

Diagramas de Esforços Solicitantes

Edgard S. Almeida Neto
Escola Politécnica da USP

18 de Abril de 2012

Conteúdo

- 1 Determinação dos Esforços Solicitantes
 - 1.1 Equações Diferenciais de Equilíbrio 1
 - 1.2 Traçado dos Diagramas de Estado por Trechos 3
 - 1.3 Carregamento Distribuído em Barras Inclínadas 9
 - 1.4 Barras Curvas 9
 - 1.5 Vigas Poligonais Bidimensionais 9
 - 1.6 Pórticos e Quadros Tri-Articulados 13
 - 1.7 Vigas Poligonais Tridimensionais 14

1 Determinação dos Esforços Solicitantes

1.1 Equações Diferenciais de Equilíbrio

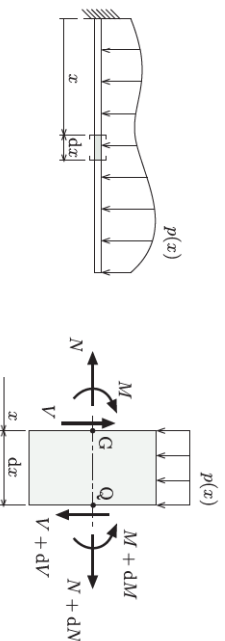


Fig. 1: Trecho reto submetido a uma carga transversal.

Consideremos um trecho de comprimento infinitesimal dx de uma barra prismática submetida a uma carga distribuída transversal $p(x)$, Fig. 1. Sejam M , V e N os esforços solicitantes na seção à esquerda do trecho e dN , dV e dM os acréscimos dos esforços na seção à direita.

2

O equilíbrio estático do trecho indicado na figura fornece as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad \left\{ -N + (N + dN) = 0 \right. & \Rightarrow dN = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad \left\{ V - p dx - (V + dV) = 0 \right. & \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -p \\ \sum M_Q = 0 & \quad \left\{ M + V dx - p dx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0 \right. & \Rightarrow \frac{dM}{dx} = V \end{aligned}$$

em que o momento $\frac{p}{2}(dx)^2$ é de ordem superior e pode ser desprezado frente aos demais.

A primeira equação mostra que a força normal é constante no trecho e as demais podem ser expressas por

$$\boxed{\frac{d^2 M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = -p(x)}, \quad (1)$$

denominadas *equações diferenciais de equilíbrio* de uma barra reta.

As Eqs. (1) permitem determinar os esforços solicitantes em barras retas sujeitas a qualquer carga $p(x)$ contínua. Quando $p(x)$ é nulo ou constante, as funções $V(x)$ e $M(x)$ são imediatas e os diagramas podem ser traçados a partir dos valores das funções nas extremidades dos trechos sem a necessidade de explicitar suas expressões, Fig. 2.

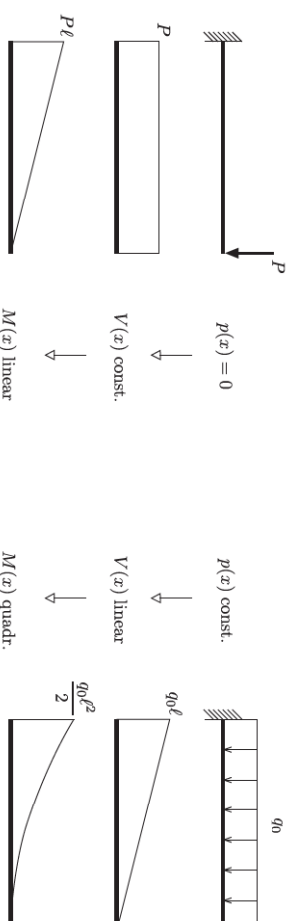
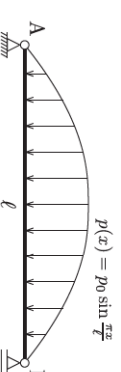


Fig. 2: Variação dos diagramas de V e M .

Exemplo 1 Determine as expressões dos esforços solicitantes empregando as equações diferenciais de equilíbrio.



SOLUÇÃO Resolvendo a equação diferencial $\frac{d^2M}{dx^2} = -p(x)$, temos

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -p_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell},$$

$$V(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{p_0 \ell}{\pi} \cos \frac{\pi x}{\ell} + C_1,$$

$$M(x) = \frac{p_0 \ell^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell} + C_1 x + C_2.$$

As constantes de integração são obtidas a partir das condições de momento fletor nulo nas extremidades,

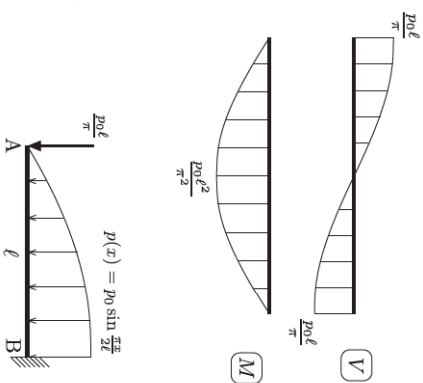
$$M(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$M(\ell) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Logo,

$$V(x) = \frac{p_0 \ell}{\pi} \cos \frac{\pi x}{\ell},$$

$$M(x) = \frac{p_0 \ell^2}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}.$$



1.2 Traçado dos Diagramas de Estado por Trechos

O conhecimento de como os esforços sollicitantes variam num trecho de barra possibilita traçarmos os diagramas de estado a partir dos valores nas suas seções extremas. Mesmo para o carregamento distribuído da Fig. 3, podemos traçar o diagrama de momentos sem calcular valores intermediários. Nesse caso, a equação do momento é dada por

$$M(x) = -\frac{p}{2}x^2 + \left(\frac{M_B - M_A}{\ell} + \frac{p\ell}{2}\right)x + M_A$$

em que M_A e M_B são os momentos fletores nas seções extremas afastadas de ℓ . Empregando as propriedades da parábola, a construção gráfica do diagrama segue os seguintes passos:

- desenha a linha tracejada ligando os momentos M_A e M_B , lembre-se que os momentos fletores são desenhados do lado tracionado;
- a partir do ponto médio da linha tracejada e perpendicularmente ao eixo da barra, marque dois pontos **no sentido de p** distantes $\frac{p\ell^2}{8}$;

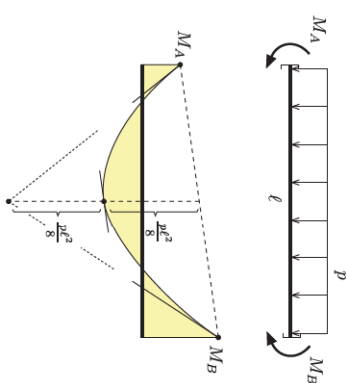


Fig. 3: Trecho submetido a um carregamento uniforme.

- no meio do trecho, a parábola passa pelo primeiro ponto e a tangente é paralela à linha tracejada;
- nas extremidades, a parábola é tangente aos segmentos pontilhados que ligam o segundo ponto aos momentos M_A e M_B .

Exemplo 2 Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga ao lado.

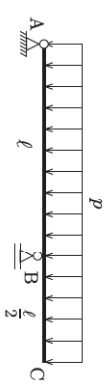
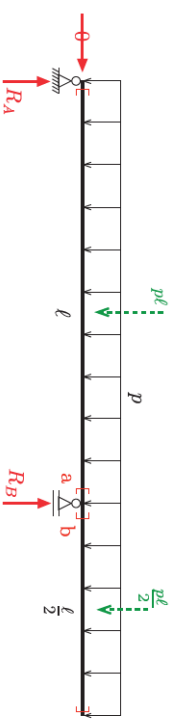


Fig. E2: Barra reta.

SOLUÇÃO



$$M_a = \frac{3p\ell}{8} \times \ell - p\ell \times \frac{\ell}{2} = -\frac{p\ell^2}{8} \quad M_b = -\frac{p\ell}{2} \times \frac{\ell}{4} = -\frac{p\ell^2}{8}$$

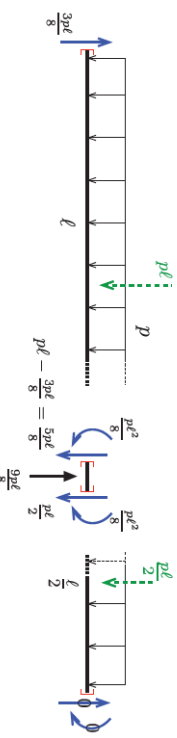


Fig. E2-1: Esforços nas seções.

- Reações

$$\uparrow \begin{cases} R_A + R_B = \frac{3p\ell}{2}, \\ R_A \ell - p\ell \times \frac{\ell}{2} + \frac{p\ell}{2} \times \frac{\ell}{4} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = \frac{3p\ell}{8}, \\ R_B = \frac{9p\ell}{8}. \end{cases}$$

(verif.) $\curvearrowright_A \left\{ p\ell \times \frac{\ell}{2} - \frac{9p\ell}{8} \times \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} \times \frac{5\ell}{4} = 0 \right.$

- Diagramas de esforços solicitantes

A Fig. E-2.1 ilustra o cálculo dos esforços solicitantes nas seções extremas dos trechos. Os momentos M_A e M_B foram obtidos transferindo os esforços para as seções correspondentes. Conhecidas as formas dos diagramas e os valores de extremidade, traçamos os diagramas conforme a Fig. E-2.2.

- Momento fletor máximo

O momento máximo ocorre na seção em que $dM/dx = V(x) = 0$, ou seja

$$V(x) = \frac{3p\ell}{8} - px = 0 \rightarrow x = \frac{3\ell}{8}$$

Como $M(x) = \frac{3p\ell}{8}x - \frac{p}{2}x^2$, temos

$$M_{m\acute{a}x} = M\left(\frac{3\ell}{8}\right) = \frac{9}{128}p\ell^2.$$

Fig. E-2-2: Expressão de $M_{m\acute{a}x}$.

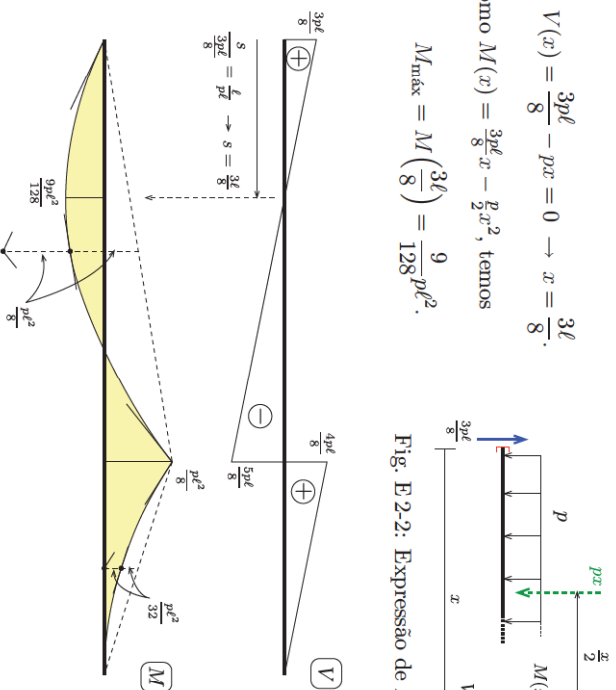


Fig. E-2-2: Diagramas de estado.

Exemplo 3 Trace os diagramas de estado e determine a seção em que atua o máximo momento fletor positivo.

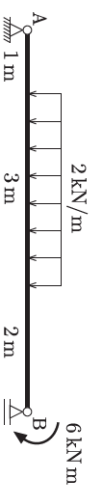


Fig. E-3: Viga bi-apoiada.

SOLUÇÃO

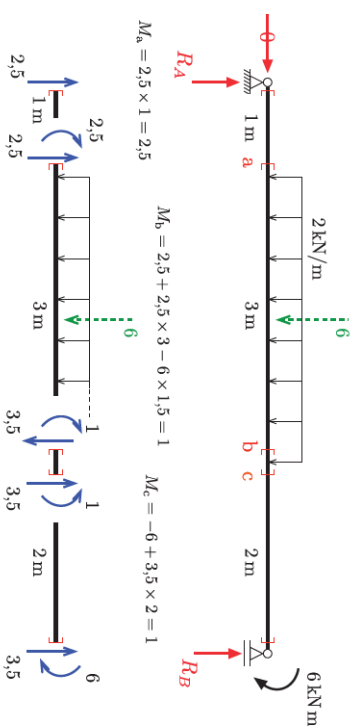


Fig. E-3-1: Esforços nas seções.

- Reações

$$\uparrow \begin{cases} R_A + R_B = 6, \\ 6 \times 2,5 + 6 - R_B \times 6 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = 2,5 \text{ kN}, \\ R_B = 3,5 \text{ kN}. \end{cases}$$

(verif.) $\curvearrowright_B \left\{ 2,5 \times 6 - 6 - 6 \times 3,5 + 6 = 0. \right.$

- As etapas de construção dos diagramas de estado (ou de esforços solicitantes) estão indicadas nas Figs. E-3-1 e E-3-2.

- O momento fletor máximo ocorre no trecho entre as seções a e b da Fig. E-3-2,

$$V(x) = 2,5 - 2x = 0, \Rightarrow x = 1,25 \text{ m}.$$

Como $M(x) = 2,5 + 2,5x - 2x \times \frac{x}{2} = 2,5 + 2,5x - x^2$, resulta

$$M_{m\acute{a}x} = M(1,25) = 4,0625 \text{ kN.m}.$$

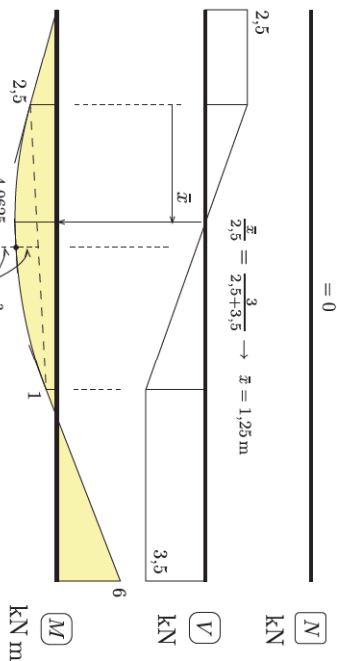
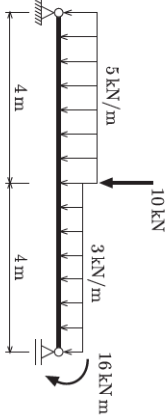


Fig. E-3-2: Diagramas de estado.

Problema 2 Trace os diagramas de estado para a viga ao lado e determine os valores extremos do momento fletor.

R.: $M_{\max} = 44 \text{ kNm}$, $M_{\min} = -16 \text{ kNm}$.



Exemplo 4 Trace os diagramas de estado e determine a seção em que atua o máximo momento fletor.

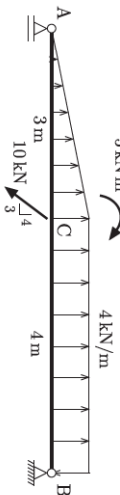
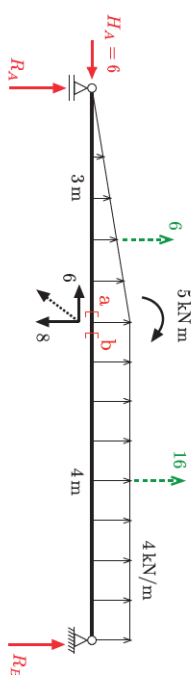


Fig. E-4: Barra com carga linear.

SOLUÇÃO



$$M_a = -5 \times 3 + 6 \times 1 = -9 \quad M_b = -9 \times 4 + 16 \times 2 = -4$$

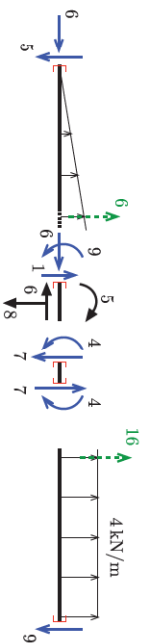


Fig. E-4-1: Esforços nas seções.

• Reações

$$\uparrow \left\{ \begin{aligned} R_A + R_B &= -14, \\ R_A \times 7 + 6 \times 5 + 5 \times 8 \times 4 + 16 \times 2 &= 0, \end{aligned} \right. \Rightarrow R_A = -5 \text{ kN}, \quad R_B = -9 \text{ kN}.$$

(verif.) $\sim_A \{-6 \times 2 + 5 + 8 \times 3 - 16 \times 5 + 9 \times 7 = 0.$

• Cálculo do momento fletor máximo

$$V(x) = -5 + \frac{4x^2}{6} = 0 \rightarrow x = 2,739 \text{ m},$$

a outra raiz está fora do intervalo;

$$M(x) = -5 \times x + \frac{4x^2}{3} \times \frac{x}{3} = -5 \times x + \frac{2x^3}{9},$$

$$M_{\max} = M(2,739) = 9,129 \text{ kNm}.$$

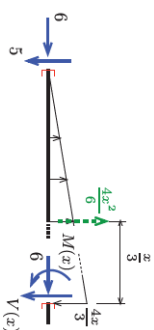


Fig. E-4-2: M_{\max} em AC.

$$M(s) = 4 - 7s + 2s^2$$

$$V(s) = -7 + 4s \rightarrow x = 1,75 \text{ m}$$

$$M_{\max} = M(1,75) = 10,125 \text{ kNm}$$

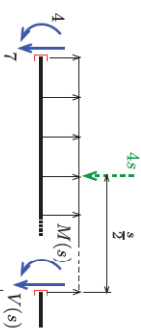


Fig. E-4-3: M_{\max} em CB.

x	V	M
0,00	-5,00	0,00
1,00	-4,33	4,78
2,00	-2,33	8,22
2,74	0,00	9,13
3,00	1,00	9,00

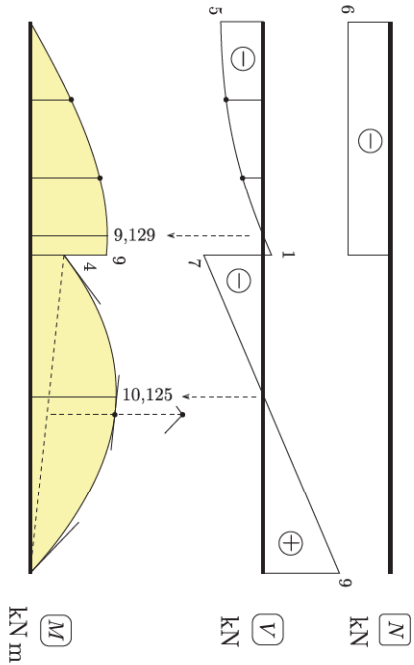


Fig. E-4-4: Diagramas de estado.

1.3 Carregamento Distribuído em Barras Inclinadas

1.4 Barras Curvas

1.5 Vigas Poligonais Bidimensionais

Exemplo 5 Trace os diagramas de estado para a viga poligonal da figura.

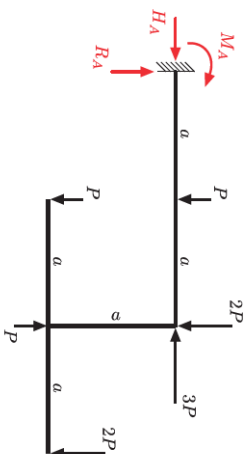


Fig. E-5: Viga poligonal.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \rightarrow \{ H_A - 3P &= 3P & \Rightarrow H_A &= 3P, \\ \uparrow \{ R_A - P - 2P - P + P - 2P &= 0 & \Rightarrow R_A &= 5P, \\ \curvearrowleft \{ M_A + Pa + 4Pa + Pa - 2Pa + 6Pa &= 0 & \Rightarrow M_A &= -10P. \end{aligned}$$

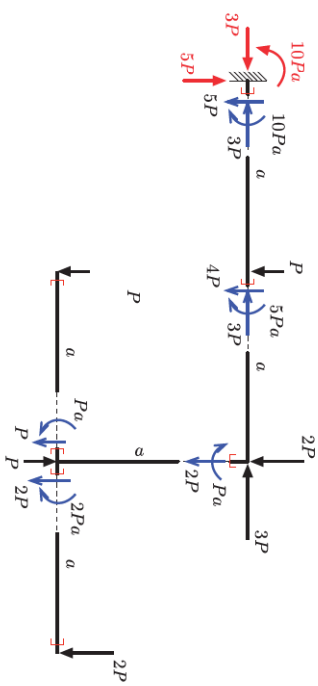


Fig. E-5-1: Esforços nas seções.

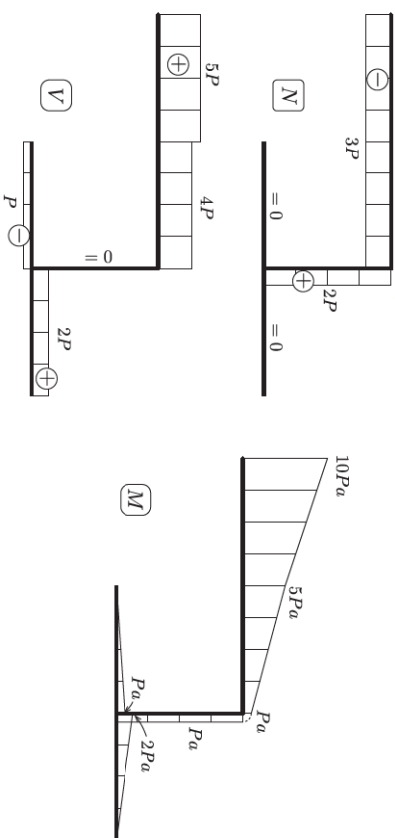


Fig. E-5-2: Diagramas de estado.

Exemplo 6 Trace os diagramas de estado para a viga poligonal engastada.

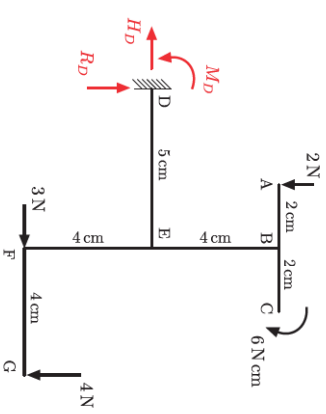


Fig. E-6: Viga poligonal engastada.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \rightarrow \{ -H_D + 3 &= 0, & \Rightarrow H_C = 3\text{ N}, \\ \uparrow \{ R_D - 2 - 4 &= 0 & \Rightarrow R_C = 6\text{ N}, \\ \curvearrowright \{ -M_D + 2 \times 3 + 6 - 3 \times 4 + 4 + 4 \times 9 &= 0 & \Rightarrow M_D = 36\text{ N cm}. \end{aligned}$$

(verif.) $\curvearrowright_F \{ -36 - 3 \times 4 + 6 + 6 \times 5 - 2 \times 2 + 6 + 4 \times 4 = 0.$

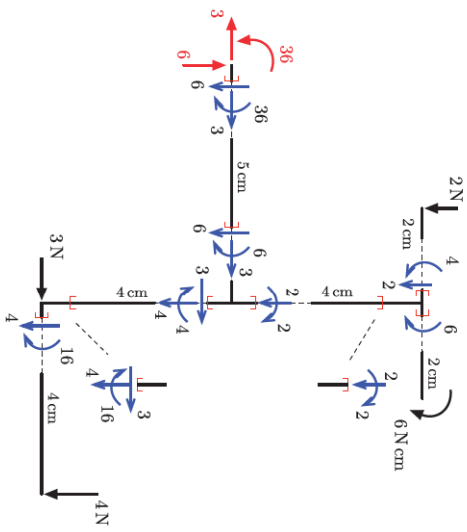


Fig. E-6-1: Esforços nas seções.

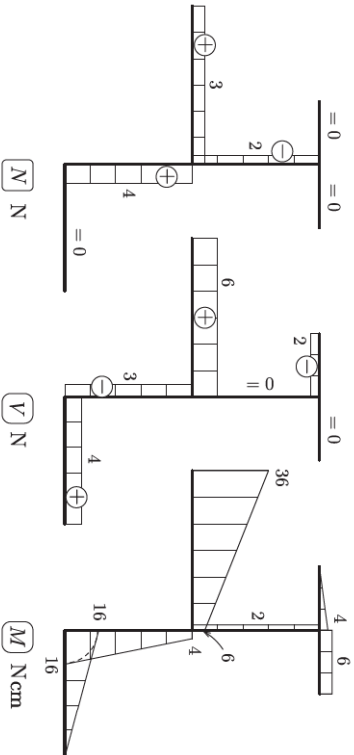


Fig. E-6-2: Diagramas de estado.

Exemplo 7 Trace os diagramas de estado para a viga poligonal biapoiada ao lado.

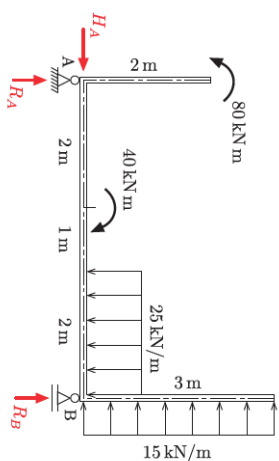


Fig. E-7: Viga poligonal biapoiada.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \rightarrow \{ H_A - 45 &= 0, & \Rightarrow H_A = 45\text{ kN}, \\ \uparrow \{ R_A + R_B &= 50 \\ \curvearrowright_A \{ -80 + 40 + 50 \times 4 - 45 \times 1,5 - R_B \times 5 &= 0 & \Rightarrow R_B = 18,5\text{ kN m}, \\ & & R_A = 31,5\text{ kN m}. \end{aligned}$$

(verif.) $\curvearrowright_B \{ -80 + 31,5 \times 5 + 40 - 50 \times 1 - 45 \times 1,5 = 0.$

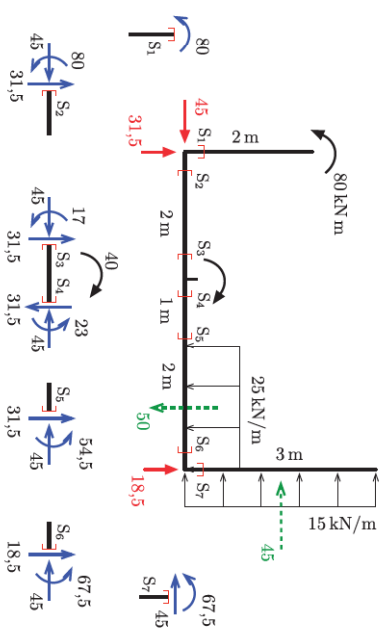


Fig. E-7-1: Esforços nas seções.

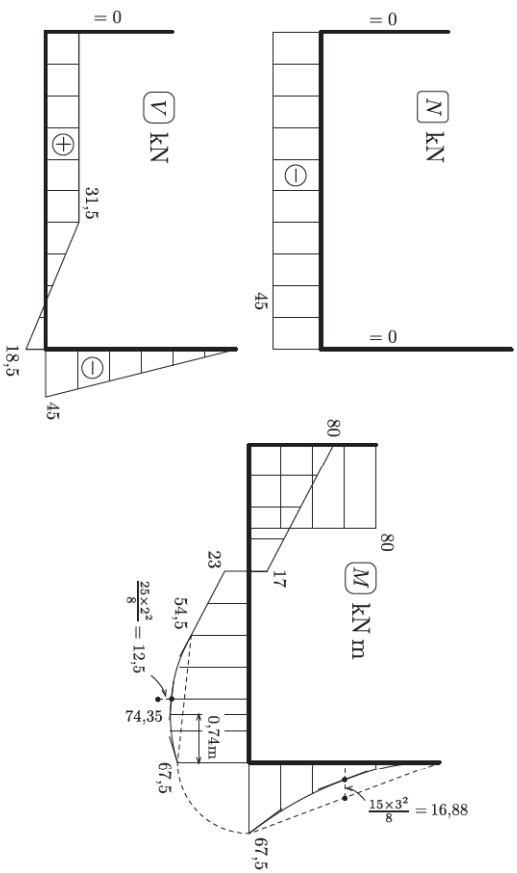
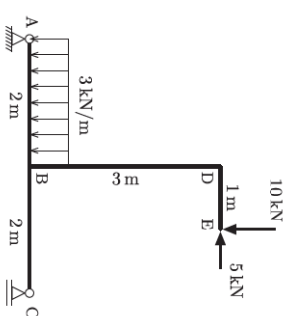


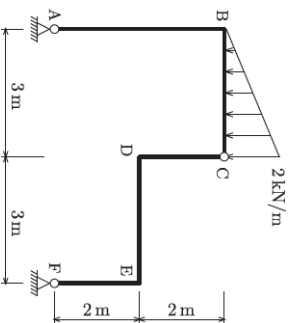
Fig. E 7-2: Diagramas de estado.

Problema 3 Trace os diagramas de estado para a viga poligonal ao lado.



1.6 Pórticos e Quadros Tri-Articulados

Problema 4 Trace os diagramas de estado para o pórtico tri-articulado da figura. Utilize a condição de momento fletor nulo na articulação C, juntamente com as equações de equilíbrio para determinar as quatro reações de apoio.

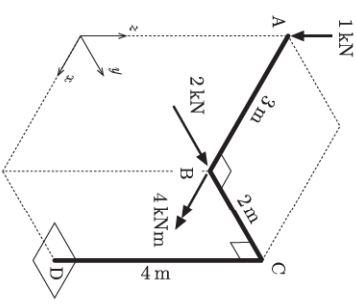


1.7 Vigas Poligonais Tridimensionais

Nas estruturas reticuladas tridimensionais, é conveniente adotarmos a representação vetorial para os momentos na seção transversal. Desse modo, usaremos frequentemente a regra da mão direita para traçar os diagramas de momentos fletores.

O traçado dos diagramas de força cortante e momento fletor requer atenção especial por causa da representação simultânea de duas componentes. Adicionalmente, a convenção de sinal da força cortante depende do observador e a força pode trocar de sinal com a simples mudança de direção do eixo da barra.

Exemplo 8 Trace os diagramas de estado para a viga poligonal ao lado.



SOLUÇÃO

Reações de apoio As equações de equilíbrio permitem obter as reações no engaste.

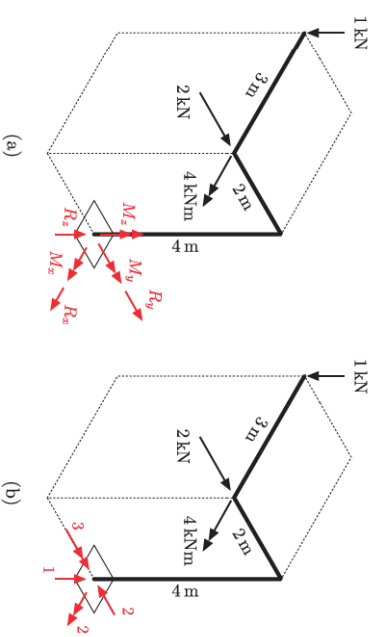


Fig. 4: Reações de apoio: (a) incógnitas, (b) valores obtidos.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \quad \{ R_x = 0 & \Rightarrow R_x = 0 \\ \sum F_y = 0 & \quad \{ R_y + 2 = 0 & \Rightarrow R_y = -2 \text{ kN} \\ \sum F_z = 0 & \quad \{ -1 + R_z = 0 & \Rightarrow R_z = 1 \text{ kN} \\ \sum M_{Dx} = 0 & \quad \{ 1 \times 2 - 2 \times 4 + 4 + M_x = 0 & \Rightarrow M_x = 2 \text{ kNm} \\ \sum M_{Dy} = 0 & \quad \{ -1 \times 3 + M_y = 0 & \Rightarrow M_y = 3 \text{ kNm} \\ \sum M_{Dz} = 0 & \quad \{ M_z = 0 & \Rightarrow M_z = 0 \end{aligned}$$

Esforços solicitantes A Fig. 5 ilustra o emprego do teorema do corte para calcular os esforços solicitantes. As orientações das seções transversais nas extremidades dos trechos determinam o sentido de caminhar ao longo da viga poligonal. No caso, as seções foram percorridas na ordem A, B₁, B₂, C₁, C₂ e D.

- Os esforços solicitantes estão indicados na frente das seções de acordo com o caminho escolhido.
- A ideia de perspectiva é reforçada pela representação dos esforços na seção.
- A regra da mão direita define os sentidos dos vetores momentos nas seções e determina o lado tracionado pelos momentos fletores.
- Esforços em uma seção são transmitidos para a seção seguinte juntamente com esforços aplicados nos trechos de barra e nós da estrutura delimitados pelas seções.
- Os esforços solicitantes nas seções junto aos apoios devem estar em equilíbrio com as reações nesses apoios.

Diagramas de Estado No traçado dos diagramas de esforços solicitantes algumas convenções devem ser seguidas, Fig. 6.

- Os sinais devem ser indicados nos diagramas de N, V e M_r, mas devem ser omitidos no diagrama de M.
- A força cortante é positiva quando ela tende a girar a seção no sentido horário. Se as orientações que definem o ponto de vista¹ não estiverem indicadas, considera-se o ponto de vista da perspectiva.
- Os diagramas das componentes de V e de M são sempre traçados nos planos em que as componentes atuam.
- Os diagramas de momento fletor são sempre desenhados no lado tracionado das barras.

¹Ver indicações do ponto de vista no Exemplo 9.

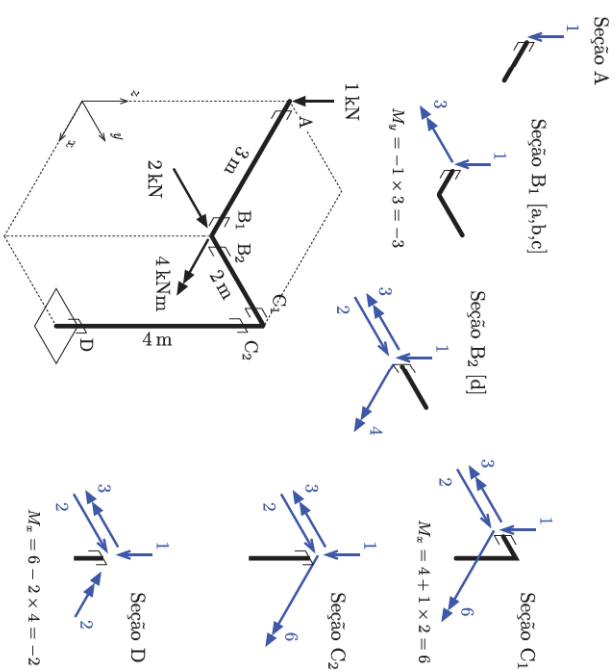


Fig. 5: Cálculo dos esforços solicitantes nas seções de extremidade.

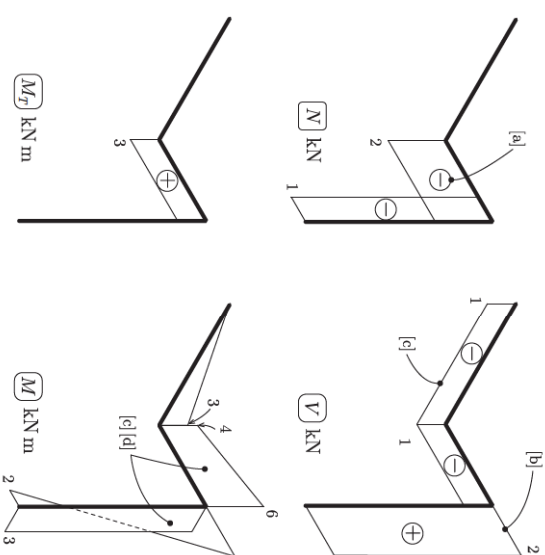
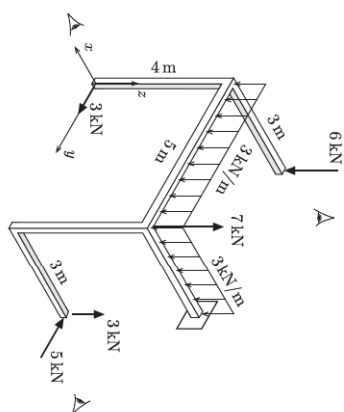


Fig. 6: Diagramas de Estado.

Exemplo 9 Trace os diagramas de estado para a viga poligonal ao lado.



SOLUÇÃO
Reações de apoio

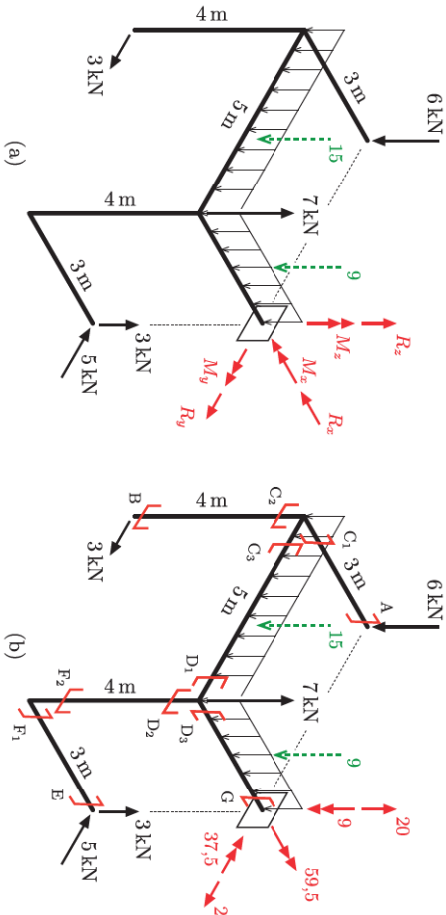


Fig. 7: Reações de apoio: (a) incógnitas, (b) valores.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 & \{ R_x &= 0 & \Rightarrow R_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 & \{ 3 - 5 + R_y &= 0 & \Rightarrow R_y &= 2 \text{ kN} \\ \sum F_z &= 0 & \{ -6 - 15 + 7 - 9 + 3 + R_z &= 0 & \Rightarrow R_z &= 20 \text{ kN} \\ \sum M_{Ax} &= 0 & \{ 6 \times 5 + 15 \times 2,5 + 3 \times 4 - 5 \times 4 + M_x &= 0 & \Rightarrow M_x &= -59,5 \text{ kNm} \\ \sum M_{Ay} &= 0 & \{ 15 \times 3 - 7 \times 3 + 9 \times 1,5 + M_y &= 0 & \Rightarrow M_y &= -37,5 \text{ kNm} \\ \sum M_{Az} &= 0 & \{ 3 \times 3 + M_z &= 0 & \Rightarrow M_z &= -9,0 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Esforços solicitantes A Fig. 8 apresenta o cálculo dos esforços solicitantes, obtidos a partir das extremidades livres da estrutura. As seções foram percorridas na ordem A, C₁; B, C₂; C₃, D₁; E, F₁, F₂; D₃ e G.

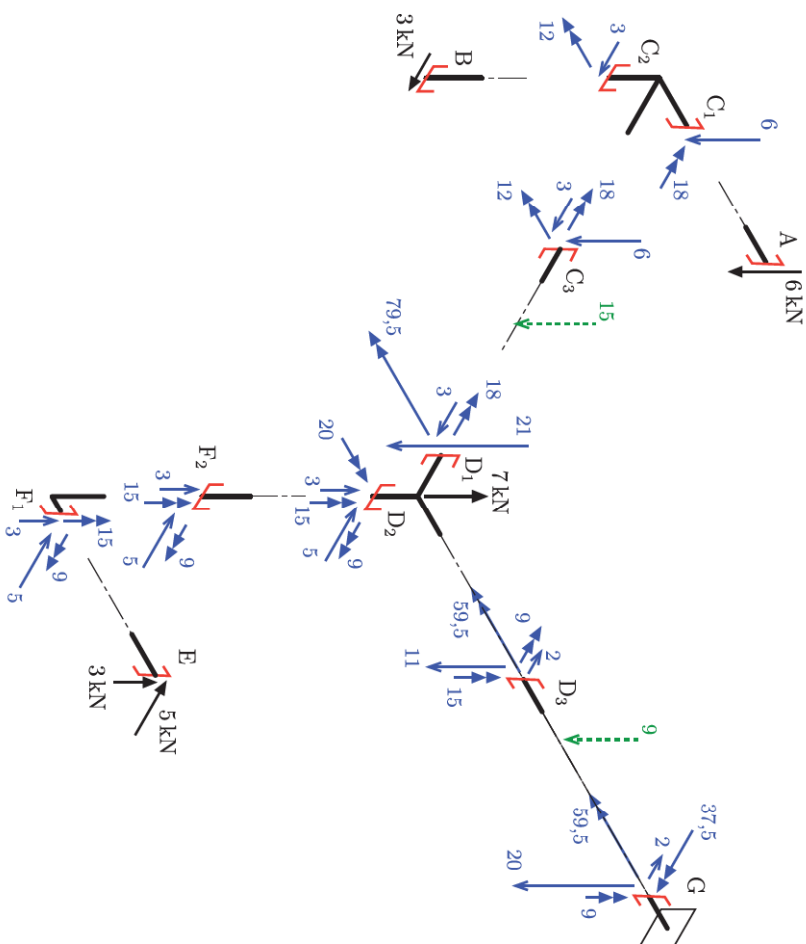


Fig. 8: Cálculo dos esforços solicitantes nas seções de extremidade.

Diagramas de estado Os diagramas são construídos a partir dos valores nas seções extremas dos trechos. As componentes das forças cortantes e dos momentos fletores são sempre traçados nos planos em que elas atuam. Uma força cortante positiva tende a girar a seção no sentido horário de acordo com um ponto de vista estabelecido. Quando omitido, o ponto de vista da perspectiva deve ser adotado (neste problema, o ponto de vista indicado pelos ‘olhos’ coincide com o da perspectiva).

Repare na Fig. 9 que as hachuras nos diagramas são usadas para indicar a direção em que são medidos os valores dos esforços solicitantes. Elas ajudam na visualização contribuindo para o efeito tridimensional.

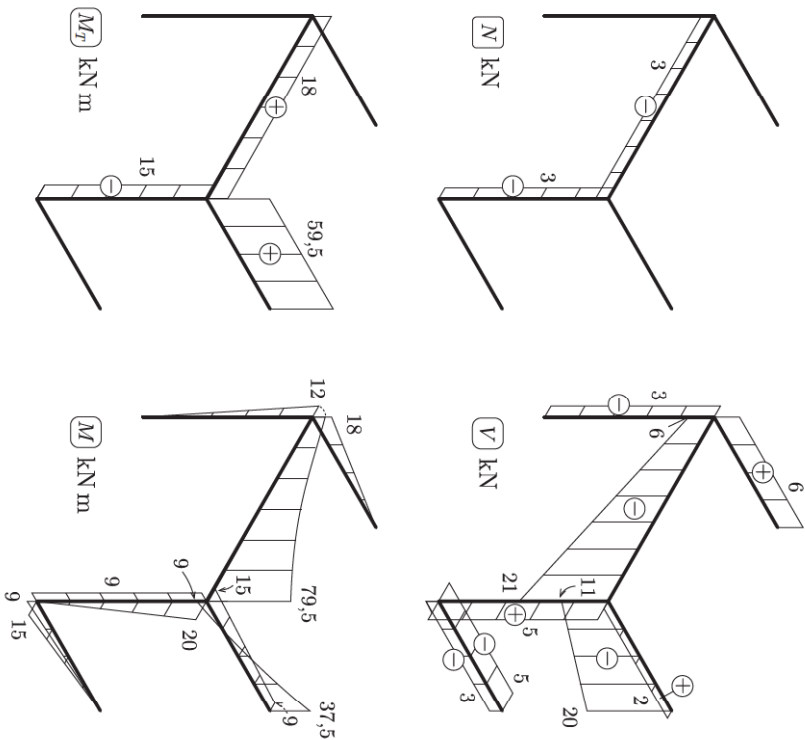
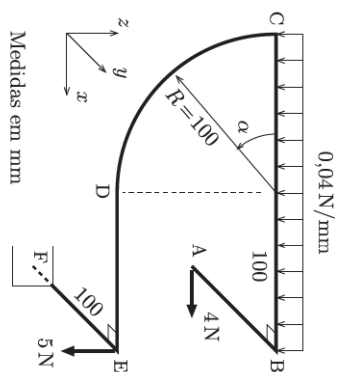


Fig. 9: Diagramas de Estado.

Exemplo 10 Trace os diagramas de esforços solicitantes na barra EF da estrutura ao lado e determine o valor da máxima força normal no trecho curvo CD.



SOLUÇÃO

Diagramas na barra EF

A resolução é imediata se obtivermos os esforços solicitantes na seção E e depois calcularmos os esforços na seção F do engastamento, conforme mostra a Fig. 10,

Seção E: (convenção da Resistência dos Materiais)

$$\begin{aligned}
 N &= 0 & T &= +4 \times 100 - 8 \times 100 = 400 \text{ Nmm} \\
 V_x &= 4 \text{ N} & M_x &= 0 \\
 V_z &= +8 + 5 = 13 \text{ N} & M_z &= +4 \times 100 = 400 \text{ Nmm (traciona lado direito)}
 \end{aligned}$$

Uma vez obtidos os esforços nas seções, traçamos os diagramas para o trecho EF.

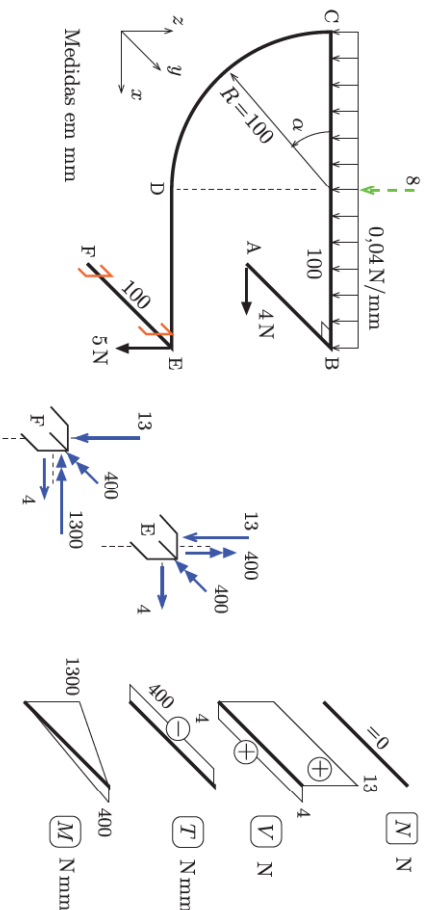


Fig. 10: Esforços solicitantes no trecho EF.

Força normal em CD

A expressão da força normal é obtida a partir dos esforços solicitantes na seção C. De acordo com a Fig. 11, o arco e todos esforços nele aplicados estão contidos no plano xz . Logo,

$$N(\alpha) = -8 \cos \alpha - 4 \sin \alpha$$

$$\frac{dN}{d\alpha} = 8 \sin \alpha - 4 \cos \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 26,57^\circ$$

$$N_{\text{máx}} = 8,84 \text{ N.}$$

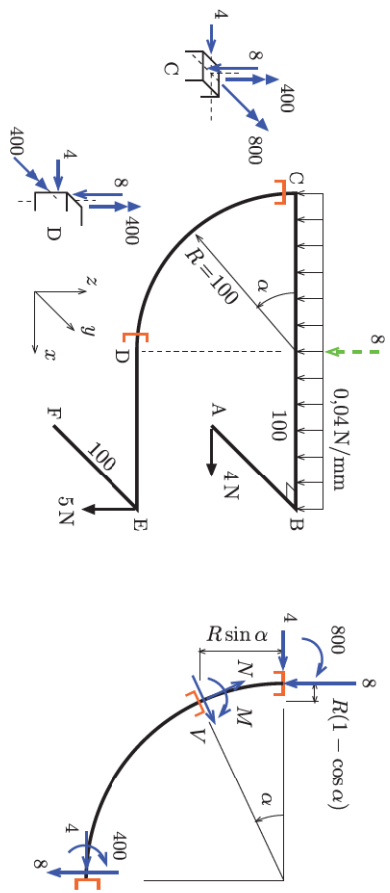


Fig. 11: Esforços solicitantes no trecho CD.

Apenas por curiosidade apresentamos os diagramas completos na Fig. 12.

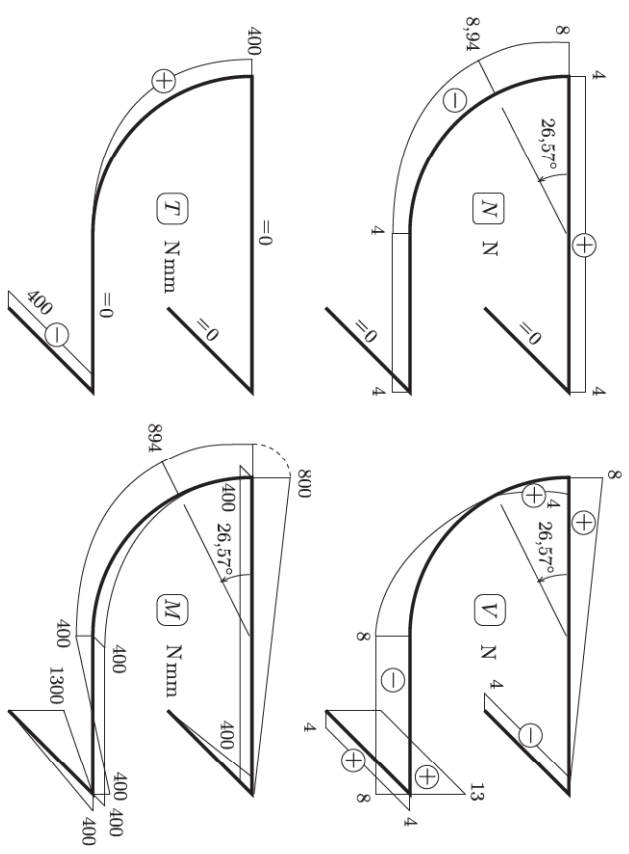


Fig. 12: Diagramas de esforços solicitantes.