

1 Estruturas com Deformação Axial

Exemplo 1 Calcule o deslocamento do nó B da treliça ao lado. Admita $EA = \text{const.}$ para todas as barras.

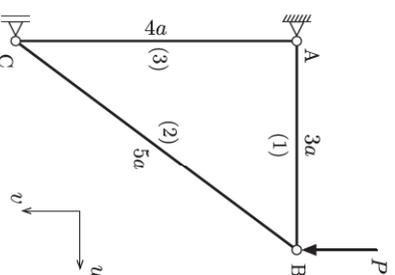


Fig. E 1: Treliça

SOLUÇÃO

a) Reações

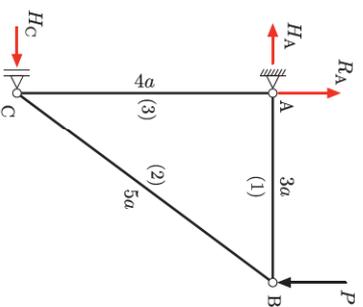


Fig. E 1-i: Reações de apoio.

$$\begin{aligned} \uparrow \{ R_A = P, \\ \curvearrowleft \{ P \times 3a - H_C \times 4a = 0 \Rightarrow H_C = \frac{3P}{4}; \\ \rightarrow \{-H_A + H_C = 0 \Rightarrow H_A = \frac{3P}{4}. \end{aligned}$$

b) Forças normais

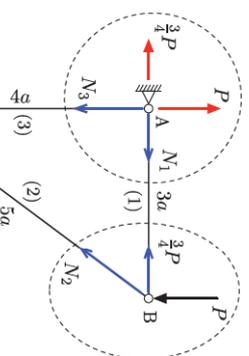


Fig. E 1-ii: Forças normais.

$$\begin{aligned} \text{Nó A} \quad N_1 = \frac{3P}{4}, \quad N_3 = P; \\ \text{Nó B} \quad \uparrow \left\{ P + \frac{4}{5}N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -\frac{5P}{4}; \end{aligned}$$

(verif.)

$$\rightarrow \left\{ N_2 \times \frac{3}{5} + \frac{3P}{4} = -\frac{5P}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{3P}{4} = 0. \right.$$

c) Alongamento das barras $\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EA}$

$$\Delta l_1 = \frac{\frac{3P}{4} \times 3a}{EA} = \frac{9Pa}{4EA} = 9\beta \text{ (alonga);}$$

$$\Delta l_2 = \frac{-\frac{5P}{4} \times 5a}{EA} = -\frac{25Pa}{4EA} = -25\beta \text{ (encurta);}$$

$$\Delta l_3 = \frac{P \times 4a}{EA} = \frac{4Pa}{EA} = 16\beta \text{ (alonga).}$$

d) Deslocamento do ponto B

A Fig. E 1-iii ilustra a construção gráfica para obter a configuração deformada da treliça. A construção considera o nó B separado em B_1 e B_2 ligados às barras 1 e 2; e tem início no apoio fixo A. Assim, a extremidade B_1 da barra 1, em decorrência de Δl_1 , move-se para B'_1 e depois descreve um arco que pode ser aproximado pela reta r_1 normal à barra no ponto B'_1 . A extremidade C da barra 3, em decorrência de Δl_3 , desloca-se para C' satisfazendo a restrição do apoio simples, e leva junto a barra 2 que passa a ocupar a posição paralela $C'B'_2$. A extremidade B_2 da barra 2, em decorrência de Δl_2 , move-se para B'_2 e depois descreve o arco aproximado pela reta r_2 . A posição final B' do ponto B, que é comum às barras 1 e 2, encontra-se na intersecção das retas r_1 e r_2 . Os três pontos A, B' e C' determinam a configuração deformada da treliça.

Um esquema ressaltando as posições intermediárias dos pontos B_1 e B_2 encontra-se no

canto inferior da Fig. E 1-iii. A partir desse esquema, é possível deduzir as expressões das componentes de deslocamento do nó B.

$$\begin{aligned} u_B = \Delta l_1 = 9\beta = \frac{9Pa}{4EA} \quad (\rightarrow); \\ v_B = 16\beta + 25\beta \sin \alpha + \frac{25\beta \cos \alpha + 9\beta}{\tan \alpha} \\ = 16\beta + 25\beta \times \frac{4}{5} + \left(25\beta \times \frac{3}{5} + 9\beta \right) \div \frac{4}{3} \\ = 16\beta + 20\beta + (15\beta + 9\beta) \frac{3}{4} \\ = 54\beta = \frac{27Pa}{2EA} \quad (1). \end{aligned}$$

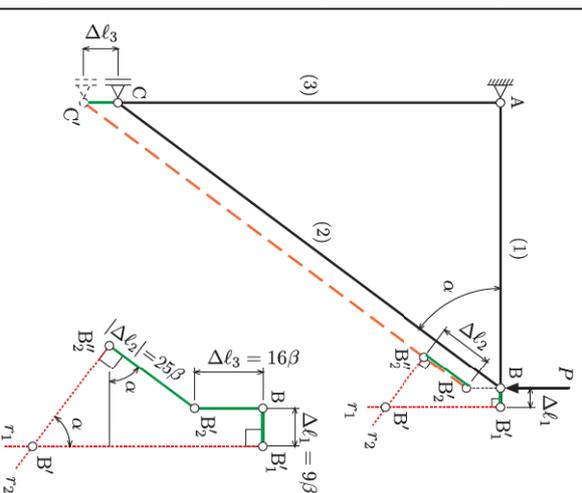


Fig. E 1-iii: Deslocamentos dos nós.

Nota 1 A obtenção gráfica dos deslocamentos de todos os nós da treliça pode ser feita em um único diagrama denominado *diagrama de Williot*. Nele, os alongamentos são representados nas direções originais das barras — as quais são omitidas do diagrama, e as rotações são indicadas por retas normais aos alongamentos, como mostra a Fig. 1.

Nota 2 As relações que fornecem os deslocamentos a partir dos alongamentos das barras

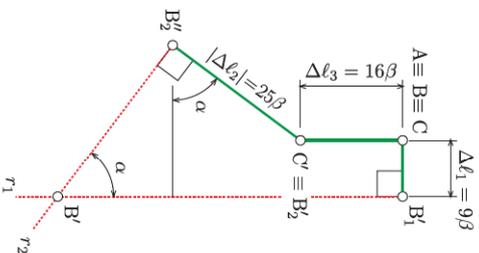


Fig. 1: Diagrama de Williot.

podem ser deduzidas sem o cálculo das forças normais adotando alongamentos arbitrários Δl_1 , Δl_2 e Δl_3 nas direções das respectivas barras como indica a Fig. 2 na qual os alongamentos foram admitidos todos positivos.

$$u_B = \Delta l_1;$$

$$\begin{aligned} v_B &= \Delta l_3 - \Delta l_2 \cos(90^\circ - \alpha) + \frac{a}{\tan \alpha} \\ &= \Delta l_3 - \Delta l_2 \sin \alpha + \frac{\Delta l_1 - \Delta l_2 \cos \alpha}{\tan \alpha} \\ &= \Delta l_3 - \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha} + \frac{\Delta l_1}{\tan \alpha}. \end{aligned}$$

Em virtude da hipótese de linearidade geométrica, em particular da substituição dos arcos pelas tangentes, os sinais dos alongamentos não afetam as relações deduzidas, embora, obviamente, alterem a posição final do ponto B no diagrama.

Nota 3 A hipótese de linearidade geométrica também torna possível separar os efeitos dos alongamentos de cada barra. Como ilustra a Fig. 3, a separação gera três configurações deformadas da estrutura nas quais as relações trigonométricas entre os deslocamentos e os

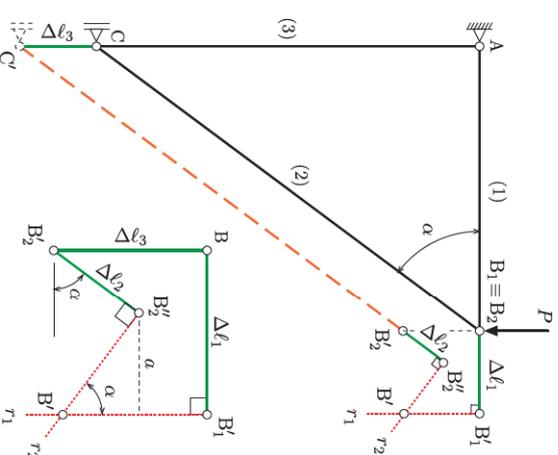


Fig. 2: Emprego de valores arbitrários dos alongamentos.

alongamentos são bem mais simples,

$$u_B = u_{B1} = \Delta l_1;$$

$$v_B = v_{B1} + v_{B2} + v_{B3} = \frac{\Delta l_1}{\tan \alpha} - \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha} + \Delta l_3.$$

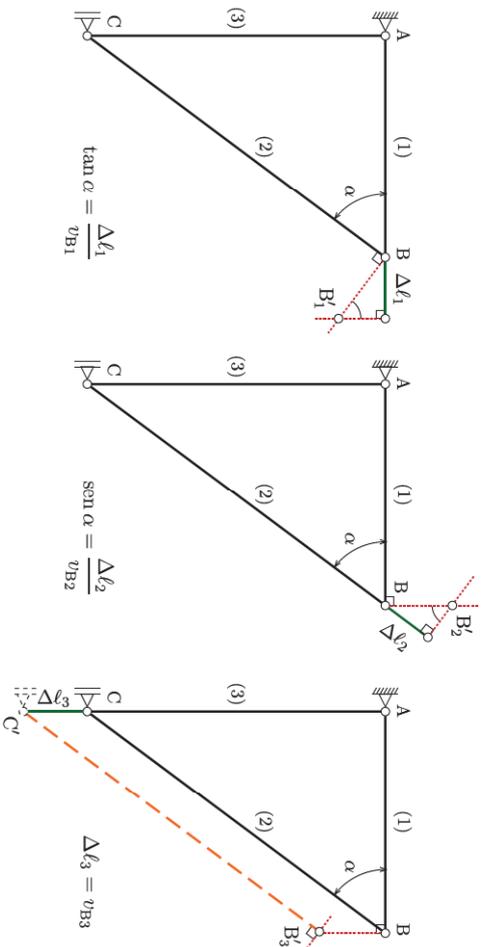


Fig. 3: Separação dos efeitos dos alongamentos.

Problema 1 Calcule o deslocamento do ponto B da treliça ao lado. Admita $EA = \text{const.}$ para todas as barras [Mário].
 R.: $v_B = \frac{Pa}{EA}$ (\rightarrow), $v_B = (2\sqrt{2} + 5) \frac{Pa}{EA}$ (\downarrow).

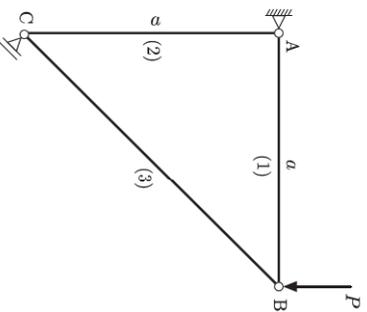


Fig. E.1: Treliça

Exemplo 2 Determine o deslocamento do ponto C e a rotação θ da barra ABC. Considere $EA = \text{const.}$ para as barras flexíveis [Mário].

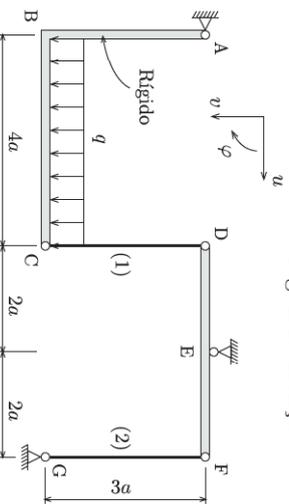


Fig. E.2: Estrutura com trechos rígidos

SOLUÇÃO

a) Forças normais

Isolando os trechos rígidos e substituindo as barras deformáveis pelas respectivas forças normais chegamos à Fig. E-2-i. O equilíbrio de momentos do trecho ABC em relação ao nó A fornece

$$\sum M_A \{ 4qa \times 2a - N_1 \times 4a = 0 \Rightarrow N_1 = 2qa.$$

O equilíbrio de momentos do trecho DEF em relação ao ponto E fornece

$$\sum M_E \{ -2qa \times 2a + N_2 \times 2a = 0 \Rightarrow N_2 = 2qa.$$

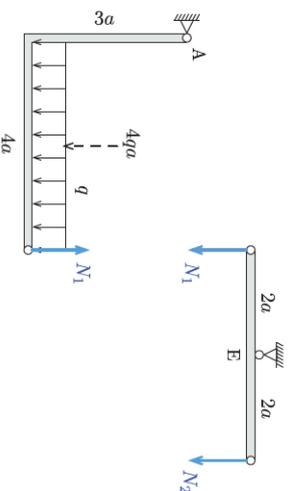


Fig. E-2-i: Forças normais.

b) Alongamento das barras $\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EA}$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{2qa \times 3a}{EA} = \frac{6qa^2}{EA} = 6\beta.$$

c) Deslocamento e rotação pedidos

A obtenção da configuração deformada da estrutura está indicada na Fig. E-2-ii. Ela tem início

Problema 2 Refaça o exemplo anterior considerando os alongamentos Δl_1 e Δl_2 separadamente na resolução.

no apoio fixo G e admite a estrutura cortada em C. A extremidade F da barra 2, em decorrência de $\Delta l_2 = 6\beta$, move-se para F'. A rotação da barra rígida DEF determina a posição D' e provoca a translação vertical da barra 1 que passa a ocupar o segmento D'C'. A extremidade inferior da barra 1, em decorrência de $\Delta l_1 = 6\beta$, desloca-se para C'' e depois descreve o arco aproximado pela reta r1. O arco descrito pela extremidade do trecho rígido ABC pode ser aproximado por uma reta r2 normal à hipotenusa AC no ponto C. A posição C' procurada encontra-se na interseção das retas r1 e r2.

$$u_C = -9\beta = -\frac{9qa^2}{EA} \quad (\leftarrow)$$

$$v_C = 12\beta = \frac{12qa^2}{EA} \quad (\uparrow)$$

$$\theta = \frac{12\beta}{\cos \alpha} = \frac{15\beta}{5a} = \frac{3qa}{EA} \quad (\sim)$$

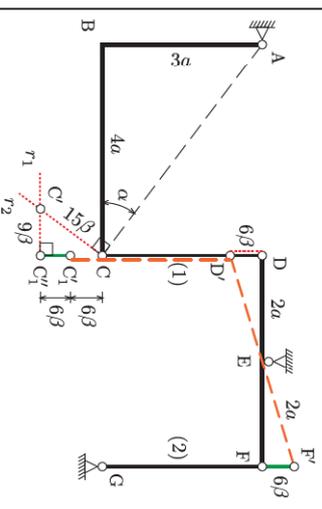


Fig. E-2-ii: Deslocamentos dos nós.

Exemplo 3 Determine o deslocamento do ponto B. Considere $E A = \text{const.}$ para as barras flexíveis.

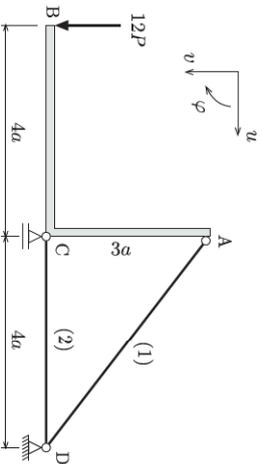


Fig. E-3: Estrutura com trecho rígido BCA.

SOLUÇÃO

a) Forças normais

As forças normais são obtidas isolando-se o trecho rígido BCA, como mostrado na Fig. E-3-i.

$$\begin{cases} \frac{4}{5} N_1 \times 3a - 12P \times 4a = 0 \\ \Rightarrow N_1 = 20P; \\ \frac{4}{5} N_1 + N_2 = 0 \\ \Rightarrow N_2 = -16P; \end{cases}$$

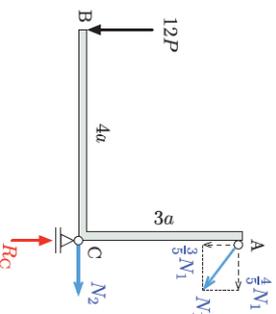


Fig. E-3-i: Forças normais.

b) Alongamento das barras $\Delta \ell_i = \frac{N_i \ell_i}{E A_i}$

$$\begin{aligned} \Delta \ell_1 &= \frac{20P \times 5a}{E A} = 100 \frac{P a}{E A} = 100\beta; \\ \Delta \ell_2 &= \frac{-16P \times 4a}{E A} = -64 \frac{P a}{E A} = -64\beta. \end{aligned}$$

c) Compatibilidade de deslocamentos

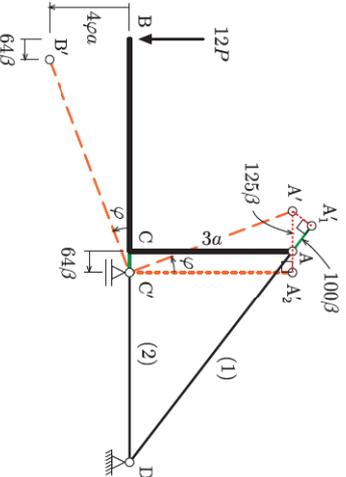


Fig. E-3-ii: Deslocamentos dos nós.

A Fig. E-3-ii ilustra a construção da configuração deformada da estrutura. Partindo do apoio fixo D, o encurtamento $\Delta \ell_2$ define a posição de C' enquanto o alongamento $\Delta \ell_1$, após a divisão do nó A nos pontos A_1 e A_2 , define a posição de A_1' . A translação horizontal da parte rígida, que acompanha o ponto C' , define a posição de A_2' . Finalmente, a rotação de $C'A_2'$ em torno de C' e a rotação da barra 1 em torno do nó D, com os arcos aproximados pelas tangentes, determinam o ponto A' .

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{(125 + 64)\beta}{3a} = 63 \frac{P}{E A} \quad (\curvearrowright); \\ u_B &= \Delta \ell_2 = 64 \frac{P a}{E A} \quad (-); \\ v_B &= \varphi \times 4a = 252 \frac{P a}{E A} \quad (1). \end{aligned}$$

2 Estruturas Hiperestáticas

2.1 Processo dos Esforços

No processo dos esforços, as equações que governam o comportamento da estrutura são resolvidas na seguinte ordem:

$$\boxed{\text{Eqs. de Equilíbrio}} \rightarrow \boxed{\text{Eqs. Constitutivas}} \rightarrow \boxed{\text{Eqs. de Compatibilidade}}$$

Exemplo 4 Determine as forças normais e o deslocamento do ponto B para a barra com $E A = \text{const.}$ da figura.

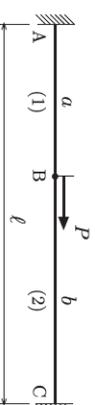


Fig. E-4: Barra hiperestática.

Repare que o cálculo das reações de apoio na Fig. E-4-i já evidencia a indeterminação estática do problema com duas reações incógnitas e uma única equação de equilíbrio.

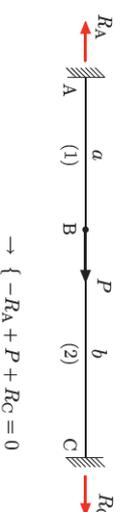


Fig. E-4-i: Indeterminação estática.

Etapas do Processo dos Esforços:

1. Determine o grau de hiperestaticidade (GH) da estrutura

O grau de hiperestaticidade é o número de vínculos redundantes que podem ser eliminados sem que a estrutura se torne hipostática. Como o vínculo esquerdo é suficiente para impedir o movimento de translação horizontal no problema unidimensional, o vínculo direito é considerado redundante ($GH = 1$).

2. Escolha a estrutura isostática fundamental (EIF)

A estrutura isostática fundamental resulta da eliminação de GH vínculos redundantes e da introdução dos esforços incógnitos que seriam mobilizados por esses vínculos. Os esforços incógnitos são denominados *incógnitas hiperestáticas*.

Na Fig. E-4-ii, a força reativa X no apoio esquerdo foi escolhida como incógnita hiperestática.

EIF

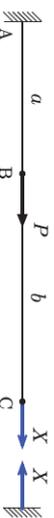


Fig. E-4-ii: EIF e incógnita hiperestática X

3. Calcule os deslocamentos associados aos vínculos eliminados

O deslocamento horizontal u_C está associado ao vínculo direito eliminado,

$$\begin{aligned} u_C &= \Delta \ell_1 + \Delta \ell_2 \\ &= \frac{(P+X)a}{EA} + \frac{Xb}{EA} \\ &= \frac{Pa}{EA} + \frac{X(a+b)}{EA} \\ &= \frac{Pa}{EA} + \frac{X\ell}{EA} \end{aligned}$$

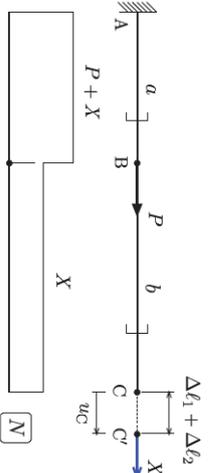


Fig. E-4-iii: Forças normais na EIF.

4. Imponha as equações de compatibilidade

GH equações de compatibilidade associadas aos vínculos eliminados devem ser impostas de modo a restabelecer o comportamento da estrutura hiperestática.

No problema, o vínculo eliminado impede o deslocamento horizontal do ponto C,

$$\boxed{u_C = 0} \quad \Rightarrow \quad \frac{Pa}{EA} + \frac{X\ell}{EA} = 0 \quad \Rightarrow \quad X = -\frac{Pa}{\ell}.$$

5. Calcule os esforços solicitantes

Da Fig. E-4-iii, temos

$$N_1 = P + X = \frac{P(\ell - a)}{\ell} = \frac{Pb}{\ell} \quad (\text{tração}) \quad N_2 = X = -\frac{Pa}{\ell} \quad (\text{compressão})$$

Repare que a reação é proporcional ao comprimento do **lado oposto** ao do apoio no caso de uma barra prismática.

6. Obtenha o deslocamento u_B

Nota 4 Existe sempre uma correspondência entre a incógnita hiperestática e a equação de compatibilidade. Por exemplo, uma força incógnita requer a compatibilidade de deslocamentos no mesmo ponto e direção; e um momento incógnito requer a compatibilidade de rotações em relação ao mesmo eixo.

2.2 Processo dos Deslocamentos

No processo dos deslocamentos, as equações que governam o comportamento da estrutura são resolvidas na seguinte ordem:

$$\boxed{\text{Eqs. de Compatibilidade}} \rightarrow \boxed{\text{Eqs. Constitutivas}} \rightarrow \boxed{\text{Eqs. de Equilíbrio}}$$

Exemplo 5 Refaça o exemplo anterior empregando o processo dos deslocamentos.

Etapas do Processo dos Deslocamentos:

1. Determine o número de graus de liberdade (nGL) da estrutura

O número dos deslocamentos independentes que determinam o movimento da estrutura é denominado *número de graus de liberdade*. Os deslocamentos independentes são as incógnitas do processo dos deslocamentos.

Uma vez conhecido o deslocamento u do ponto B na Fig. E-5-i, ficam determinados os deslocamentos das extremidades dos trechos da barra e, consequentemente, de todos os pontos da barra.

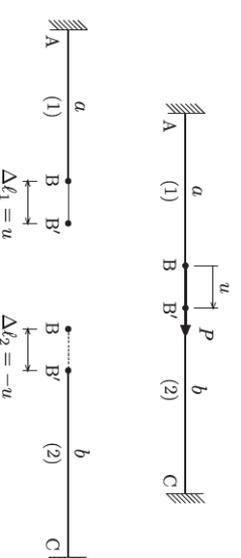


Fig. E-5-i: Grau de liberdade u .

2. Escreva as equações de compatibilidade em função dos graus de liberdade

Os alongamentos das barras são expressos em função dos graus de liberdade de acordo com a Fig. E-5-i,

$$\Delta l_1 = u,$$

$$\Delta l_2 = -u.$$

3. Escreva as equações constitutivas

As forças normais nas barras são expressas em função dos graus de liberdade empregando as equações constitutivas,

$$N_1 = EA \frac{\Delta l_1}{l_1} = EA \frac{u}{a},$$

$$N_2 = EA \frac{\Delta l_2}{l_2} = -EA \frac{u}{b}.$$

4. Imponha as equações de equilíbrio

nGL equações de equilíbrio associadas a cada grau de liberdade são necessárias para resolver o problema,

$$\rightarrow \left\{ - \left(EA \frac{u}{a} \right) + P + \left(-EA \frac{u}{b} \right) = 0 \right.$$

$$EA \left(\frac{a+b}{ab} \right) u = P \Rightarrow u = \frac{Pab}{\ell EA}.$$

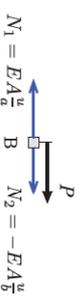


Fig. E-5-ii: Equilíbrio do nó B.

5. Obtenha os esforços solicitantes e alongamentos

Empregando as equações deduzidas acima, obtemos

$$N_1 = EA \frac{u}{a} = \frac{Pb}{\ell} \quad (\text{tração}),$$

$$N_2 = -EA \frac{u}{b} = -\frac{Pa}{\ell} \quad (\text{compressão}),$$

$$\Delta l_1 = u = \frac{Pab}{\ell EA},$$

$$\Delta l_2 = -u = -\frac{Pab}{\ell EA}.$$

Nota 5 Existe sempre uma correspondência entre o grau de liberdade e a equação de equilíbrio. Por exemplo, um deslocamento incógnito requer o equilíbrio de forças na mesma direção e ponto de aplicação; e uma rotação incógnita requer o equilíbrio de momentos em relação ao mesmo eixo de rotação.

2.3 Exemplos

Exemplo 6 Empregando os dois processos de resolução, obtenha o deslocamento do ponto D e as forças normais nas barras da treliça ao lado. Admita $EA = \text{const.}$ para todas as barras.

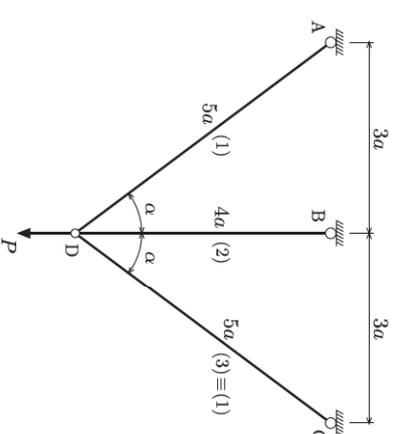


Fig. E-6: Treliça simétrica.

SOLUÇÃO

A. Processo dos Deslocamentos

Embora a treliça possua $n_{GL} = 2$, apenas o deslocamento vertical v é diferente de zero por causa da simetria, como mostrado na Fig. E-6-i,

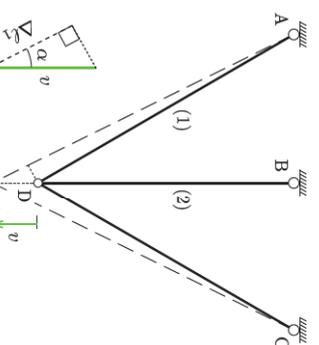


Fig. E-6-i: Grau de liberdade v e compatibilidade para a barra 1.

Equações de compatibilidade

Podemos admitir que a barra 1 sofra uma rotação seguida do alongamento Δl_1 , conforme a Fig. E-6-i, ou vice-versa, conforme a Fig. E-6-ii; as relações não se alteram em decorrência da hipótese de pe-

quenas rotações,

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = v \cos \alpha = \frac{4}{5} v;$$

$$\Delta l_2 = v.$$

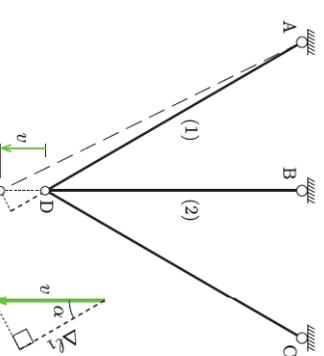


Fig. E-6-ii: Compatibilidade alternativa.

Equações constitutivas

$$N_1 = N_3 = EA \frac{\Delta l_1}{l_1} = EA \frac{4}{5} \frac{v}{5a} = \frac{4}{25} \frac{EA}{a} v;$$

$$N_2 = EA \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{EA}{4a} v. \quad (\text{a})$$

Equação de equilíbrio

O deslocamento v está associado ao equilíbrio das forças verticais do nó D,

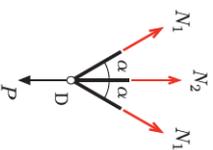


Fig. E-6-iii: Equilíbrio do nó D.

$$\uparrow \left\{ 2N_1 \frac{4}{5} + N_2 = P \Rightarrow \frac{8}{5}N_1 + N_2 = P. \right.$$

Introduzindo as Eqs. (a) na equação acima, temos

$$\left(\frac{32}{125} + \frac{1}{4} \right) \frac{EA}{a} v = P \Rightarrow \frac{253 EA}{500 a} v = P \Rightarrow v = \frac{500 Pa}{253 EA} \quad (1).$$

Resultados

As forças normais são obtidas substituindo a expressão de v nas Eqs. (a),

$$N_1 = N_3 = \frac{4}{25} \times \frac{500}{253} P = \frac{80}{253} P \quad (\text{tração});$$

$$N_2 = \frac{1}{4} \times \frac{500}{253} P = \frac{125}{253} P \quad (\text{tração}).$$

E o deslocamento do nó D é o próprio deslocamento vertical v ,

$$v_D = \frac{500 Pa}{253 EA} \quad (1).$$

B. Processo dos Esforços

A treliça tem $GH = 1$. Na Fig. E-6-iii, o vínculo interno correspondente à ligação axial da barra 2 ao nó D foi substituído pela incógnita hiperestática X para chegarmos à EIF. Assim a equação de compatibilidade do problema é

$$v_{D_1} = v_{D_2}. \quad (b)$$

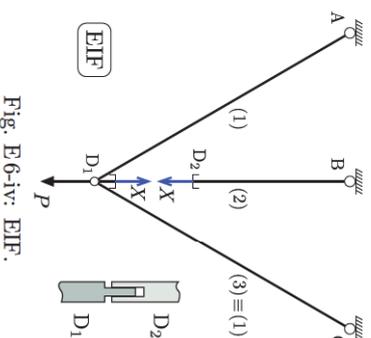


Fig. E-6-iv: EIF.

Equação de equilíbrio

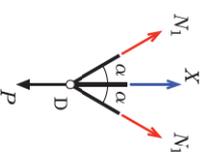


Fig. E-6-v: Equilíbrio do nó D.

O equilíbrio vertical do nó D nas duas partes da EIF fornece,

$$\uparrow \{ N_2 = X;$$

$$\uparrow \left\{ 2N_1 \frac{4}{5} + X = P \Rightarrow N_1 = \frac{5}{8} (P - X). \right. \quad (c)$$

Equações constitutivas

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \ell_1}{EA} = \frac{5(P-X)5a}{8 EA} = \frac{25 (P - X)a}{8 EA};$$

$$\Delta \ell_2 = \frac{N_2 \ell_2}{EA} = \frac{4Xa}{EA}.$$

Equação de compatibilidade

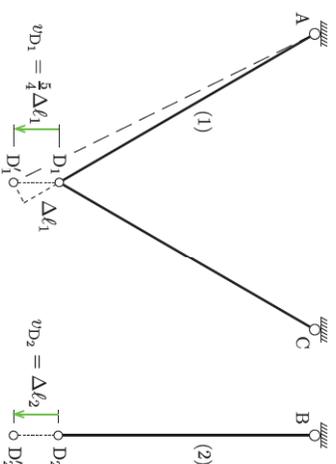


Fig. E-6-vi: Compatibilidade em D.

Eq. (b), temos

$$\frac{5}{4} \Delta \ell_1 = \Delta \ell_2 \Rightarrow \frac{125 (P - X)a}{32 EA} = \frac{4Xa}{EA} \Rightarrow \frac{128 + 125}{32} X = \frac{125}{32} P \Rightarrow X = \frac{125}{32} P.$$

Resultados

As forças normais são obtidas substituindo X nas Eqs. (c),

$$N_1 = N_3 = \frac{5}{8} (P - X) = \frac{80}{253} P \quad (\text{tração});$$

$$N_2 = X = \frac{125}{253} P \quad (\text{tração}).$$

E o deslocamento do nó D pode ser obtido a partir de v_{D_1} ou de v_{D_2} ,

$$v_D = v_{D_2} = \Delta \ell_2 = \frac{4Xa}{EA} = \frac{500 Pa}{253 EA} \quad (1).$$

Inserindo as relações com os alongamentos das barras indicadas na Fig. E-6-vi na equação

Problema 3 Determine as

forças normais nas barras flexíveis da estrutura da figura [Britto].

R.:

$$N_1 = \frac{300}{1369} P,$$

$$N_2 = -\frac{240}{1369} P,$$

$$N_3 = \frac{1000}{1369} P.$$

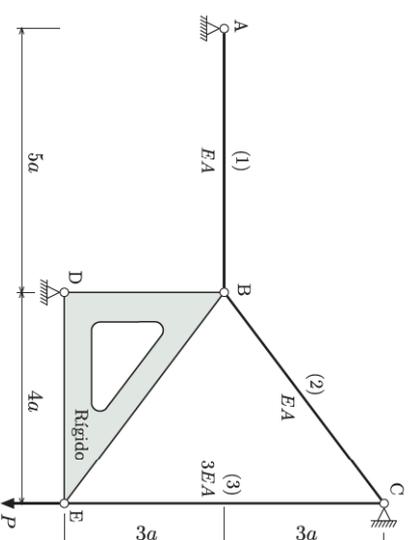


Fig. E-6: Estrutura com peça rígida.

Exemplo 7 As barras da treliça ao lado têm produto de rigidez axial $EA = \text{const.}$ e coeficiente de dilatação térmica α . Determine as forças normais e o deslocamento do ponto A em decorrência de um aumento de temperatura Δt da barra 3.

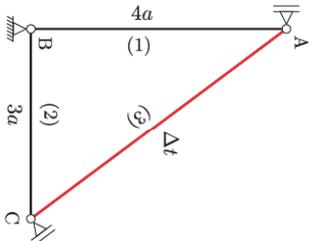


Fig. E 7: Treliça com suporte inclinado em C.

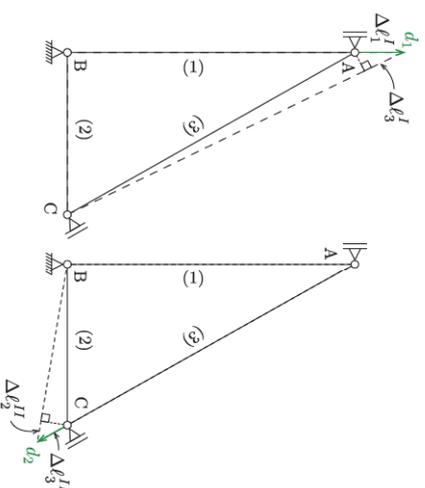


Fig. E7-ii: Compatibilidade.

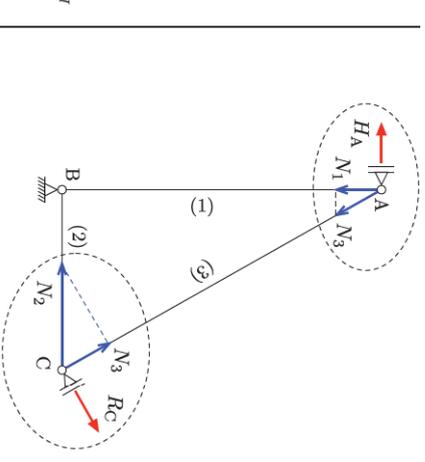


Fig. E7-iii: Equilíbrio.

SOLUÇÃO Para ilustrar os processos de resolução de estruturas hiperestáticas, a treliça será resolvida primeiro pelo processo dos deslocamentos e depois pelo processo dos esforços considerando duas EILF's distintas.

A. Processo dos Deslocamentos

A treliça possui $n_{GL} = 2$ pois os deslocamentos d_1 e d_2 indicados na Fig. E7-i determinam sua configuração deformada.

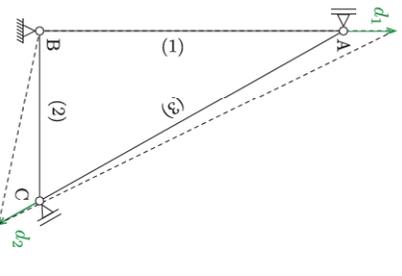


Fig. E 7-i: Graus de liberdade.

Equações de compatibilidade

As relações entre os deslocamentos e os alongamentos nas barras são estabelecidas com base na Fig. E7-ii considerando cada deslocamento sepa-

radamente,

$$\Delta \ell_1^I = d_1,$$

$$\Delta \ell_1^{II} = 0,$$

$$\Delta \ell_2^I = 0,$$

$$\Delta \ell_2^{II} = \frac{3}{5} d_2,$$

$$\Delta \ell_3^I = \frac{4}{5} d_1,$$

$$\Delta \ell_3^{II} = d_2.$$

Repare que a treliça foi desenhada fora de escala para facilitar a distinção entre os catetos do triângulo. Os superscritos *I* e *II* referem-se aos graus de liberdade d_1 e d_2 , respectivamente. As equações de compatibilidade procuradas são obtidas somando-se os alongamentos parciais,

$$\Delta \ell_1 = \Delta \ell_1^I + \Delta \ell_1^{II} = d_1,$$

$$\Delta \ell_2 = \Delta \ell_2^I + \Delta \ell_2^{II} = \frac{3}{5} d_2,$$

$$\Delta \ell_3 = \Delta \ell_3^I + \Delta \ell_3^{II} = \frac{4}{5} d_1 + d_2. \quad (\text{a})$$

Equações constitutivas

O alongamento $\Delta \ell$ de uma barra submetida a uma força normal N e uma variação de temperatura Δt é expresso por

$$\Delta \ell = \frac{N \ell}{EA} + \alpha \ell \Delta t.$$

(b)

Logo,

$$N = \frac{EA}{\ell} \Delta \ell - \alpha \Delta t EA.$$

Lembrando que apenas a barra 3 sofre aumento de temperatura e usando as Eqs. (a), chegamos às seguintes relações:

$$N_1 = \frac{EA}{4a} d_1,$$

$$N_2 = \frac{EA}{3a} \left(\frac{3}{5} d_2 \right) = \frac{EA}{5a} d_2,$$

$$N_3 = \frac{EA}{5a} \left(\frac{4}{5} d_1 + d_2 \right) - \alpha \Delta t EA. \quad (\text{c})$$

Equações de equilíbrio

O equilíbrio dos nós A e C está indicado na Fig. E7-iii. O grau de liberdade d_1 está associado ao equilíbrio de forças na direção vertical em A,

$$\uparrow \left\{ N_1 = -\frac{4}{5} N_3. \right.$$

Substituindo as forças normais usando as Eqs. (c), obtemos

$$\frac{1}{4} \frac{EA d_1}{a} = -\frac{16}{125} \frac{EA d_1}{a} - \frac{4}{25} \frac{EA d_2}{a} + \frac{4}{5} \alpha \Delta t EA \Rightarrow 189 d_1 + 80 d_2 = 400 \alpha a \Delta t. \quad (\text{d})$$

O grau de liberdade d_2 está associado ao equilíbrio de forças na direção da barra 3 em C,

$$\swarrow \left\{ N_3 = -\frac{3}{5} N_2. \right.$$

Substituindo as forças normais, temos

$$\frac{4}{25} \frac{EA d_1}{a} + \frac{1}{5} \frac{EA d_2}{a} - \alpha \Delta t EA = -\frac{3}{25} \frac{EA d_2}{a} \Rightarrow 4 d_1 + 8 d_2 = 25 \alpha a \Delta t. \quad (\text{e})$$

Multiplicando a Eq. (e) por 10 e subtraindo da Eq. (d), temos

$$149 d_1 = 150 \alpha a \Delta t \Rightarrow d_1 = \frac{150}{149} \alpha a \Delta t.$$

E inserindo d_1 na Eq. (e), obtemos

$$600 \alpha \alpha \Delta t + 8d_2 = 25\alpha \alpha \Delta t \Rightarrow d_2 = \frac{3125}{1192} \alpha \alpha \Delta t.$$

Resultados

As forças normais são obtidas substituindo as expressões de d_1 e d_2 nas Eqs. (c),

$$N_1 = \frac{75}{298} \alpha \Delta t E A, \quad N_2 = \frac{625}{1192} \alpha \Delta t E A,$$

$$N_3 = -\frac{375}{1192} \alpha \Delta t E A.$$

E o deslocamento do nó A é o próprio deslocamento vertical d_1 ,

$$v_A = d_1 = \frac{150}{149} \alpha \alpha \Delta t \quad (1).$$

B. Processo dos Esforços EIPF₁

Como a treliça tem $GH = 1$, a EIPF é obtida substituindo um vínculo redundante por uma incógnita hiperestática. Na EIPF₁ da Fig. E-7-iv, o vínculo externo em C foi eliminado e a incógnita X foi introduzida. Portanto, a equação de compatibilidade do processo dos esforços deve restabelecer em C a condição de deslocamento nulo na direção perpendicular à da barra 3.

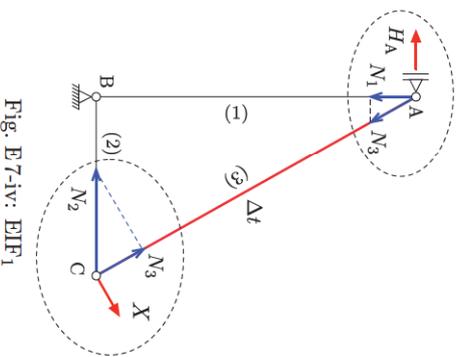


Fig. E-7-iv: EIPF₁

Equações de equilíbrio

meio o nó A', que deve permanecer na mesma vertical de A a uma distância Δl_1 . Depois, determinando-se o nó C' mediante a interseção das barras 3 e 2; a barra 3 translada verticalmente de Δl_1 e gira em torno do ponto A'; a barra 2 deforma-se de Δl_1 e gira em torno B até encontrar a extremidade inferior da barra 3 em C'. Por conveniência foram admitidos sentidos positivos para todos os alongamentos Δl_i .

A equação de compatibilidade que restabelece o comportamento da treliça original é

$$d_C = 0.$$

O detalhe na Fig. Fig. E-7-v ajuda a expressá-la em função dos alongamentos Δl_i ,

$$\begin{aligned} \gamma &= \Delta l_2 - \frac{3}{5} \Delta l_3 \\ d_C &= \frac{3}{5} \Delta l_1 + \frac{5}{4} \gamma = \frac{3}{5} \Delta l_1 + \frac{5}{4} \Delta l_2 - \frac{3}{4} \Delta l_3 \end{aligned}$$

Inserindo as Eqs. (e), obtemos

$$\begin{aligned} d_C &= \left(\frac{36}{25} + \frac{75}{16} + \frac{45}{16} \right) \frac{X a}{E A} - \frac{15}{4} \alpha \Delta t = 0 \\ \Rightarrow \quad X &= \frac{576 + 3000 X a}{400 E A} = \frac{15}{4} \alpha \Delta t \end{aligned}$$

Logo,

$$X = \frac{125}{298} \alpha \Delta t E A.$$

Resultados

As forças normais são obtidas substituindo a variável X nas Eqs. (f),

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{3}{5} \times \frac{125}{298} \alpha \Delta t E A = \frac{75}{298} \alpha \Delta t E A, \\ N_2 &= \frac{5}{4} \times \frac{125}{298} \alpha \Delta t E A = \frac{625}{1292} \alpha \Delta t E A, \\ N_3 &= -\frac{3}{4} \times \frac{125}{298} \alpha \Delta t E A = -\frac{375}{1292} \alpha \Delta t E A. \end{aligned}$$

E o deslocamento do nó A é igual ao alongamento da barra 1,

$$v_A = \Delta l_1 = \frac{12 X a}{5 E A} = \frac{150}{149} \alpha \alpha \Delta t \quad (1).$$

C. Processo dos Esforços EIPF₂

Na EIPF₂ da Fig. E-7-vi, o vínculo interno que corresponde à ligação longitudinal da barra 3 com o nó A foi eliminado e seu efeito substituído pela incógnita hiperestática $N_3 = Y$.

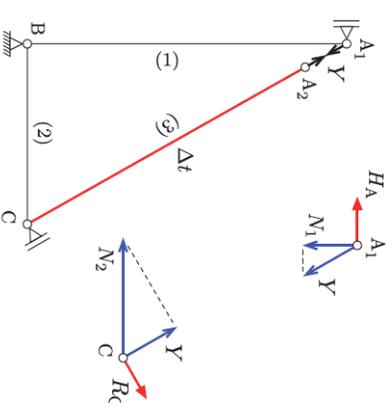


Fig. E-7-vi: EIPF₂

Equações de equilíbrio

Nó A1

$$\uparrow \left\{ N_1 + \frac{4}{5} Y = 0 \Rightarrow N_1 = -\frac{4}{5} Y. \right.$$

Nó C

$$\uparrow \left\{ Y + \frac{3}{5} N_2 = 0 \Rightarrow N_2 = -\frac{5}{3} Y. \right.$$

Equações constitutivas

Empregando a Eq. (b), chegamos a

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{-\frac{4}{5} Y (4a)}{E A} = -\frac{16 Y a}{5 E A}, \\ \Delta l_2 &= \frac{-\frac{5}{3} Y (3a)}{E A} = -\frac{5 Y a}{E A}, \\ \Delta l_3 &= \frac{Y (5a)}{E A} + \alpha (5a) \Delta t \\ &= \frac{Y a}{E A} + 5\alpha a \Delta t. \end{aligned} \quad (h)$$

Equação de compatibilidade

A configuração deformada encontra-se na

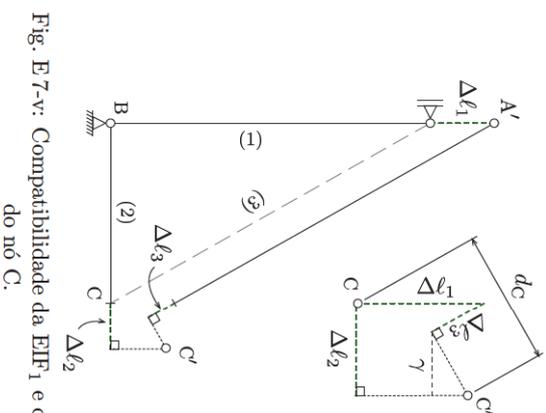


Fig. E-7-v: Compatibilidade da EIPF₁ e detalhe do nó C.

A configuração deformada encontra-se na

Fig. E-7-v. Ela foi obtida determinando-se pri-

Equações constitutivas

Empregando a Eq. (b), chegamos a

$$\uparrow \left\{ \frac{3}{4} X \times \frac{4}{5} = N_1 \Rightarrow N_1 = \frac{3}{5} X. \right. \quad (f-3)$$

Nó A

$$\left\{ \begin{aligned} X - \frac{4}{5} N_2 &= 0 \Rightarrow N_2 = \frac{5}{4} X; \\ \frac{3}{5} N_2 + N_3 &= 0 \Rightarrow N_3 = -\frac{3}{4} X. \end{aligned} \right. \quad (f-2)$$

$$\left\{ \begin{aligned} X - \frac{4}{5} N_2 &= 0 \Rightarrow N_2 = \frac{5}{4} X; \end{aligned} \right. \quad (f-1)$$

Nó C

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{\frac{3}{5} X (4a)}{E A} = \frac{12 X a}{5 E A}, \\ \Delta l_2 &= \frac{\frac{5}{4} X (3a)}{E A} = \frac{15 X a}{4 E A}, \\ \Delta l_3 &= \frac{-\frac{3}{4} X (5a)}{E A} + \alpha (5a) \Delta t \\ &= -\frac{15 X a}{4 E A} + 5\alpha a \Delta t. \end{aligned} \quad (g)$$

Equação de compatibilidade

Fig. E7-vii. As posições dos nós A'_1 e A'_2 , o primeiro no topo da barra 1 e o segundo no topo da barra 3, são determinadas separadamente. Por conveniência foram admitidos sentidos positivos para todos os alongamentos $\Delta\ell_i$.

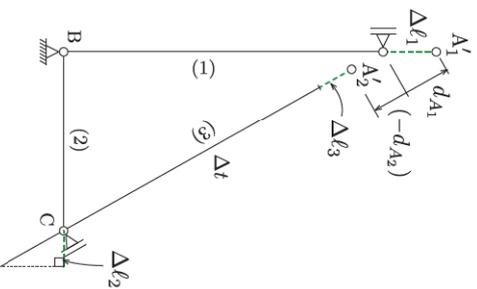


Fig. E7-vii: Compatibilidade da EITF.2.

A equação de compatibilidade, que restabelece o comportamento da treliça original, iguala os deslocamentos em A na direção da barra cortada,

$$d_{A_1} = d_{A_2},$$

ou ainda,

$$\frac{4}{5} \Delta\ell_1 = \Delta\ell_3 - \frac{5}{3} \Delta\ell_2.$$

A substituição dos alongamentos fornece

$$\begin{aligned} -\frac{64}{25} \frac{Y^a}{EA} &= \frac{Y^a}{5EA} + 5\alpha\Delta t + \frac{25}{3} \frac{Y^a}{EA} \\ \left(\frac{-192 - 375 - 625}{75} \right) \frac{Y^a}{EA} &= 5\alpha\Delta t. \end{aligned}$$

Logo,

$$Y = -\frac{375}{1192} \alpha\Delta t/E.A.$$

Resultados

Introduzindo Y nas expressões das forças normais, temos

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{4}{5} Y = \frac{75}{298} \alpha\Delta t/E.A., \\ N_2 &= -\frac{5}{3} Y = \frac{625}{1292} \alpha\Delta t/E.A., \\ N_3 &= Y = -\frac{375}{1292} \alpha\Delta t/E.A. \end{aligned}$$

E o deslocamento do nó A é igual ao alongamento da barra 1,

$$v_A = \Delta\ell_1 = -\frac{16}{5} \frac{Y^a}{EA} = \frac{150}{149} \alpha\Delta t \quad (\uparrow).$$

Index

diagrama de Williot, 2
 grau de hiperstaticidade, 8
 incógnita hiperestática, 8
 número de graus de liberdade, 10