73.4
83	124	15675	544	212	21.2	13.1	762	2800	220	33.9	320	46.5
62	92	11805	533	209	15.6	10.2	554	2080	219	23.9	228	45.0
18×97	457×144	18365	472	283	22.1	13.6	728	3080	199	83.7	592	67.3
76	113	14385	463	280	17.3	10.8	554	2395	196	63.3	452	66.3
60	89	11355	463	192	17.7	10.5	410	1770	190	20.9	218	42.9
16×100	406×149	18970	431	285	25.0	14.9	630	2870	180	77.4	585	64.0
67	100	12710	415	260	16.9	10.0	397	1915	177	49.5	380	62.5
40	60	7615	407	178	12.8	7.7	216	1060	168	12.0	135	39.9
26	39	4950	399	140	8.8	6.4	125	629	159	3.99	57.2	28.4
14×120	356×179	22775	368	373	23.9	15.0	574	3115	158	206	1105	95.0
82	122	15550	363	257	21.7	13.0	367	2015	154	61.6	480	63.0
43	64	8130	347	203	13.5	7.7	178	1025	148	18.8	185	48.0
30	45	5710	352	171	9.8	6.9	121	688	146	8.16	95.4	37.8
12×96	305×143	18195	323	309	22.9	14.0	347	2145	138	112	728	78.5
65	97	12325	308	305	15.4	9.9	222	1440	134	72.4	477	76.7
50	74	9485	310	205	16.3	9.4	164	1030	132	23.4	228	48.6
30	45	5670	313	166	11.2	6.6	99.1	633	132	8.45	102	39.6
10×60	254×89	11355	260	256	17.3	10.7	142	1095	112	48.3	377	65.3
45	67	8580	257	204	15.7	8.9	103	805	110	22.2	218	51.1
30	45	5705	266	148	13.0	7.6	70.8	531	111	6.95	94.2	34.8
22	33	4185	258	146	9.1	6.1	49.1	380	108	4.75	65.1	33.8
8×40	203×60	7550	210	205	14.2	9.1	60.8	582	89.7	20.4	200	51.8
31	46	5890	203	203	11.0	7.2	45.8	451	88.1	15.4	152	51.3
24	36	4570	201	165	10.2	6.2	34.5	342	86.7	7.61	92.3	40.9
15	22	2865	206	102	8.0	6.2	20.0	193	83.6	1.42	27.9	22.3
6×25	152×37	4735	162	154	11.6	8.1	22.2	274	68.6	7.12	91.9	38.6
16	24	3060	160	102	10.3	6.6	13.4	167	66.0	1.84	36.1	24.6
5×16	127×24	3020	127	127	9.1	6.1	8.87	139	54.1	3.13	49.2	32.3
4×13	102×19	2470	106	103	8.8	7.1	4.70	89.5	43.7	1.61	31.1	25.4

<sup>(a)</sup> No Brasil, a letra H é usada no lugar do W para os perfis de flange larga.

<sup>(b)</sup> Altura nominal em polegadas e peso em libras por pé de comprimento.

<sup>(c)</sup> Altura nominal em mm e massa em kg por metro de comprimento.

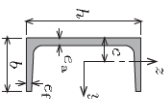


Tabela 2: Vigas C (padrão americano) [6, p. 624].

C		Flange		Alma		Eixo y		Eixo z					
US <sup>(a)</sup>	SI <sup>(b)</sup>	A	h	b	e <sub>f</sub>	e <sub>a</sub>	$I_y$ 10 <sup>6</sup>	$W_y$ 10 <sup>3</sup>	$I_z$ 10 <sup>6</sup>	$W_z$ 10 <sup>3</sup>	$t_z$	c	
		mm <sup>2</sup>	mm	mm	mm	mm	mm <sup>4</sup>	mm <sup>3</sup>	mm <sup>4</sup>	mm <sup>3</sup>	mm	mm	
C18×58	C457×86	11030	457.2	106.7	15.9	17.8	281	1230	160	7.41	87.2	25.9	21.9
51.9	9870	457.2	104.1	15.9	15.2	261	1140	163	6.83	83.1	26.4	21.8	
45.8	68	8710	457.2	101.6	15.9	12.7	241	1055	167	6.29	79.0	26.9	22.0
42.7	64	8130	457.2	100.3	15.9	11.4	231	1010	169	5.99	76.9	27.2	22.3
C15×50	C381×74	9495	381.0	94.4	16.5	18.2	168	882	133	4.58	61.9	22.0	20.3
40	60	7615	381.0	89.4	16.5	13.2	145	762	138	3.84	55.2	22.5	19.7
33.9	50	6425	381.0	86.4	16.5	10.2	131	688	143	3.38	51.0	23.0	20.0
C12×30	C305×45	5690	304.8	80.5	12.7	13.0	67.4	442	109	2.14	33.8	19.4	17.1
25	37	4740	304.8	77.4	12.7	9.8	59.9	395	113	1.86	30.8	19.8	17.1
20.7	31	3930	304.8	74.7	12.7	7.2	53.7	352	117	1.61	28.3	20.3	17.7
C10×30	C254×45	5690	254.0	77.0	11.1	17.1	42.9	339	86.9	1.64	27.0	17.0	16.5
25	37	4740	254.0	73.3	11.1	13.4	38.0	298	89.4	1.40	24.3	17.2	15.7
20	30	3795	254.0	69.6	11.1	9.6	32.8	259	93.0	1.17	21.6	17.6	15.4
15.3	23	2895	254.0	66.0	11.1	6.1	28.1	221	98.3	0.949	19.0	18.1	16.1
C9×20	C229×30	3795	228.6	67.3	10.5	11.4	25.3	221	81.8	1.01	19.2	16.3	14.8
15	22	2845	228.6	63.1	10.5	7.2	21.2	185	86.4	0.803	16.6	16.8	14.9
13.4	20	2540	228.6	61.8	10.5	5.9	19.9	174	88.4	0.733	15.7	17.0	15.3
C8×18.75	C203×28	3555	203.2	64.2	9.9	12.4	18.3	180	71.6	0.824	16.6	15.2	14.4
13.75	20	2605	203.2	59.5	9.9	7.7	15.0	148	75.9	0.637	14.0	15.6	14.0
11.5	17	2180	203.2	57.4	9.9	5.6	13.6	133	79.0	0.549	12.8	15.9	14.5
C7×14.75	C178×22	2795	177.8	58.4	9.3	10.6	11.3	127	63.8	0.574	12.8	14.3	13.5
12.25	18	2320	177.8	55.7	9.3	8.0	10.1	114	66.0	0.487	11.5	14.5	13.3
9.8	15	1850	177.8	53.1	9.3	5.3	8.87	99.6	69.1	0.403	10.2	14.8	13.7
C6×13	C152×19	2470	152.4	54.8	8.7	11.1	7.24	95.0	54.1	0.437	10.5	13.3	13.1
10.5	16	1995	152.4	51.7	8.7	8.0	6.33	82.9	56.4	0.360	9.24	13.4	12.7
8.2	12	1550	152.4	48.8	8.7	5.1	5.45	71.8	59.4	0.288	8.06	13.6	13.0
C5×9	C127×13	1705	127.0	44.5	8.1	8.3	3.70	58.3	46.5	0.263	7.37	12.4	12.1
6.7	10	1270	127.0	41.5	8.1	4.8	3.12	49.2	49.5	0.199	6.19	12.5	12.3
C4×7.25	C 102×11	1375	101.6	43.7	7.5	8.2	1.91	37.5	37.3	0.180	5.62	11.4	11.7
5.4	8	1025	101.6	40.2	7.5	4.7	1.60	31.6	39.6	0.133	4.64	11.4	11.6
C3×6	C76×9	1135	76.2	40.5	6.9	9.0	0.862	22.6	27.4	0.127	4.39	10.6	11.6
5	7	948	76.2	38.0	6.9	6.6	0.770	20.3	28.4	0.103	3.82	10.4	11.1
4.1	6	781	76.2	35.8	6.9	4.6	0.691	18.0	29.7	0.082	3.31	10.3	11.1

(a) Altura nominal em polegadas e peso em libras por pé de comprimento.

(b) Altura nominal em mm e massa em kg por metro de comprimento.

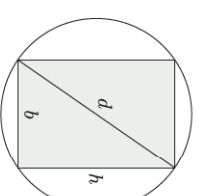
## Referências

- [1] Belyaev, N. M. *Strength of Materials*. English ed., Mir, Moscow, 1979.
- [2] Boresi, A. P., Schmidt, R. J. and Sidebottom, O. M. *Advanced Mechanics of Materials*. 5th ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- [3] Crandall, S. H., Dahl, N. C. and Lardner, T. J. *An Introduction to the Mechanics of Solids*. 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1978.
- [4] Feodosiev, V. I. *Resistencia de Materiales*. 2nd. ed. (espanhol), MIR, Moscow, 1980.
- [5] Hibbeler, R. C. *Mechanics of Materials*. 3rd ed., Prentice Hall International Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1997.
- [6] Riley, W. F., Sturges, L. D. and Morris, D. H. *Statics and Mechanics of Materials: An Integrated Approach*. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [7] Soares, Mário Eduardo Senatore. *PEF 126: Resistência dos Materiais e Estática das Construções II*. Notas de aula, 1992.
- [8] van Langendonck, Talemaco. *Resistência dos Materiais: Tensões*. Edgard Blücher LTDA., São Paulo, 1971.

## B Exemplos

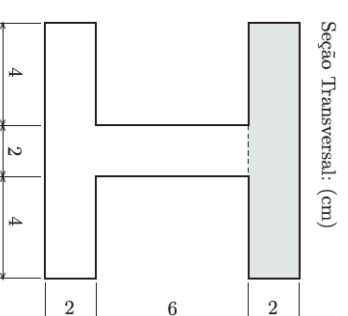
### Exemplo 2 (HBC, Ex. 2, p. 11)

Determine as dimensões  $b$  e  $h$  da seção retangular maciça mais resistente à flexão que pode ser extraída de uma tora de madeira de diâmetro  $d$ .



### Exemplo 3 (PEFF2201, Lista, Ex. 3)

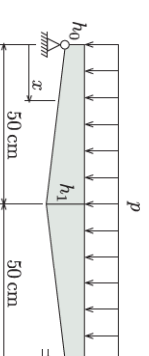
A seção transversal indicada na figura está solicitada por um momento fletor de  $15\text{ kN}\cdot\text{m}$  que atua em torno de seu eixo horizontal e traciona embaixo. Determine a força que atua na mesa superior, correspondente à resultante das tensões normais.



### Exemplo 4 (PEFF2201, Lista, Ex. 4)

Para a viga da figura, determine:

- a posição da seção transversal na qual ocorre a máxima tensão normal;
- o máximo carregamento  $p$  que pode ser aplicado.

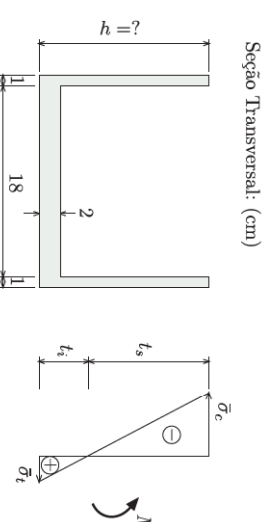


Dados da seção retangular variável:  $h_0 = 2\text{ cm}$ ,  $h_1 = 4\text{ cm}$ ,  $b = 1,5\text{ cm}$ ,  $\bar{\sigma} = 125\text{ MPa}$ .

### Exemplo 5 (HBC, Ex. 3, p. 11)

Determine a altura racional  $h$  da seção transversal abaixo considerando uma relação  $\frac{\bar{\sigma}_a}{\bar{\sigma}_c} = \frac{1}{3}$ .

“Altura racional de uma seção, para um dado material, é aquela altura para a qual as tensões extremas coincidem com as tensões admissíveis do material.”



## Index

altura racional, 16

Eixos centrais, 6

eixos centrais, 6

esforços mecanicamente equivalentes, 11

flexão

composta, 2

normal, 2, 7

normal composta, 7

oblíqua, 2

plana, 7

pura, 2

reta, 7

simples, 2

hipótese de Navier, 4

lei de Hooke, 4

linearidade física, 4

linearidade geométrica, 4

linha neutra, 5, 7

módulos de resistência à flexão superior e inferior, 8

Princípio da Superposição de Efeitos, 4

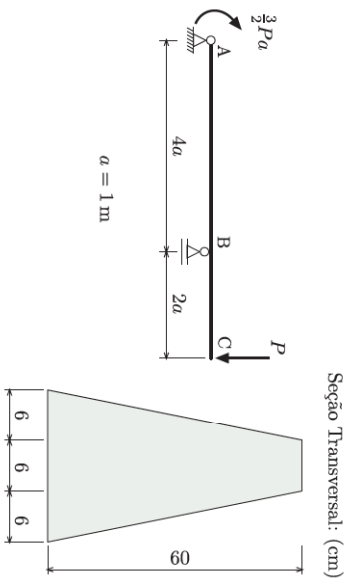
superfície neutra, 5

viga, 2



**Exemplo 6 (PEF125, 97PRQ2, 18/7/97)**

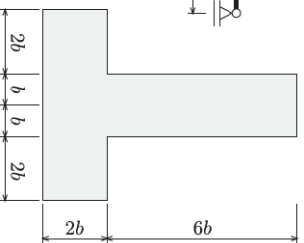
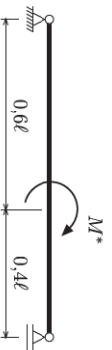
Para a viga da figura, determine o máximo valor de  $P$  sabendo-se que seu material tem tensão de ruptura à tração de  $\sigma_{rt} = 25,5 \text{ kN/cm}^2$ , tensão de ruptura à compressão  $\sigma_{rc} = 17,0 \text{ kN/cm}^2$  e que o coeficiente de segurança da estrutura deve ser  $\gamma = 1,7$ .



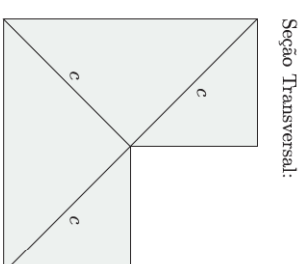
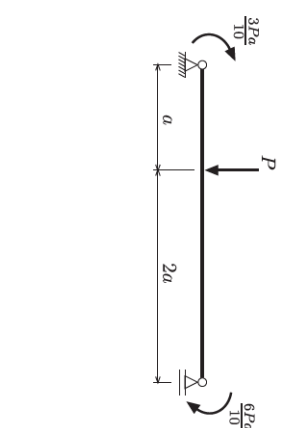
**Exemplo 7 (PEF125, 94P2Q1, Diogo)**

Dada a viga da figura, determine:

- a) as tensões extremas de tração e compressão em função de  $M^*$  e  $b$ ;
- b) para  $M^* = 3750 \text{ kNcm}$ , o valor de  $b$  de modo que se tenha coeficiente  $\gamma = 1,7$ , sendo  $\sigma_{rt} = 1,50 \text{ kN/cm}^2$  a tensão de ruptura na tração e  $\sigma_{rc} = 0,75 \text{ kN/cm}^2$  a tensão de ruptura na compressão.



Seção Transversal: (cm)

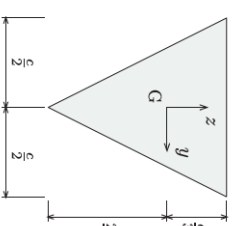
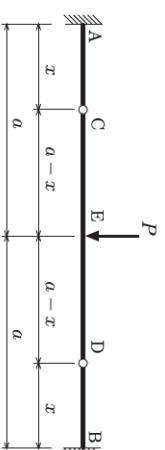


Seção Transversal:

**Exemplo 9 (PEF2201, 02P2Q2, 22/02/02, Diogo)**

Dada a estrutura da figura, articulada nos pontos C e D, determine:

- a) considerando o intervalo  $\frac{a}{3} \leq x \leq \frac{2a}{3}$ , as tensões extremas de tração e compressão em função de  $P, a, c, x$ ;
- b) admitindo em seguida  $\bar{\sigma}_t = \bar{\sigma}$ ,  $\bar{\sigma}_c = \frac{2}{3}\bar{\sigma}$ , o valor do comprimento  $x$  associado à dimensão  $c$  mais econômica.



Seção Transversal:

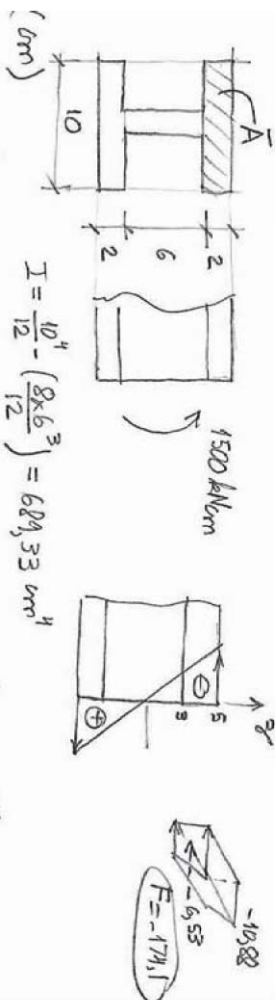
**Exemplo 8 (PEF2201, 00P2Q1, 16/05/00, Diogo)**

Dada a estrutura da figura abaixo,

- a) determine os eixos centrais de inércia e o menor momento central de inércia da seção transversal;
  - b) oriente a seção de modo que a flexão ocorra em torno do eixo de menor momento de inércia e, nesta situação, calcule o menor valor da dimensão  $c$ .
- São dadas as tensões admissíveis de tração e compressão:  $\bar{\sigma}_t = \bar{\sigma}$ ,  $\bar{\sigma}_c = 2\bar{\sigma}$ .

## Resoluções

Ex. 3



• Análises analítica

$$F = \int_A \sigma dA = \int_3^5 \left(-\frac{M}{I} z\right) (10 dz)$$

$$= \frac{-1500 \cdot 10}{689,33} \left[\frac{z^2}{2}\right]_3^5 = -21,76 \left[\frac{25-9}{2}\right]$$

$$F = 171,1 \text{ kN}$$

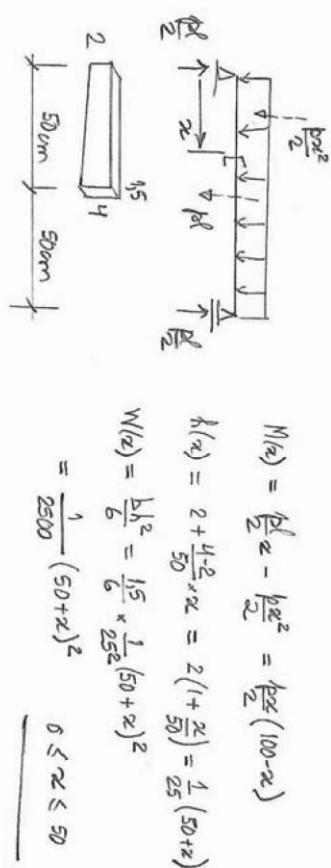
• Análises gráfica

$$\sigma(5) = \frac{-1500}{689,33} \cdot 5 = -10,88$$

$$\sigma(3) = -\frac{1500}{689,33} \cdot 3 =$$

$$F = \left[\frac{\sigma(5) + \sigma(3)}{2}\right] \cdot 10 \cdot 2 = -171,1 \text{ kN}$$

Ex. 4



$$M(x) = \frac{p}{2} x - \frac{p x^2}{2} = \frac{p x}{2} (100 - x)$$

$$k(x) = 2 + \frac{4-z}{50} \cdot x = 2 \left(1 + \frac{x}{50}\right) = \frac{1}{25} (50 + x)$$

$$W(x) = \frac{b h^2}{6} = \frac{15}{6} \times \frac{1}{252} (50 + x)^2$$

$$= \frac{1}{2500} (50 + x)^2 \quad 0 \leq x \leq 50$$

$$\sigma(x)'' = \frac{\frac{p x}{2} (100 - x)}{\frac{1}{2500} (50 + x)^2} = 1250 p \frac{x (100 - x)}{(50 + x)^2} = 1250 p (100x - x^2) \cdot (50 + x)^{-2}$$

$$\text{balanço: } \frac{d\sigma}{dx} = 0 \Rightarrow 1250 p \left[ \frac{100 - 2x}{(50 + x)^2} - \frac{2(100x - x^2)}{(50 + x)^3} \right] = 0$$

$$\Rightarrow 1250 p \left[ \frac{5000 - 20x^2 - 200x + 20x^2}{(50 + x)^3} \right] = 0 \Rightarrow \underline{x = 25 \text{ cm}}$$

$$b) \quad \sigma''(25) = 1250 p \frac{25(100 - 25)}{(50 + 25)^2} = \frac{1250 \times 25}{75^3} p \leq \frac{1}{1875} p$$

$$p \leq 0,03 \frac{\text{kN}}{\text{cm}} = 3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

97PR02 18/4

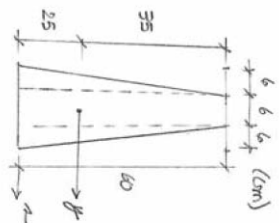
Seção transversal

$$A = 2 \times \frac{6 \times 60}{2} + 6 \times 60 = 2 \times 180 + 360 = 720 \text{ cm}^2$$

$$I_x = 2 \left( \frac{6 \times 60^3}{12} \right) + \frac{6 \times 60^3}{3} = 648000 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{2 \times (90 \times 20^3)}{12} + \frac{360 \times 30^3}{3} = 250000 \text{ cm}^4$$

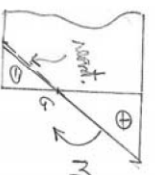
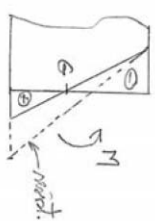
$$I_y - A \cdot t_x^2 = 198000 \text{ cm}^4 \quad \leftarrow N^1 = 79200 \text{ cm}^3$$



Distribuição dos tensões e capacidade resistente

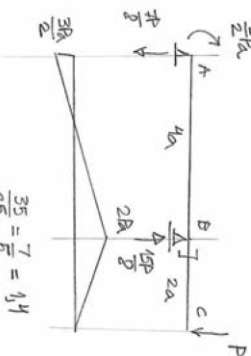
$$\sigma_c = \frac{2555}{17} = 15 \frac{\text{MN}}{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_t = \frac{17}{17} = 1 \frac{\text{MN}}{\text{cm}^2}$$



Para determinar melhor o momento a ser aplicado a uma direção para medir a capacidade resistente os furos empurram

Diagrama de momentos



Seção A:  $\frac{35}{25} = \frac{7}{5} = 1,4$

Seção B:  $\frac{300P}{5657} \leq 10 \Rightarrow P \leq 3771 \text{ kN}$

Seção A:  $\frac{200P}{5657} \leq 15 \Rightarrow P \leq 4213 \text{ kN}$

Seção B:  $\frac{200P}{7920} \leq 10 \Rightarrow P \leq 3960 \text{ kN}$

Obs - o diagrama de (M) pode ser obtido com o auxílio dos momentos - a distribuição da ação aplicada muller o material.

Equilibrium equations:  
 $\sum F_x = 0 \Rightarrow R_A + R_B = P$   
 $\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = 15P, R_B = -7P$   
 $\sum M = 0 \Rightarrow 3kN \cdot 4m - 7P \cdot 4m + R_B \cdot 4m = 0$

00F2Q1 4/5

Diagrama de momentos

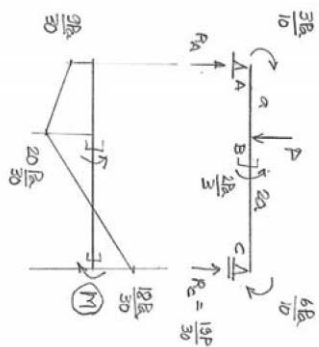
$$\uparrow \{ R_A + R_C = P$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{3P}{10} + R_C + \frac{6R_C}{10} - P \cdot 2a = 0$$

$$3aR_C = \frac{9R_C + 6R_C}{10} \Rightarrow R_C = \frac{15P}{30}$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{11P}{20}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow \frac{3R_A}{10} + \frac{11P \cdot 2a}{20} - P \cdot 2a + \frac{6R_C}{10} = 0 \Rightarrow R_C = 0$$



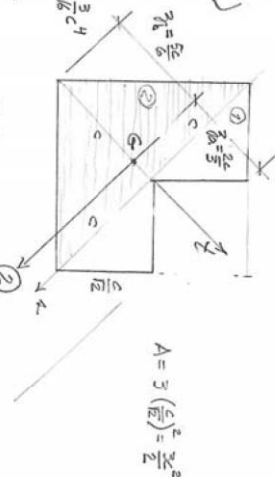
$$M = -\frac{6P}{10} + \frac{3P \cdot 2a}{20} = \frac{3P \cdot a}{10}$$

Seção transversal (simetria)

$$t_x = \frac{1}{2} \left( \frac{6}{5} \times \frac{c}{6} \right) - c^2 \times \frac{c}{6} = -\frac{c}{6} \quad t_x = \frac{c}{6}$$

$$I_x = 2 \left[ c \left( \frac{c}{2} \right)^3 \right] + \frac{2c \cdot c^3}{12} = \frac{9}{48} c^4 = \frac{3}{16} c^4$$

$$I_y = \frac{1}{2} \cdot A \cdot t_x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} c^4 - \frac{3}{16} c^2 \cdot \left( \frac{c}{6} \right)^2 = \left( \frac{3-2}{48} \right) c^4 \Rightarrow I_y = \frac{1}{48} c^4$$



Posicionamento da seção

Para W = W\_x para garantir a mesma tensão na ação B, mas com o dimensionamento condicional por W\_y na ação C

$$\sigma_c^1 = \frac{6R}{70c^3} \leq \sigma \Rightarrow \sigma^3 \geq \frac{21R}{70} = 313 \frac{R}{10}$$

Verificações:

Seção C:  $\sigma_c^1 = -\frac{6R}{10} = -\frac{6R}{10} = -0,6R$

Seção B:  $\sigma_c^1 = -\frac{2R}{70} = -\frac{2R}{70} = -0,028R$

$$\sigma_t^1 = \frac{2R}{32} = 0,0625R < \sigma = \sigma_c$$

Ex. 9

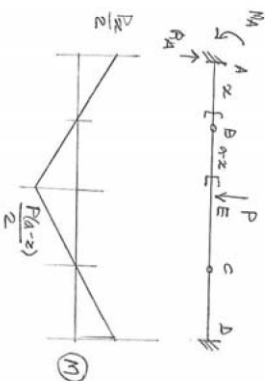
02 P2Q2 24%

Diagrama de mom. flexor

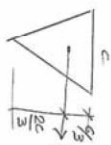
simétrica  $\left\{ \begin{aligned} R_A &= \frac{P}{2} \\ M_B &= 0 \end{aligned} \right.$

$M_B = 0 \left\{ \begin{aligned} R_A \cdot x - M_A &= 0 \\ M_A &= \frac{P \cdot c}{2} \end{aligned} \right.$

$M_E = \frac{P}{2}(1-x)$



Tensões normais extremas nas seções A < E



$J = \frac{c \cdot c^3}{36}$

$W^1 = \frac{c^3}{36} = \frac{c^3}{12}$   
 $W^2 = \frac{c^3}{36} = \frac{c^3}{12}$

Seção A:

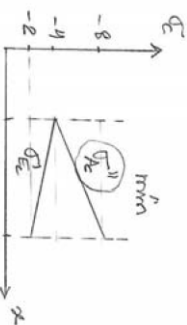
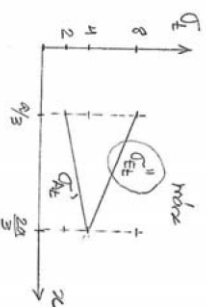
$\sigma_A^1 = \frac{R_A}{J} = \frac{P/2}{c^3/36} = \frac{6P}{c^3} \cdot x = 2$

$\sigma_A^2 = \frac{-R_A}{J} = \frac{-P/2}{c^3/36} = -\frac{12P}{c^3} \cdot x = -4$

Seção E

$\sigma_E^1 = \frac{-P(a-x)}{J} = -\frac{P(a-x)}{c^3/12} = -\frac{12P(a-x)}{c^3} = -2$

$\sigma_E^2 = \frac{P(a-x)}{J} = \frac{P(a-x)}{c^3/24} = +\frac{24P(a-x)}{c^3} = 8$



Tensões extremas no intervalo  $\frac{a}{3} \leq x \leq \frac{2a}{3}$

Impõe:  $\sigma_{FE}^2 = \frac{12P(a-x)}{c^3} \leq \sigma^T$

$c^3 = \frac{12P(a-x)}{\sigma^T} \leq 4$

Impõe:  $|\sigma_A^1| = \frac{12P}{c^3} x \leq \frac{2}{3} \sigma^T$

$c^3 = \frac{18P \cdot x}{\sigma^T} \leq 6$

$\begin{cases} \frac{18P \cdot x}{\sigma^T} = \frac{12P(a-x)}{\sigma^T} \\ 3x = 2a - 2x \Rightarrow x = \frac{2a}{5} \end{cases}$

