

das figuras planas que aparecem na dedução das expressões das tensões normais e tangenciais que atuam na seção transversal (ST).

Intencionalmente, evitar-se-á o emprego das letras x , y e z para designar os eixos usados nas definições e exemplos. Essas letras serão reservadas para o eixo da barra e os eixos centrais de inércia da ST.

Nos itens a seguir, os eixos s e t são dois eixos perpendiculares quaisquer. A adição da linha ($'$) ao nome do eixo indica um eixo paralelo passando pelo centro de gravidade da ST (Fig. 1).

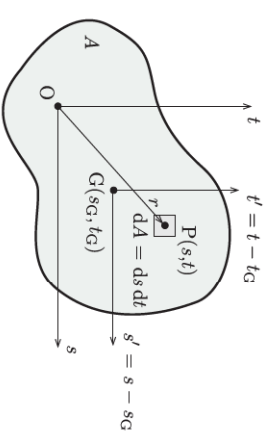


Fig. 1: Seção transversal. Elemento de área dA .

1.1 Área A

A *área* de uma figura plana é definida pela integral:

$$A = \int_A dA \quad [L^2] \quad (1)$$

em que dA representa um elemento infinitesimal de área conforme mostrado na Fig. 1.

Nota 1 A letra A é usada para designar tanto a área da figura quanto o domínio de integração nas expressões definidas nesta seção.

1.2 Momentos Estáticos S_s , S_t

Os *momentos estáticos* da figura em relação aos eixos s e t são definidos, respectivamente, por

$$\boxed{S_s = \int_A t dA,} \quad \boxed{S_t = \int_A s dA.} \quad [L^3] \quad (2)$$

Figuras Planas

Edgard S. Almeida Neto

Escola Politécnica da USP

15 de Setembro de 2017

Conteúdo

1	Propriedades Geométricas das Figuras Planas	1
1.1	Área A	2
1.2	Momentos Estáticos S_s , S_t	2
1.3	Centro de Gravidade $G(s_g, t_g)$	3
1.4	Momentos de Inércia	6
1.4.1	Momento Axial de Inércia I_s , I_t	6
1.4.2	Momento Centrífugo de Inércia I_{st}	8
1.4.3	Momento Polar de Inércia I_p	9
1.5	Raios de Giração i_s , i_t	11
2	Mudança de Eixos	12
2.1	Translação de Eixos	12
2.2	Rotação de Eixos	15
3	Momentos Principais e Momentos Centrais de Inércia	17
4	Problemas	23

1 Propriedades Geométricas das Figuras Planas

Antes de iniciar o estudo geral da flexão de barras, convém examinar algumas características das seções transversais. As características que nos interessam são as propriedades geométricas

Os momentos estáticos são também denominados *momentos de primeira ordem de área* da figura plana.

Nota 2 Repare na troca das letras que designam o eixo no subscrito e a coordenada no integrando. Ela ocorrerá na maioria das definições.

1.3 Centro de Gravidade $G(s_G, t_G)$

O *centro de gravidade* é o ponto de intersecção dos eixos em relação aos quais o momento estático se anula. Assim, para o eixo s' passando pelo centro de gravidade G e paralelo ao eixo s , tem-se por definição:

$$S_{s'} = 0 \implies 0 = \int_A t' dA = \int_A (t - t_G) dA = \int_A t dA - \int_A t_G dA = S_s - t_G A.$$

Logo, a coordenada t_G do centro de gravidade é dada por

$$t_G = \frac{S_s}{A}.$$

Procedendo de modo análogo com $S_{t'}$, obtemos a outra coordenada:

$$s_G = \frac{S_t}{A}.$$

Translação de eixos As expressões acima fornecem a posição de G , mas também podem ser usadas para calcular o momento estático em relação a um eixo genérico \hat{s} paralelo a s' uma vez conhecida a posição de G ,

$$S_{\hat{s}} = \hat{t}_G \cdot A,$$

onde \hat{t}_G é a ordenada de G no sistema de coordenadas (\hat{s}, \hat{t}) .

Exemplo 1 Determine a ordenada do centro de gravidade G de um triângulo cuja base está sobre o eixo s . São conhecidas a altura h e a base b do triângulo.

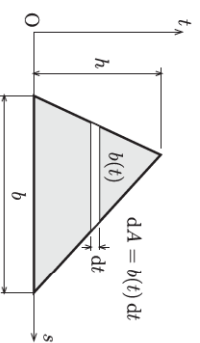


Fig. E.1: Triângulo.

$$t_G = \frac{h}{3}$$

Decomposição Algébrica da ST em Figuras Planas Elementares

Como o momento estático é uma integral de uma função contínua no domínio A , ele pode ser decomposto em uma soma de integrais. Por exemplo, conhecidos os momentos estáticos do retângulo e do triângulo, os mesmos podem ser usados no cálculo do momento estático de um trapézio (Fig. 2).

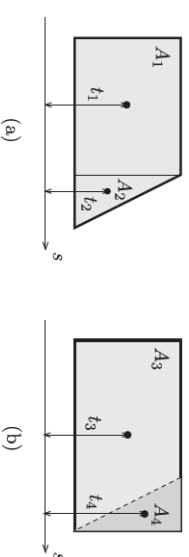


Fig. 2: Decomposição da ST.

$$S_s = \int_A t dA = \underbrace{\int_{A_1} t dA + \int_{A_2} t dA}_{(a)} = \int_{A_3} t dA - \int_{A_4} t dA \quad (b)$$

Se os centros de gravidade das figuras forem conhecidos o cálculo resume-se a

$$S_s = \underbrace{A_1 t_1 + A_2 t_2}_{(a)} = \underbrace{A_3 t_3 - A_4 t_4}_{(b)}$$

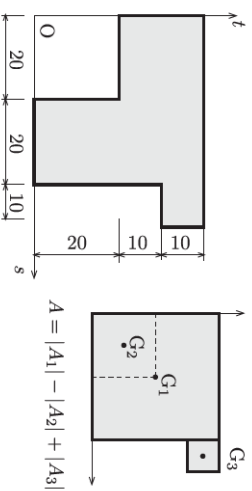


Fig. E.2: Decomposição.

Exemplo 2 Determine a posição do G da seção transversal (medidas em mm).

$$G = (25,00; 24,23)$$

Exemplo 3 Determine $G(s_G; t_G)$ para o setor circular de raio R e ângulo θ .

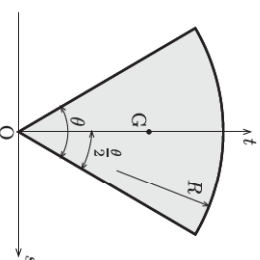
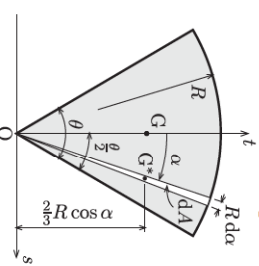


Fig. E.3: Setor circular.

SOLUÇÃO Por simetria, tem-se $s_G = 0$. Um modo simples de obter t_G faz uso de um setor elementar dA em coordenadas polares



$$dA = \frac{R(Rd\alpha)}{2} = \frac{R^2}{2} d\alpha, \quad t_{G^*} = \frac{2}{3} R \cos \alpha.$$

Assim,

$$A = \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \frac{R^2}{2} d\alpha = \left[\frac{R^2 \alpha}{2} \right]_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} = \frac{R^2 \theta}{2},$$

$$S_s = \int_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}} \left(\frac{2}{3} R \cos \alpha \right) \frac{R^2 d\alpha}{2} = \frac{R^3}{3} [\text{sen } \alpha]_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{R^3}{3} \left[\text{sen } \frac{\theta}{2} - \text{sen} \left(-\frac{\theta}{2} \right) \right] = \frac{2R^3}{3} \text{sen } \frac{\theta}{2}.$$

Resultando,

$$t_G = \frac{S_s}{A} = \frac{4R \text{sen } \frac{\theta}{2}}{3\theta}. \quad \triangle$$

1.4 Momentos de Inércia

Três tipos de *momentos de inércia* de área, também chamados de *momentos de segunda ordem*, podem ser definidos: o axial, o centrífugo e o polar de inércia. Quando o tipo é omitido, o termo *momento de inércia* usualmente denota o momento axial.

1.4.1 Momento Axial de Inércia I_s, I_t

Os *momentos axiais de inércia* são definidos em relação aos eixos do sistema de coordenadas:

$$I_s = \int_A t^2 dA \quad I_t = \int_A s^2 dA \quad [L^4] \quad (3)$$

Nota 3 Uma característica importante do momento axial de inércia é que ele é sempre positivo.

Exemplo 4 Determine os momentos de inércia do retângulo em relação a um eixo s passando por sua base e um eixo s' paralelo a s e passando por G .

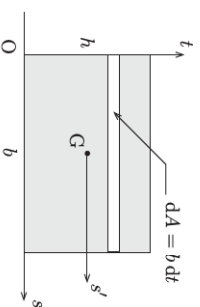


Fig. E.4: Retângulo.

$$I_s = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{s'} = \frac{bh^3}{12}$$

Exemplo 5 Determine os momentos de inércia do triângulo em relação a um eixo s passando por sua base e um eixo s' paralelo a s e passando por G .

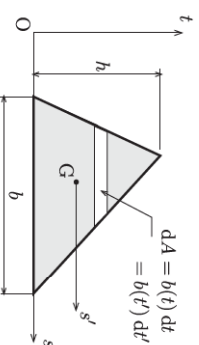


Fig. E.5: Triângulo.

SOLUÇÃO Do Exemplo 1, temos

$$dA = b(t) dt = \frac{b}{h}(h-t) dt.$$

Inserindo na expressão do momento de inércia em relação ao eixo s ,

$$\begin{aligned} I_s &= \int_A t^2 dA = \frac{b}{h} \int_0^h (ht^2 - t^3) dt \\ &= \frac{b}{h} \left[\frac{ht^3}{3} - \frac{t^4}{4} \right]_0^h = \frac{b}{h} \left[\frac{h^4}{12} \right] \end{aligned}$$

$$I_s = \frac{bh^3}{12}.$$

Em relação ao eixo s' ,

$$dA = b(t') dt' = \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{3} - t' \right) dt',$$

$$\begin{aligned} I_{s'} &= \int_A t'^2 dA = \frac{b}{h} \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \left(\frac{2ht'^2}{3} - t'^3 \right) dt' \\ &= \frac{b}{h} \left[\frac{2ht'^3}{9} - \frac{t'^4}{4} \right]_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \\ &= bh^3 \left[\frac{64 - 48 + 8 + 3}{12 \times 81} \right] \\ &= bh^3 \left[\frac{27}{12 \times 81} \right] \end{aligned}$$

$$I_{s'} = \frac{bh^3}{36}.$$

1.4.2 Momento Centrífugo de Inércia I_{st}

O *momento centrífugo de inércia*, também denominado *produto de inércia*, em relação a dois eixos perpendiculares s e t é definido por:

$$I_{st} = \int_A st dA$$

[L⁴]

(4)

Exemplo 6 Determine o momento centrífugo do triângulo retângulo em relação a eixos passando pelos catetos de comprimentos b e h .

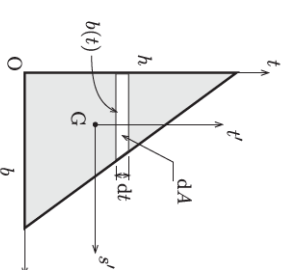


Fig. E.6: Triângulo retângulo.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} I_{st} &= \int_A st dA = \int_0^h \int_0^{b(t)} st ds dt = \int_0^h \left[\frac{ts^2}{2} \right]_0^{b(t)} dt = \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h^2t - 2ht^2 + t^3) dt \\ &= \frac{b^2}{2h^2} \left[\frac{h^2t^2}{2} - \frac{2ht^3}{3} + \frac{t^4}{4} \right]_0^h = \frac{b^2h^2}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right] = \frac{b^2}{2h^2} \left[\frac{6 - 8 + 3}{12} \right] \end{aligned}$$

$$I_{st} = \frac{h^2 t^2}{24}.$$

Nota 4 O momento centrífugo de inércia pode assumir valores positivos e negativos dependendo da posição da figura plana em relação aos eixos s e t , Fig. 3-a. Quando a área abrangida por um quadrante, normalmente é possível estabelecer o sinal do momento antes de calcular seu valor. Para isso, consideram-se as áreas nos quadrantes positivos e negativos, avaliando-se as distâncias dos respectivos centros de gravidade à origem dos eixos. Para o triângulo na Fig. 3-a, por exemplo, tem-se $I_{s't'} < 0$.

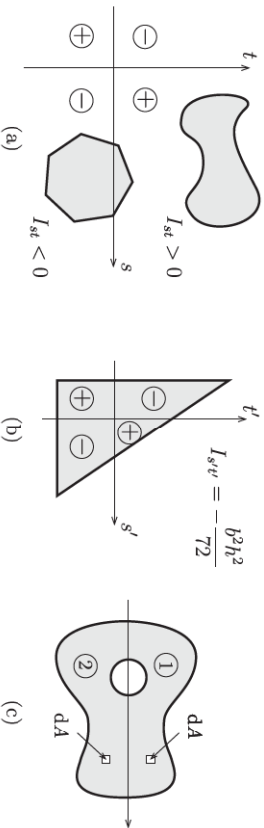


Fig. 3: Momento centrífugo: (a) e (b) avaliação do sinal, (c) eixo de simetria.

Nota 5 É fácil demonstrar que o momento centrífugo é zero em relação a um eixo de simetria da figura plana (Fig. 3-c). Para cada elemento de área dA de um lado do eixo de simetria existe um elemento idêntico do outro lado do eixo,

$$I_{st} = \int_{A_1} st \, dA + \int_{A_2} st \, dA = \int_{A_1} s|t| \, dA + \int_{A_1} s(-|t|) \, dA = 0.$$

1.4.3 Momento Polar de Inércia I_p

O *momento polar de inércia* corresponde ao momento de inércia em relação a um eixo normal à figura plana e passando pela origem,

$$I_p = \int_A r^2 \, dA \quad [L^4] \quad (5)$$

em que r é a distância ao centro O do sistema de coordenadas, Fig. 1.

Nota 6 A relação entre o momento polar e os momentos axiais de inércia em relação a um par de eixos perpendiculares é dada por

$$I_p = \int_A r^2 \, dA = \int_A (s^2 + t^2) \, dA = I_t + I_s.$$

Exemplo 7 Determine os momentos axiais de inércia do círculo em relação a eixos passando por G .

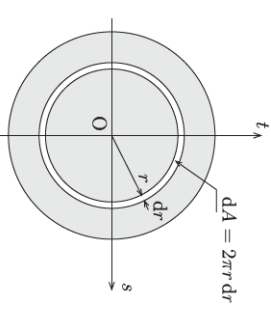


Fig. E7: Círculo.

$$I_p = \int_A r^2 \, dA = \int_0^R r^2 (2\pi r \, dr) = \pi R^4 / 2 = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_s = I_t = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

Exemplo 8 Determine a posição do centro de gravidade de um quarto de círculo situado no primeiro quadrante e os valores dos momentos de inércia I_{st} e I_s .

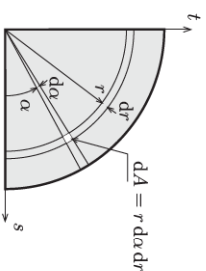


Fig. E8: Um quarto de círculo.

SOLUÇÃO Posição de G:

$$A = \frac{\pi R^2}{4}, \quad dA = (r da) dr$$

$$\begin{aligned} S_s &= \int_A t dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^R (r \operatorname{sen} \alpha) r dr \right] da \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \operatorname{sen} \alpha da = \left[-\frac{R^3 \cos \alpha}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{R^3}{3}, \end{aligned}$$

$$t_G = \frac{S_s}{A} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Por simetria, $G = \left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$.

$$I_{st} = \int_A st dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R (r \operatorname{sen} \alpha) r dr da$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^3 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha dr da \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2} da \\ &= \frac{R^4}{4} \left[-\frac{\cos 2\alpha}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4}{8}, \end{aligned}$$

$$I_s = \int_A r^2 dA = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{16},$$

onde momento de inércia do círculo foi usado no cálculo de I_s .

1.5 Raios de Giração i_s, i_t

Os raios de giração em torno dos eixos s e t são definidos por

$$i_s = \sqrt{\frac{I_s}{A}}$$

$$i_t = \sqrt{\frac{I_t}{A}} \quad [L]$$

(6)

em que I_s e I_t são os correspondentes momentos axiais de inércia, e A é a área da figura.

2 Mudança de Eixos

2.1 Translação de Eixos

Problema Típico: Conhecidos os momentos estáticos e de inércia em relação a dois eixos perpendiculares s' e t' passando por G , determine os valores dos momentos em relação aos eixos s e t paralelos aos anteriores¹.

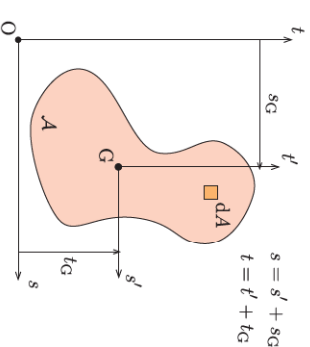


Fig. 4: Translação de eixos.

Com base na Fig. 4, as expressões de $S_{s'}$, I_s e $I_{s'}$ podem ser colocadas em função das coordenadas s' e t' ,

$$S_{s'} =$$

$$S_{s'} = t_G A. \quad (7)$$

$$I_s =$$

$$I_s = I_{s'} + t_G^2 A. \quad (8)$$

Analogamente,

$$I_t = I_{t'} + s_G^2 A. \quad (9)$$

¹As fórmulas de translação dos momentos de inércia são conhecidas como teorema de Steiner.

Momento centrífugo,

$$I_{st} =$$

$$I_{st} = I_{s't'} + sG't_GA. \quad (10)$$

Nota 7 Em um mesmo problema, as Eqs. (8) e (9) são usadas primeiramente no cálculo de I_s e I_t das sub-áreas e, posteriormente, no de $I_{s'}$ e $I_{t'}$ da seção como um todo. Ao invés de recordar os sinais nas fórmulas, uma vez que elas são usadas nos dois sentidos, é mais interessante lembrar que o termo mais à direita é sempre positivo. Assim, toda vez que uma figura plana afastar-se do eixo passando pelo seu próprio centro de gravidade o momento axial aumenta, e vice-versa:

$$I_s = I_{s'} + \underbrace{t_G^2 A}_+$$

Nota 8 Ao contrário do que acontece com os momentos axiais, os sinais de sG e tG são importantes na translação do momento centrífugo. Uma maneira simples de verificar o sinal de I_{st} consiste em prestar atenção nos quadrantes ocupados pela figura após a translação (ver Nota 4).

Exemplo 9 Calcule $I_{s'}$, $I_{t'}$ e $I_{s't'}$ para a seção da figura (medidas em cm).

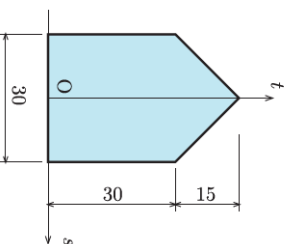


Fig. E9: Translação.

$$I_{s'} = 142\,312,5 \text{ cm}^4, \quad I_{t'} = 75\,937,5 \text{ cm}^4, \quad I_{s't'} = 0.$$

Exemplo 10 Determine o momento centrífugo do triângulo retângulo do Exemplo 6 em relação aos eixos passando por G.

SOLUÇÃO

$$I_{s't'} = I_{st} - sG't_GA = \frac{b^2h^2}{24} - \frac{b}{3} \frac{h}{3} \frac{h}{2} = \frac{3-4}{72} b^2h^2 \quad \Rightarrow$$

$$I_{s't'} = -\frac{b^2h^2}{72}.$$

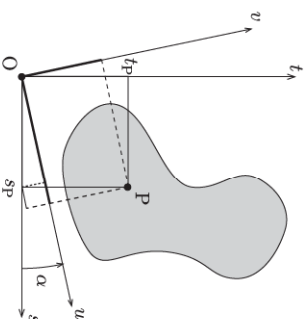


Fig. 5: Rotação de eixos.

2.2 Rotação de Eixos

Com base na Fig. 5, podemos deduzir as relações entre as coordenadas nos sistemas Ouv e Ost ,

$$\begin{aligned} u &= s \cos \alpha + t \sin \alpha \\ v &= -s \sin \alpha + t \cos \alpha, \end{aligned} \quad (11)$$

em que o ângulo α é medido no sentido anti-horário a partir do eixo s . Introduzindo a Eq. (11)₂ na expressão do momento de inércia em relação ao eixo u ,

$$I_u =$$

$$\begin{aligned} \text{sen } 2\alpha &= 2 \text{sen } \alpha \cos \alpha, & \text{sen}^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha, & \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}. \end{aligned}$$

E lembrando que,

Tem-se,

$$I_u = \frac{I_s + I_t}{2} + \frac{I_s - I_t}{2} \cos 2\alpha - I_{st} \text{sen } 2\alpha. \quad (12)$$

Introduzindo o ângulo $\alpha + \frac{\pi}{2}$ na Eq. (12), obtém-se a expressão para o eixo v ,

$$I_v = \frac{I_s + I_t}{2} - \frac{I_s - I_t}{2} \cos 2\alpha + I_{st} \text{sen } 2\alpha. \quad (13)$$

Note que a soma dos momentos de inércia em relação a um par de eixos perpendiculares é constante,

$$I_u + I_v = I_s + I_t = I_p.$$

Substituindo os valores de u e v dados pela Eq. 11 na expressão do momento centrífugo de inércia, tem-se

$$I_{uv} =$$

ou,

$$I_{uv} = \frac{I_s - I_t}{2} \text{sen } 2\alpha + I_{st} \cos 2\alpha. \quad (14)$$

Exemplo 11 Determine os valores de I_u , I_v e I_{uv} para os eixos indicados na figura a partir dos momentos de inércia em relação aos eixos s e t (medidas em cm).

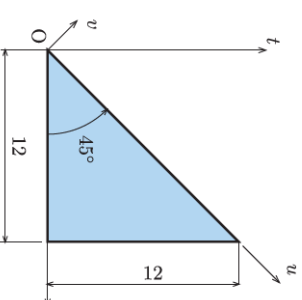


Fig. E 11: Triângulo isósceles.

$$I_u = 864 \text{ cm}^4, \quad I_v = 6048 \text{ cm}^4, \quad I_{uv} = -1728 \text{ cm}^4.$$

3 Momentos Principais e Momentos Centrais de Inércia

Fixado um ponto Q, deseja-se determinar os momentos de inércia axiais extremos (máximo e mínimo) em relação a eixos passando por esse ponto.

Recordando a Eq. (12),

$$I_u(\alpha) = \frac{I_s + I_t}{2} + \frac{I_s - I_t}{2} \cos 2\alpha - I_{st} \sin 2\alpha,$$

tem-se

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = -(I_s - I_t) \sin 2\alpha - 2I_{st} \cos 2\alpha = 0. \quad (15)$$

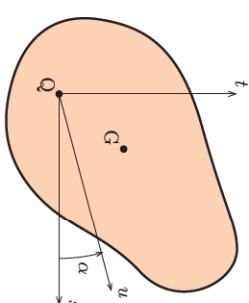


Fig. 6: Pesquisa dos extremos de I_u .

resultando a condição

$$\tan 2\alpha = \frac{-2I_{st}}{I_s - I_t}, \quad (16)$$

cujas soluções fornece as direções de dois eixos perpendiculares denominados *eixos principais de inércia*. Substituindo na expressão de $I_u(\alpha)$, e levando em consideração que

$$\cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}}, \quad \sin 2\alpha = \pm \frac{\tan 2\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha}},$$

obtem-se os *momentos principais de inércia*,

$$\begin{cases} I_{\max} \\ I_{\min} \end{cases} = \frac{I_s + I_t}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_s - I_t}{2}\right)^2 + I_{st}^2} \quad (17)$$

No caso particular em que a origem dos eixos coincide com G, os momentos de inércia são chamados de *centrais-principais* ou simplesmente *centrais*², e os eixos correspondentes, de *eixos centrais de inércia*.

$$\begin{cases} I_1 \\ I_2 \end{cases} = \frac{I_s + I_t}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_s - I_t}{2}\right)^2 + I_{st}^2}, \quad \text{com } I_1 \geq I_2. \quad (18)$$

sendo,

$$\tan \alpha_1 = \frac{I_s - I_1}{I_{st}}, \quad \tan \alpha_2 = \frac{I_s - I_2}{I_{st}}. \quad (19)$$

²Em [1, p. 88], Telemaco van Langendonck adota momento central, nomenclatura que será usada neste texto.

Os eixos principais são perpendiculares, o que pode ser demonstrado examinando a Eq. (16),

$$\tan 2\alpha = \frac{-2I_{st}}{I_s - I_t},$$

cujas soluções tem a forma $2\alpha + \pi$. Dividindo por dois, obtêm-se a periodicidade expressa em termos do ângulo α : $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Uma propriedade importante é o fato do momento centrífugo ser nulo em relação aos eixos centrais. O exame das Eqs. (15) e (14) fornece

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = -2I_{uv} \quad \Rightarrow \quad I_{uv} = 0.$$

A propriedade é válida nos dois sentidos, portanto eixos perpendiculares passando por G e com momento centrífugo de inércia nulo são eixos centrais.

Propriedades dos Momentos de Inércia

É interessante reunir algumas das propriedades dos momentos de inércia.

1. Os eixos principais são perpendiculares.
2. A condição necessária e suficiente para que um par de eixos passando por G seja central é que I_{uv} seja nulo.

$$\text{Eixos centrais} \iff I_{uv} = 0.$$

3. I_{uv} é nulo em relação a um eixo de simetria. Portanto, todo eixo de simetria é um eixo central. O outro eixo central é perpendicular ao de simetria e passa por G.

$$u \text{ é eixo de simetria} \quad \Rightarrow \quad u \text{ é eixo central.}$$

4. A soma dos momentos axiais de inércia em relação a qualquer par de eixos perpendiculares no plano da figura é constante.

$$I_s + I_t = I_u + I_v = I_1 + I_2.$$

5. Para as figuras planas com mais de um eixo de simetria e $I_{s'} = I_{t'}$ (Δ , \square etc.), todos os momentos centrais de inércia são iguais e todos os eixos passando por G são eixos centrais de inércia.

Exemplo 12 Para a seção transversal ao lado, determine:

- a) a posição do centro de gravidade G;
- os momentos de inércia e o momento centrífugo em relação aos eixos s e t ;
- os momentos principais de inércia em relação a eixos principais passando pela origem O do sistema de coordenadas;
- os momentos e os eixos centrais de inércia da seção.

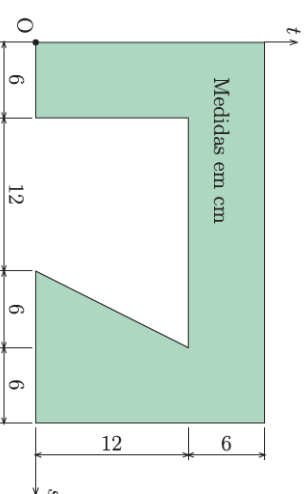


Fig. E12: Seção transversal.

SOLUÇÃO A resolução faz uso da decomposição indicada na Fig. E12-1.

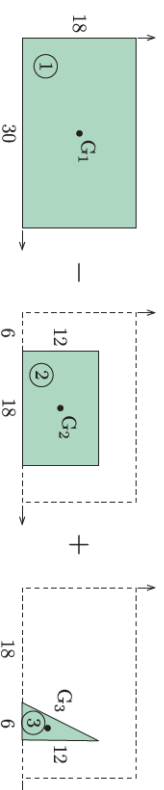


Fig. E12-1: Decomposição da seção.

- a) Posição do centro de gravidade

$$A_1(15, 9) = 30 \times 18 = 540 \quad A = A_1 - A_2 + A_3 = 360 \text{ cm}^2$$

$$A_2(15, 6) = 18 \times 12 = 216 \quad s_G = \frac{\sum A_i s_i}{A} = \frac{540 \times 15 - 216 \times 15 + 36 \times 22}{360} = 15,7 \text{ cm}$$

$$A_3(22, 4) = \frac{6 \times 12}{2} = 36 \quad t_G = \frac{\sum A_i t_i}{A} = \frac{540 \times 9 - 216 \times 6 + 36 \times 4}{360} = 10,3 \text{ cm}$$

As coordenadas do centro de gravidade são $G(15,7; 10,3)$.

- b) Momentos de inércia e momento centrífugo em relação ao sistema Ost

As fórmulas do momento de inércia encontram-se na Fig. 7. Adotando os eixos indicados nas

figuras, temos

$$\begin{aligned}
 I_s &= \text{[Diagrama 1]} - \text{[Diagrama 2]} + \text{[Diagrama 3]} \\
 &= \frac{30 \times 18^3}{3} - \frac{18 \times 12^3}{3} + \frac{6 \times 12^3}{12} \\
 &= 58\,320 - 10\,368 + 864 = 48\,816 \text{ cm}^4 \\
 I_t &= \text{[Diagrama 4]} - \text{[Diagrama 5]} + \text{[Diagrama 6]} \\
 &= \frac{18 \times 30^3}{3} - \left(\frac{12 \times 18^3}{12} + 216 \times 15^2 \right) + \left(\frac{12 \times 6^3}{36} + 36 \times 22^2 \right) \\
 &= 162\,000 - 54\,432 + 17\,496 = 125\,064 \text{ cm}^4 \\
 I_{st} &= \text{[Diagrama 7]} - \text{[Diagrama 8]} + \text{[Diagrama 9]} \\
 &= (0 + 540 \times 15 \times 9) - (0 + 216 \times 15 \times 6) + \left(\frac{6^2 \times 12^2}{72} + 36 \times 22 \times 4 \right) \\
 &= 72\,900 - 19\,440 + 3\,240 = 56\,700 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

c) Eixos principais de inércia passando por O

A Eq. (17) fornece os momentos principais de inércia,

$$\begin{cases} I_{\max} \\ I_{\min} \end{cases} = \frac{48\,816 + 125\,064}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{48\,816 - 125\,064}{2} \right)^2 + 56\,700^2} = 86\,940 \pm 68\,325,17$$

Logo,

$$I_{\max} = 155\,265,17 \text{ cm}^4, \quad I_{\min} = 18\,614,83 \text{ cm}^4.$$

Expressões análogas à Eq. (19) fornecem os ângulos dos eixos principais em relação ao eixo s,

$$\tan \alpha_{\max} = \frac{I_s - I_{\max}}{I_{st}} = -1,877 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\max} = -61,96^\circ$$

$$\tan \alpha_{\min} = \frac{I_s - I_{\min}}{I_{st}} = 0,5326 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\min} = 28,04^\circ$$

d) Momentos e eixos centrais de inércia

As Eqs. (8) a (10) levam aos momentos de inércia em relação ao sistema $O s' t'$

$$I_{s'} = I_s - A t_G^2 = 48\,816 - 360 \times 10,3^2 = 10\,623,6 \text{ cm}^4$$

$$I_{t'} = I_t - A s_G^2 = 125\,064 - 360 \times 15,7^2 = 36\,327,6 \text{ cm}^4$$

$$I_{s't'} = I_{st} - A s_G t_G = 56\,700 - 360 \times 15,7 \times 10,3 = -1\,515,6 \text{ cm}^4$$

A Eq. (18) fornece os momentos centrais de inércia,

$$\begin{cases} I_1 \\ I_2 \end{cases} = \frac{10\,623,6 + 36\,327,6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10\,623,6 - 36\,327,6}{2} \right)^2 + (-1\,515,6)^2} = 23\,475,6 \pm 12\,941,1.$$

Portanto,

$$I_1 = 36\,416,7 \text{ cm}^4, \quad I_2 = 10\,534,5 \text{ cm}^4.$$

Enquanto a Eq. (19) fornece os ângulos dos eixos centrais,

$$\tan \alpha_1 = \frac{I_{s'} - I_1}{I_{s't'}} = 17,02 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 86,6^\circ$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{I_{s'} - I_2}{I_{s't'}} = -0,0588 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -3,36^\circ$$

O centro de gravidade e os eixos obtidos estão indicadas na figura abaixo.

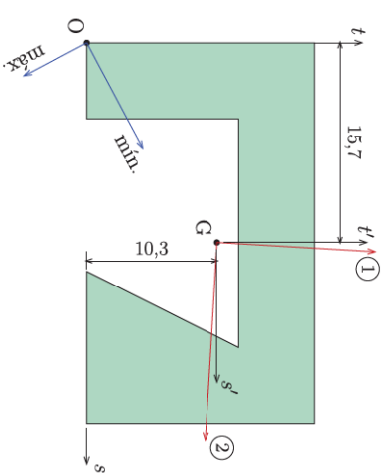


Fig. E12-1: Eixos centrais de inércia.

4 Problemas

Formulário

A Fig. 7 condensa a maior parte das fórmulas deduzidas neste capítulo.

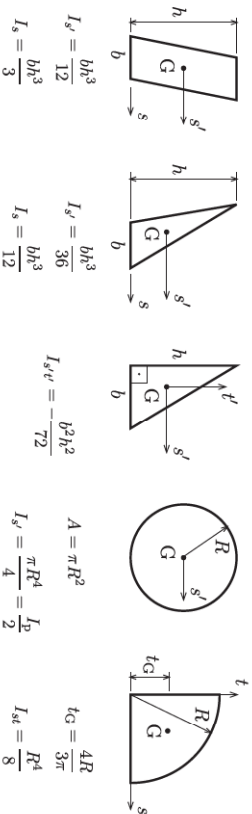


Fig. 7: Fórmulas usuais.

Problema 1 Para as seções de mesma área e altura indicadas na Fig. 8, determine a posição do centro de gravidade, os momentos centrais de inércia e as direções dos respectivos eixos.

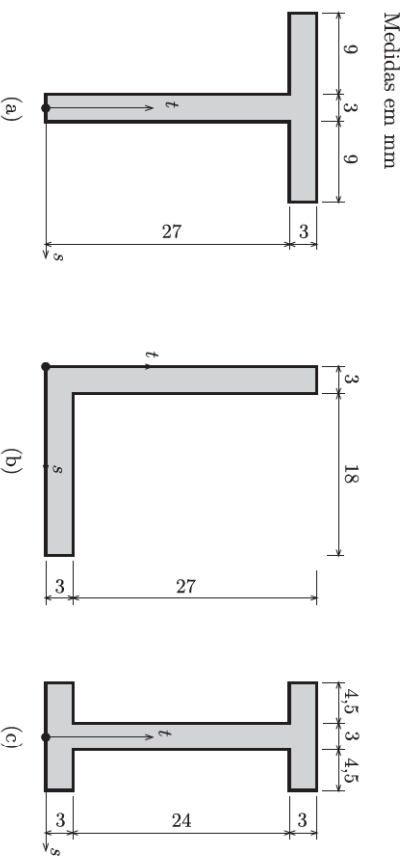


Fig. 8: Problema 1.

Problema 2 Determine a posição do centro de gravidade, as direções dos eixos centrais e os momentos centrais de inércia para as seções indicadas na Fig. 9.

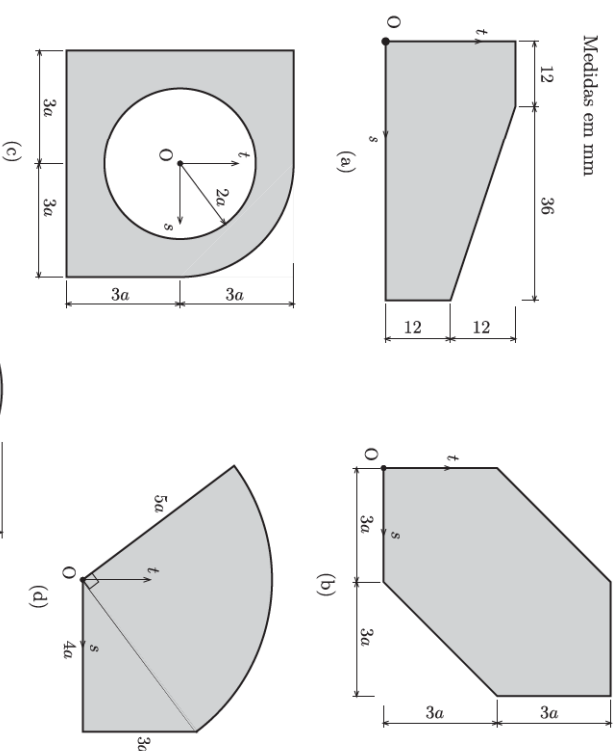


Fig. 9: Problema 2.

Problema 3 Determine a posição do centro de gravidade, as direções dos eixos centrais e os momentos centrais de inércia para a seção transversal da figura. As medidas na horizontal referem-se a pontos situados na linha média da parede da ST.

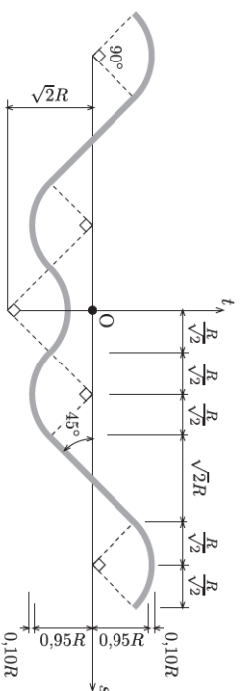
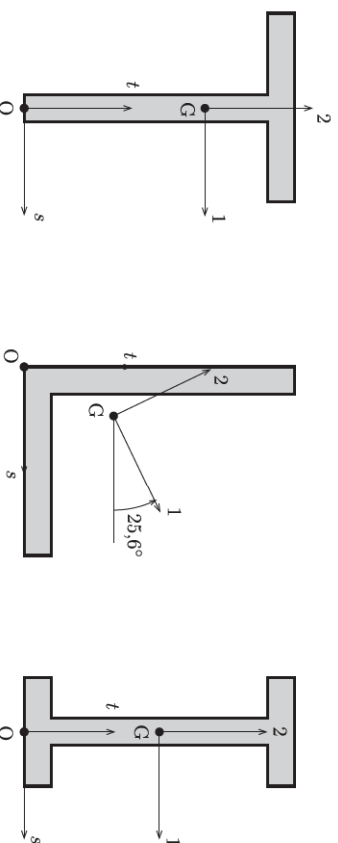


Fig. 10: Problema 3.

Respostas

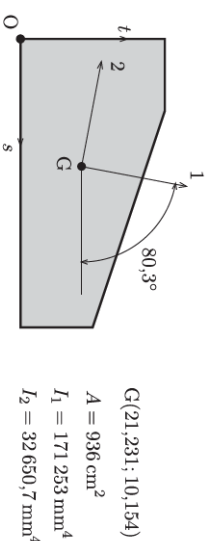


G(0; 20,0625)
 $A = 144 \text{ mm}^2$
 $I_1 = 12\,941,4 \text{ mm}^4$
 $I_2 = 2\,376,0 \text{ mm}^4$

G(5,4375; 9,9375)
 $A = 144 \text{ mm}^2$
 $I_1 = 15\,233,2 \text{ mm}^4$
 $I_2 = 2\,954,7 \text{ mm}^4$

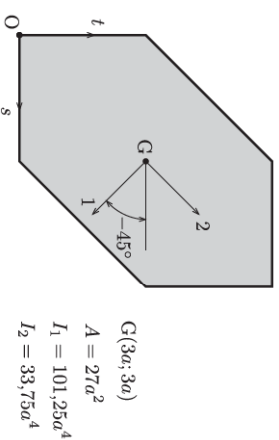
G(0; 15,0000)
 $A = 144 \text{ mm}^2$
 $I_1 = 16\,632,0 \text{ mm}^4$
 $I_2 = 918,0 \text{ mm}^4$

Fig. 11: Respostas do problema 1.



G(21,231; 10,154)
 $A = 936 \text{ cm}^2$
 $I_1 = 171\,253 \text{ mm}^4$
 $I_2 = 32\,650,7 \text{ mm}^4$

Fig. 12: Respostas do problema 2-a.



G(3a; 3a)
 $A = 27a^2$
 $I_1 = 101,25a^4$
 $I_2 = 33,75a^4$

Fig. 13: Respostas do problema 2-b.

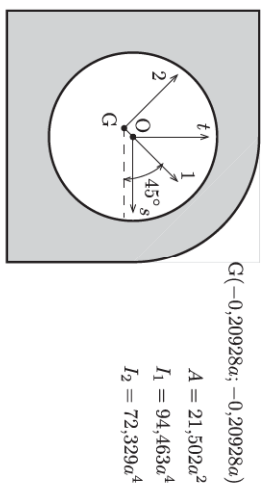


Fig. 14: Respostas do problema 2-c.

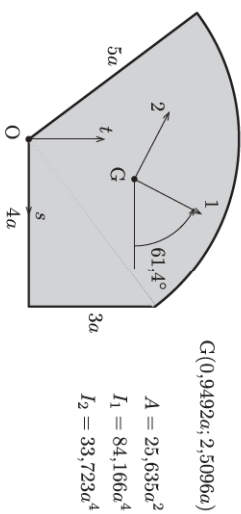


Fig. 15: Respostas do problema 2-d.

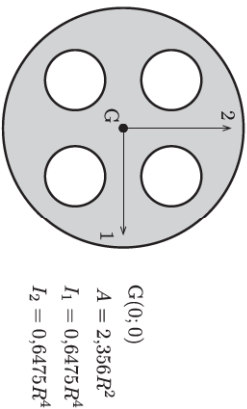


Fig. 16: Respostas do problema 2-e.

Referências

[1] van Langendonck, Telemaco. *Resistência dos Materiais: Tensões*. Edgard Blücher LTDA., São Paulo, 1971.

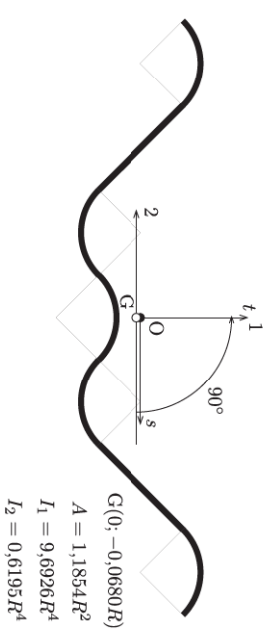


Fig. 17: Respostas do problema 3.

Index

- área, 2
- centro de gravidade, 2
 - centro de gravidade, 2
 - momento axial de inércia, 5
 - momento centrífugo, 6
- círculo
 - momento axial de inércia, 7
 - momento polar de inércia, 7
- decomposição algébrica, 3
- eixo
 - central de inércia, 13
 - principal de inércia, 13
- momento
 - axial de inércia, 5
 - central de inércia, 13
 - central-principal de inércia, 13
 - centrífugo de inércia, 6
 - de inércia, 4
 - propriedades, 13
 - de primeira ordem, 2
 - de segunda ordem, 4
 - estático, 2
 - polar de inércia, 7
 - principal de inércia, 13
 - produto de inércia, 6
- raio de giração, 8
- retângulo
 - momento axial de inércia, 5
- setor circular
 - centro de gravidade, 4
- triângulo