

# Conceitos Fundamentais de Resistência dos Materiais

Edgard S. Almeida Neto  
Escola Politécnica da USP

28 de Julho de 2011

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Estrutura e Elementos Estruturais</b>	<b>1</b>
1.1	Classificação quanto à Geometria	2
1.2	Estruturas Reticuladas	3
1.2.1	Barra	4
1.2.2	Trecho	5
1.2.3	Nó	5
<b>2</b>	<b>Equações da Estática</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Esforços na Estrutura</b>	<b>6</b>
3.1	Tipos de Força	7
3.2	Classificação dos Esforços	8
3.3	Esforços Solicitantes	8
3.4	Tensão	11
3.5	Relações entre os Esforços Solicitantes e as Componentes de Tensão	14
<b>4</b>	<b>Apoios</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Classificação das Estruturas Reticuladas quanto à Estaticidade</b>	<b>17</b>

## 1 Estrutura e Elementos Estruturais

Denominamos *estrutura* ao conjunto das partes resistentes de um objeto, dispositivo ou construção. As *partes resistentes* são caracterizadas por sua capacidade de transmitir esforços,

2

geralmente sofrendo pequenas deformações.

*Elementos estruturais* são partes resistentes com geometria e características bem definidas, cuja identificação facilita o entendimento da transmissão dos esforços na estrutura. Na edificação da Fig. 1, por exemplo, a laje intermediária transfere esforços para as vigas, que os transferem para os pilares, que por sua vez os transferem para os elementos da fundação. Nem sempre a decomposição da estrutura em elementos estruturais é imediata. A transferência dos esforços pode depender de interações mecânicas complexas entre os diversas partes da estrutura.

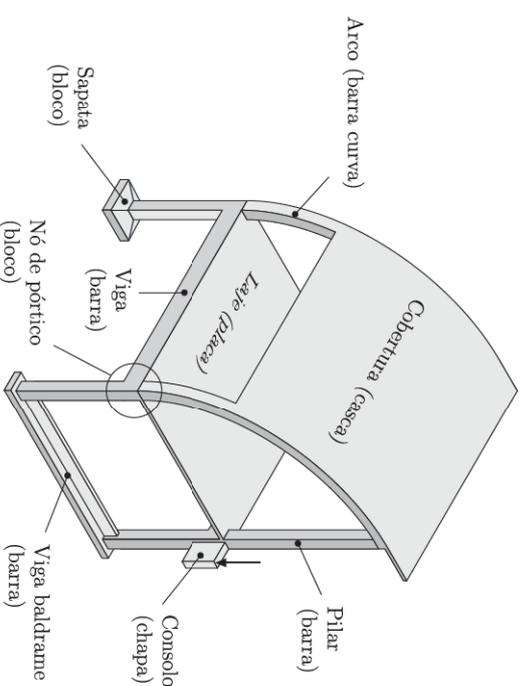


Fig. 1: Elementos estruturais de uma edificação.

### 1.1 Classificação quanto à Geometria

Os elementos estruturais são classificados quanto à geometria em:

**Lineares**, quando uma das dimensões predomina sobre as demais, Fig. 2-a. É o caso de cabos, tirantes, vigas e, de modo geral, barras. A geometria é descrita pela equação de uma curva e por seções transversais definidas nos pontos ao longo da curva.

**De superfície**, quando predominam duas dimensões, Fig. 2-b. A geometria é descrita por uma superfície média e por espessuras associadas aos pontos da superfície.

Se a superfície média for curva, o elemento é denominado *casca*. Se ela for plana, a denominação depende do carregamento atuante: *chapa*, quando os esforços externos estão contidos no plano médio, e *placa*, quando os esforços externos atuam perpendicularmente ao plano médio.

Nos problemas de comportamento linear, um elemento plano submetido a um carregamento genérico pode ser sempre representado por uma chapa mais uma placa. Este é o caso das ‘placas’ de expansão do microcomputador da Fig. 3.

**De volume**, quando as três dimensões têm a mesma ordem de grandeza, Fig. 2-c. É o caso de parafusos, porcas, blocos de fundação, nós de pórticos etc.

Os termos *barra*, *folha* e *bloco* são usualmente empregados para designar, respectivamente, os elementos lineares, de superfície e de volume. Por exemplo, o *arco* é uma barra curva e a *casca* é uma folha curva.

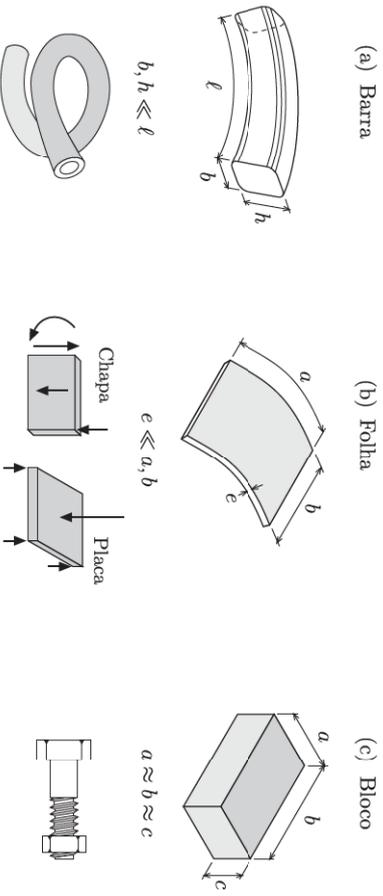


Fig. 2: Classificação quanto à geometria: (a) estrutura linear, (b) de superfície, (c) de volume.

## 1.2 Estruturas Reticuladas

*Estrutura reticulada* é aquela formada apenas por elementos estruturais lineares. Dizemos que uma estrutura reticulada é *plana* quando suas barras apresentam um plano central<sup>1</sup> coincidente com o plano médio da estrutura e os esforços externos ou estão contidos no plano médio (vigas poligonais e pórticos planos) ou atuam perpendicularmente a ele (grelhas).

A seguir, introduzimos os conceitos de barra, trecho e nó visando facilitar a descrição das estruturas reticuladas.

<sup>1</sup>Plano definido pelo eixo longitudinal da barra e um dos eixos centrais-principais da ST.

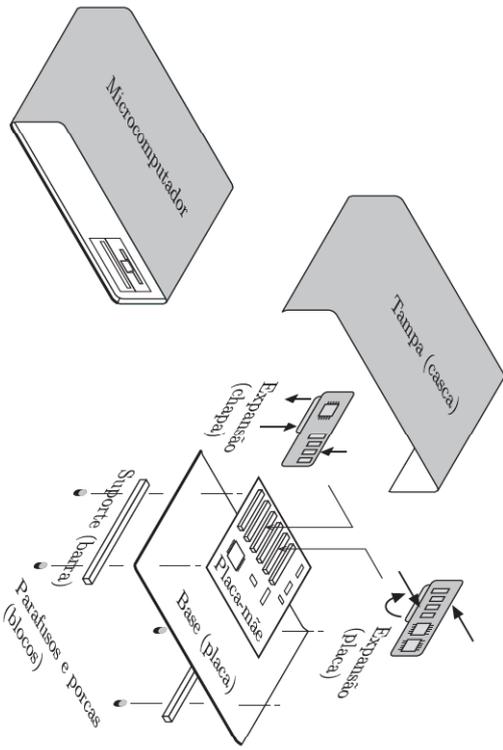


Fig. 3: Elementos estruturais de um microcomputador.

### 1.2.1 Barra

*Barra* é o elemento sólido gerado por uma figura plana, não necessariamente constante, que se desloca no espaço permanecendo normal à trajetória de seu baricentro, Fig. 4.

O lugar geométrico dos pontos ocupados pelo baricentro da figura plana recebe o nome de *eixo longitudinal* da barra. As interseções dos planos normais ao eixo com o sólido gerado definem as *seções transversais* da barra (STs), as quais coincidem com a figura plana para um ponto arbitrário do eixo. Os adjetivos *reta* e *curva* designam barras de eixos retos e curvos, respectivamente. A barra reta de seção transversal constante recebe o nome de *barra prismática*.

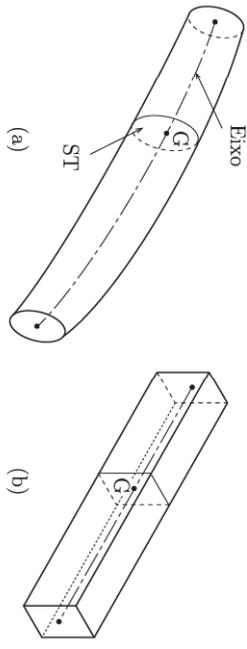


Fig. 4: Eixo e seção transversal de uma barra (a) genérica, (b) prismática.

### 1.2.2 Trecho

Denominamos *trecho* a um segmento de barra delimitado por ST's nas quais

- insere-se uma nova barra, ou uma articulação etc.;
- altera-se a equação que rege a posição do eixo da barra;
- introduz-se uma carga concentrada;
- interrompe-se um carregamento distribuído.

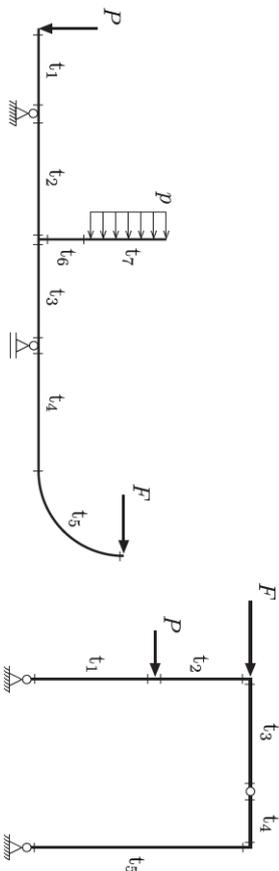


Fig. 5: Delimitação das seções extremas dos trechos.

### 1.2.3 Nó

Denominamos  $nó^2$  ao ponto de encontro de duas ou mais barras. Dizemos que os nós são *articulados* quando eles permitem rotações relativas entre as extremidades das barras, caso contrário dizemos que eles são *rígidos*.

## 2 Equações da Estática

**Definição 1 (Equilíbrio de um Sólido)** Dizemos que um sólido está em *equilíbrio* em relação a um referencial inercial se ele estiver em repouso em relação a esse referencial, isto é, se as posições de todos os seus pontos em relação a esse referencial não variarem com o tempo [1].

<sup>2</sup>Uma definição mais abrangente é obtida associando-se os nós aos pontos determinados pelas *seções transversais extremas dos trechos*, definição normalmente empregada na Análise Matricial de Estruturas.

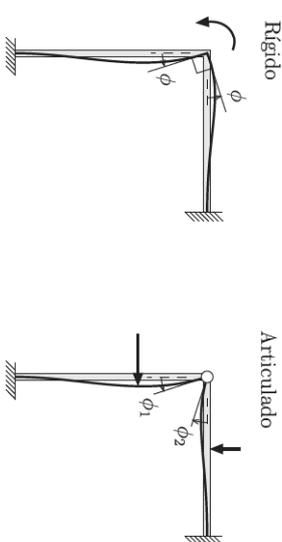


Fig. 6: Nó rígido e nó articulado.

Para um corpo em repouso em relação a um sistema inercial, as leis de Euler<sup>3</sup> fornecem:

$$\sum_{i=1}^{n_F} \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad \sum_{j=1}^{n_M} M_{O_j} = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

correspondendo ao equilíbrio de  $n_F$  forças  $\mathbf{F}_i$  e  $n_M$  momentos  $M_j$  em relação a um polo arbitrário O. Reescrevendo a equação acima empregando as componentes de força e momento em relação a três eixos ortogonais  $x$ ,  $y$  e  $z$  passando por O, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_F} F_x &= 0, & \sum_{j=1}^{n_M} M_{O_x} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n_F} F_y &= 0, & \sum_{j=1}^{n_M} M_{O_y} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n_F} F_z &= 0, & \sum_{j=1}^{n_M} M_{O_z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde os índices foram omitidos. Para um sistema de forças coplanares em que as forças e momentos atuam no plano definido pelos eixos  $x$  e  $y$ , restam apenas três equações não-identicamente nulas:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, & \sum M_{O_z} &= 0, \\ \sum F_y &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

## 3 Esforços na Estrutura

O termo *esforço* é uma designação genérica que abrange as noções de força (força concentrada, força distribuída sobre linha, força de superfície e força de volume), momento e tensão [5].

<sup>3</sup>As leis de Euler estendem, para a mecânica dos sólidos, a segunda lei de Newton.

### 3.1 Tipos de Força

Existem dois tipos de força que descrevem a interação entre sólidos: forças distribuídas de superfície e forças distribuídas de volume.

**Forças de superfície** — forças que atuam nas superfícies dos sólidos, como a pressão de um líquido, as forças de atrito etc.

**Forças de volume** — forças que atuam nas partículas que compõem o sólido, sem que haja contato entre os sólidos. A força gravitacional e as forças eletromagnéticas são exemplos conhecidos.

Essas forças são também conhecidas por *forças de contato* e *forças de massa*, respectivamente, o que acentua o fato de admitirem interpretações físicas. A Mecânica também emprega forças idealizadas, ou seja, forças definidas a partir das resultantes parciais ou totais das primeiras, Fig. 7. Por exemplo,

**Força distribuída sobre linha** — força por unidade de comprimento representando forças distribuídas em superfícies *estreitas* ou em volumes *alongados*. A força distribuída tem grande aplicação nas estruturas reticuladas, sua intensidade sendo obtida a partir do conceito de esforços mecanicamente equivalentes em uma superfície ou volume elementar carregado, Fig. 8.

**Força concentrada** — resultante de forças distribuídas em pequenas superfícies ou volumes aplicada pontualmente.

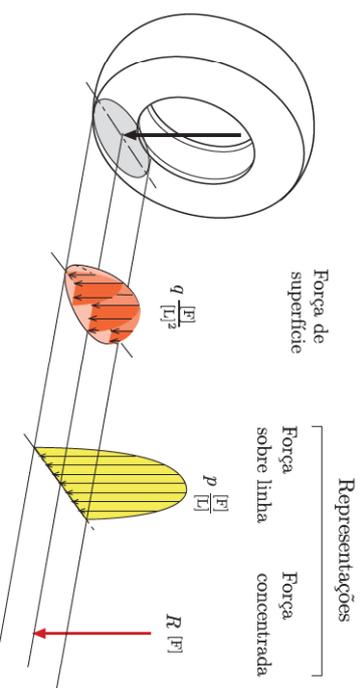


Fig. 7: Aproximações sucessivas da força de contato [3].

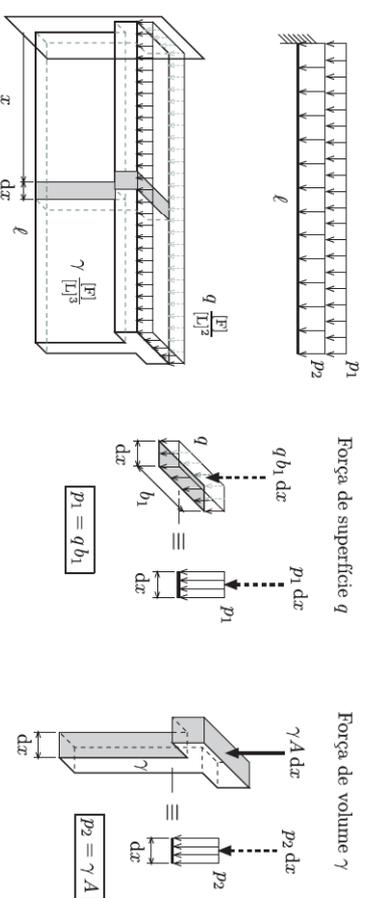


Fig. 8: Cálculo da força distribuída sobre linha. Viga submetida a forças distribuídas  $p_1$  e  $p_2$  mecanicamente equivalentes à força de superfície  $q$  e ao peso próprio da viga.

### 3.2 Classificação dos Esforços

Os esforços podem ser classificados em externos e internos à estrutura.

- Os *esforços externos* decorrem da interação entre a estrutura e os sólidos que a rodeiam. Eles podem ser
  - *ativos*, correspondendo a esforços aplicados, tais como o peso próprio, a pressão de um líquido, o efeito de um campo eletromagnético;
  - *reativos*, ou simplesmente *reações*, correspondendo a esforços introduzidos por vínculos externos para manter a estrutura em equilíbrio.
- Os *esforços internos* descrevem a interação entre partes da mesma estrutura. Eles admitem duas representações bastante distintas nas estruturas reticuladas, a primeira expressa nos pontos do sólido e a segunda resumida às seções transversais das barras:
  - *tensões*, esforços internos pontuais descrevendo a interação entre partículas;
  - *esforços sollicitantes*, resultantes de força e momento que descrevem a interação no plano da ST.

### 3.3 Esforços Sollicitantes

Considere-se uma barra em equilíbrio sob a ação de esforços externos. Seja  $\alpha$  um plano perpendicular ao eixo, cuja intersecção com a barra a subdivide nas partes I e II indicadas na Fig. 9. Se a barra está em equilíbrio, suas partes também têm que estar. Como os esforços

externos em I não estão necessariamente equilibrados, evidencia-se a existência de esforços internos transmitidos de II para I através da seção A, os quais possibilitam o equilíbrio. As resultantes de força,  $R$ , e momento,  $M$ , em relação ao centro de gravidade G são denominadas *esforços sollicitantes* na seção transversal.

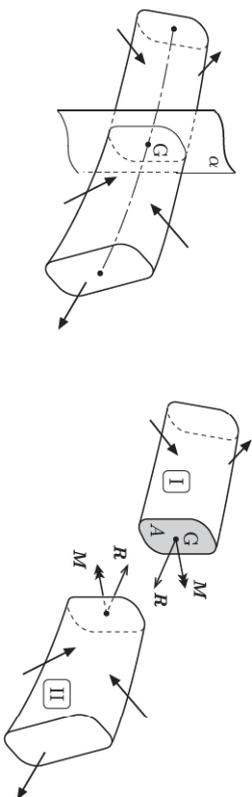


Fig. 9: Definição de esforços sollicitantes. Sólido antes e depois do corte imaginário.

É usual decompor os vetores  $R$  e  $M$  em três direções perpendiculares, sendo uma delas coincidente com a direção do eixo da barra como mostrado na Fig. 10. As componentes assim obtidas são designadas:

**Força Normal (N)** — componente normal à ST; positiva quando traciona a ST.

**Força Cortante ( $V_y$  e  $V_z$ )** — componentes tangenciais à ST; positivas quando tendem a girar a seção no sentido horário (convenção que depende do ponto de vista do observador).

**Momentos Fletores ( $M_y$  e  $M_z$ )** — componentes de momento em relação aos eixos  $y$  e  $z$  passando por G; positivas quando orientadas nas direções dos respectivos eixos.

**Momento em relação ao eixo da barra ( $M_x$ )** — positivo quando o vetor momento tende a sair da ST. Para seções com dupla simetria, este momento é igual ao momento de torção da barra.

No caso plano, os índices podem ser omitidos, fornecendo a representação da Fig. 11. Neste curso, o momento fletor será considerado positivo quando tracionar o lado inferior da barra. Repare que as convenções mostradas na figura satisfazem implicitamente a lei da ação e reação.

**Teorema 1 (Teorema do Corte ou Teorema dos Esforços Sollicitantes)** Se o plano imaginário  $\alpha$  da seção transversal dividir o sólido em duas partes I e II, então os esforços sollicitantes que atuam no centro de gravidade da ST da parte I são mecanicamente equivalentes às resultantes de força e momento dos esforços extremos aplicados em II.

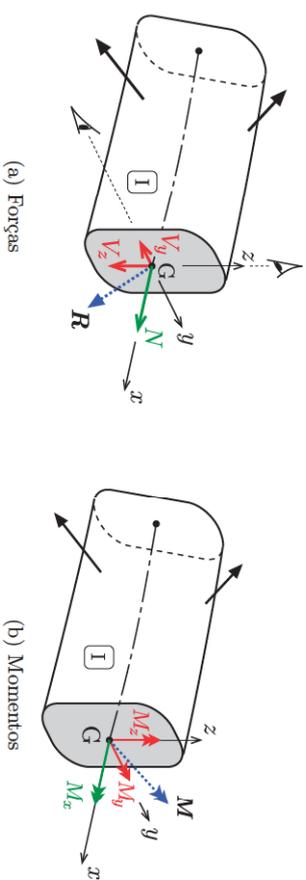


Fig. 10: Decomposição das resultantes na ST e convenção de sinais.

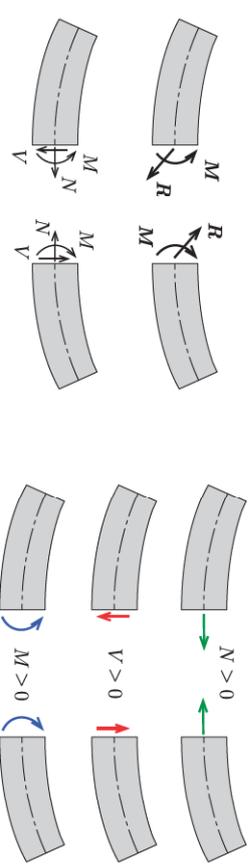


Fig. 11: Problema plano: esforços sollicitantes e convenção de sinais.

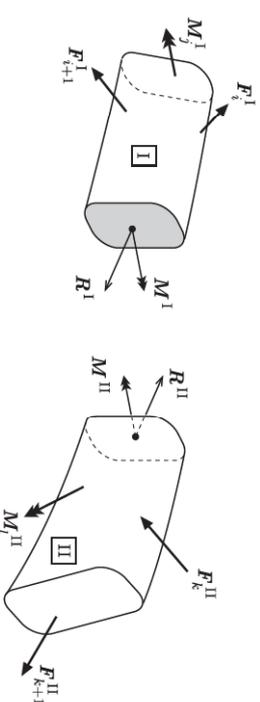


Fig. 12: Teorema dos Esforços Sollicitantes.

**PROVA** Pelo princípio da ação e reação<sup>4</sup>, têm-se que os esforços nas seções opostas são iguais e de sinais contrários,

$$R^I = -R^{II}, \quad M^I = -M^{II}.$$

<sup>4</sup>Demonstra-se que a terceira lei de Newton pode ser estendida para sólidos.

Por outro lado, o equilíbrio de forças na parte II fornece

$$\sum_k \mathbf{F}_k^{\text{II}} + \mathbf{R}^{\text{II}} = \mathbf{0},$$

portanto,

$$\mathbf{R}^{\text{I}} = \sum_k \mathbf{F}_k^{\text{II}}.$$

O equilíbrio de momentos em relação à G fornece

$$\sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{\text{II}} + \sum_l \mathbf{M}_l^{\text{II}} + \mathbf{M}^{\text{II}} = \mathbf{0},$$

logo,

$$\mathbf{M}^{\text{I}} = \sum_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k^{\text{II}} + \sum_l \mathbf{M}_l^{\text{II}}.$$

□

Embora o teorema do corte tenha uma demonstração simples, o seu emprego facilita bastante o cálculo dos esforços solicitantes nas STs. Adicionalmente, ele permite que se desenvolva a idéia intuitiva de transmissão de esforços nas estruturas abertas.

### 3.4 Tensão

#### Definição — tensão de Cauchy

Seja  $V$  um sólido em equilíbrio sob a ação de esforços externos, Fig. 13. Seja  $P$  um ponto qualquer de  $V$  e sejam I e II as duas partes em que o sólido fica dividido quando ele é interceptado por um plano imaginário  $\alpha$  passando por  $P$ . Seja  $A$  a figura plana resultante da intersecção de  $V$  e o plano  $\alpha$ .

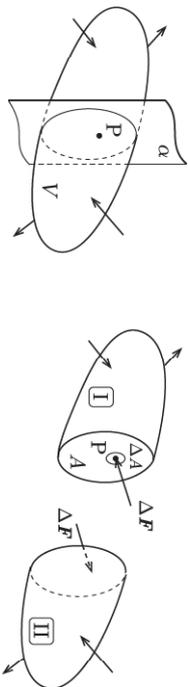


Fig. 13: Sólido  $V$  interceptado por um plano imaginário  $\alpha$  e o equilíbrio de suas partes.

Se o sólido  $V$  está em equilíbrio, suas partes I e II também estão em equilíbrio. Como os esforços externos em I não estão necessariamente equilibrados, evidencia-se a existência de

esforços transmitidos de II para I através de  $A$  que possibilitam o equilíbrio. Esses esforços, por aparecerem no interior do corpo, são chamados de *esforços internos*. A distribuição dos esforços internos na ST é desconhecida e sua determinação é um dos objetivos da Resistência dos Materiais. Admitiremos que seja sempre possível calcular sua resultante de força em uma pequena área  $\Delta A$  ao redor do ponto  $P$  e que o momento correspondente tenda a zero quando  $\Delta A$  tender a zero.

Seja  $\Delta \mathbf{F}$  a resultante dos esforços internos exercidos pela parte II na parte I e transmitidos através da área  $\Delta A$  ao redor de  $P$ . A lei da ação e reação garante que a resultante exercida por I em II é igual e de sinal oposto a  $\Delta \mathbf{F}$ , Fig. 13. A *tensão média* no ponto  $P$ , considerando o plano  $\alpha$  e a área  $\Delta A$ , é definida por

$$\rho_m(P, \alpha, \Delta A) = \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}.$$

Admitindo que distribuição dos esforços internos na seção seja contínua, definimos *vetor tensão* no ponto  $P$  e no plano  $\alpha$  por

$$\rho(P, \alpha) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}.$$

Diferentemente do conceito de vetor aplicado, o vetor tensão  $\rho$  depende também do plano  $\alpha$ . Contudo, observamos que fixado o ponto e o plano, e somente neste caso, podemos lidar com  $\rho$  usando a álgebra vetorial.

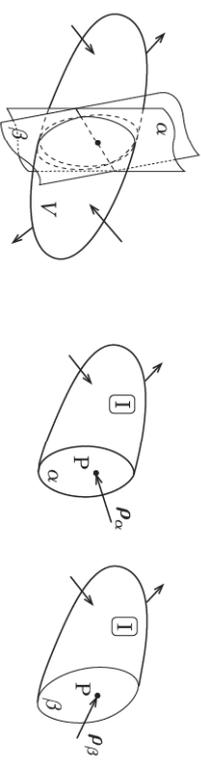


Fig. 14: Vetores de tensão no mesmo ponto, mas em planos distintos.

Uma abordagem mais abrangente desenvolvida por Cauchy permite representar as componentes do vetor tensão  $\rho$  no ponto  $P$  em função do plano  $\alpha$ . Essa abordagem faz uso de uma entidade matemática denominada tensor e dá origem ao tensor das tensões  $\mathbf{T}$ .

#### Componentes de $\rho$ associadas ao plano $\alpha$

Fixado o plano  $\alpha$ , ou equivalentemente o seu versor normal externo  $\mathbf{n}$ , é usual decompormos o vetor tensão  $\rho$  no ponto  $P$  nos vetores normal  $\sigma$  e tangencial  $\tau$  ao plano, denominados *vetor*

tensão normal e vetor tensão tangencial ou de cisalhamento, Fig. 15-a. A magnitude do vetor normal, denominada *tensão normal*, é dada pelo produto escalar<sup>5</sup>

$$\sigma = \rho \cdot \mathbf{n}; \tag{3.4}$$

enquanto, a *tensão tangencial* ou de *cisalhamento*,  $\tau = \|\boldsymbol{\tau}\|$ , é obtida por

$$\tau = \sqrt{\|\boldsymbol{\rho}\|^2 - \sigma^2} = \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} - (\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n})^2}. \tag{3.5}$$

Na Resistência dos Materiais, é conveniente trabalharmos com as componentes  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{zx}$  de  $\boldsymbol{\tau}$  medidas nas direções dos eixos  $y$  e  $z$  contidos no plano da seção, Fig. 15-b. O primeiro índice de  $\tau$  indica o plano de atuação e o segundo, a sua direção.

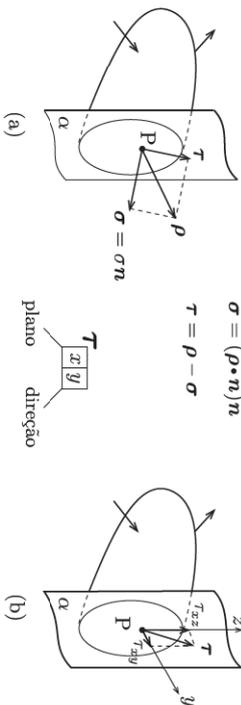


Fig. 15: (a) Tensão normal  $\sigma$  e tensão tangencial  $\boldsymbol{\tau}$ ; (b) decomposição da tensão tangencial.

### Convenções de sinais

A tensão normal  $\sigma$  é positiva quando ela for de tração e negativa quando de compressão. No caso plano, a tensão tangencial é positiva quando tende a girar o plano em que atua no sentido horário. As convenções de sinais estão indicadas na Fig. 16 para o caso plano. Observe que elas fornecem sinais idênticos para as tensões nas seções opostas das partes I e II do sólido, satisfazendo implicitamente o princípio da ação e reação.

<sup>5</sup>O produto escalar dos vetores  $\boldsymbol{\rho} = \rho_x \mathbf{i} + \rho_y \mathbf{j} + \rho_z \mathbf{k}$  e  $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$  na base ortonormal  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  é dado por:

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{n} = \rho_x n_x + \rho_y n_y + \rho_z n_z;$$

enquanto o módulo do vetor  $\boldsymbol{\rho}$  é definido por

$$\|\boldsymbol{\rho}\| = \sqrt{\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}}.$$

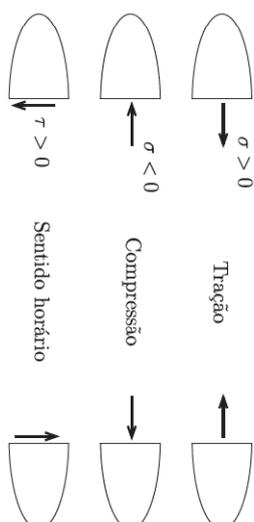


Fig. 16: Convenção de sinais.

### Unidades

A tensão tem unidade de força distribuída por unidade de área ( $[F]/[L]^2$ ). No Sistema Internacional (SI), a unidade é denominada Pascal (Pa = N/m<sup>2</sup>). Em virtude do pequeno valor desta unidade, é usual empregarmos unidades que são múltiplos de várias ordens de magnitude nas aplicações da Resistência dos Materiais. Por exemplo, MPa = 10<sup>6</sup> Pa (megapascal) e kN/cm<sup>2</sup> = 10 MPa. No sistema técnico, é comum o uso de kgf/cm<sup>2</sup> e tf/m<sup>2</sup> = 10<sup>3</sup> kgf/m<sup>2</sup> = 10<sup>-1</sup> kgf/cm<sup>2</sup>. As seguintes relações são úteis para converter as unidades de tensão:

$$\begin{aligned} 1 \text{ MPa} &= 0,1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}; \\ 1 \text{ MPa} &= \frac{1}{9,81 \times 10^{-2}} \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \approx 10 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}; \\ 1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} &= 10 \text{ MPa} \approx 0,1 \frac{\text{tf}}{\text{cm}^2} = 100 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}. \end{aligned}$$

## 3.5 Relações entre os Esforços Solicitantes e as Componentes de Tensão

Por definição, os esforços solicitantes numa seção transversal correspondem às resultantes de força e momento, expressas no centro de gravidade G<sup>6</sup>, das tensões que atuam no plano da seção. Para um elemento de área dA situado no quadrante positivo, temos em relação a G,

<sup>6</sup>Mais adiante, quando o momento  $M_x$  for substituído pelo momento de torção,  $M_T$ , as forças cortantes passarão a ser definidas no centro de cisalhamento, ou centro de torção, da ST.

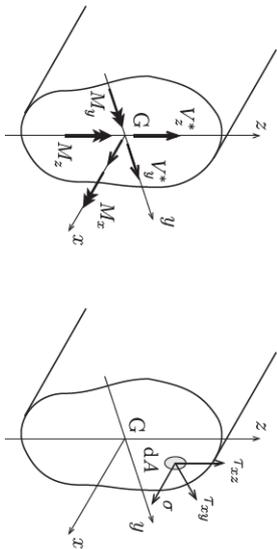


Fig. 17: Esforços solicitantes e componentes de tensão na seção transversal.

conforme indica a Fig. 17,

$$\begin{aligned}
 dN &= \sigma dA, & dV_y^* &= \tau_{xy} dA, & dV_z^* &= \tau_{xz} dA, \\
 dM_y &= \sigma z dA, & dM_z &= -\sigma y dA, & dM_x &= (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA
 \end{aligned}$$

em que os sinais dos momentos são obtidos usando a regra da mão direita e, excepcionalmente, o asterisco é usado para indicar forças cortantes concordando com os sentidos dos respectivos eixos<sup>7</sup>. Integrando na seção transversal, obtemos

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma dA, & V_y^* &= \int_A \tau_{xy} dA, & V_z^* &= \int_A \tau_{xz} dA, \\
 M_y &= \int_A \sigma z dA, & M_z &= -\int_A \sigma y dA, & M_x &= \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Repare que obter os esforços solicitantes uma vez conhecidas as tensões é relativamente simples. As relações contrárias requerem, além das equações de equilíbrio, hipóteses de distribuição de tensões.

## 4 Apoios

*Apoios* são dispositivos pontuais que vinculam a estrutura a outros sistemas estruturais restringindo seu movimento. Existem três tipos básicos de apoio:

<sup>7</sup>Lembrar que o sinal da força cortante foi definido a partir do ponto de vista do observador e não dos sentidos dos eixos na Seção 3.3.

**apoio simples** (*articulação móvel*) — impede deslocamento na direção normal a um plano estabelecido;

**apoio fixo** (*articulação fixa*) — impede qualquer deslocamento do ponto;

**engaste** (*engastamento*) — impede qualquer deslocamento e rotação do ponto.

A Tabela 1 contém as representações usuais dos apoios e as reações mobilizadas. Note que o número de reações é sempre igual ao número de vínculos, ou seja, ao número de restrições impostas ao movimento do ponto. A decomposição em componentes justifica-se quando a direção da reação é desconhecida. Os vínculos de deslocamento mobilizam *forças* reativas, enquanto os vínculos de rotação mobilizam *momentos* reativos. Combinações de vínculos originam outros tipos de apoio, como por exemplo engastes móveis nas direções longitudinal e transversal ao eixo da barra, junto ao engastamento, Fig. 18.

Tabela 1: Tipos básicos de apoio no plano.

Apoio	Modelo físico	Representações	Reações
Simple			
Fixo			
Engaste			

Na representação de apoios de estruturas tridimensionais, uma combinação muito maior de vínculos é possível. Uma prática corrente consiste em indicar os vínculos de deslocamento por

pequenas barras bi-articuladas na direção vinculada, e os de rotação por ângulos representando os planos vinculados, Fig. 19.

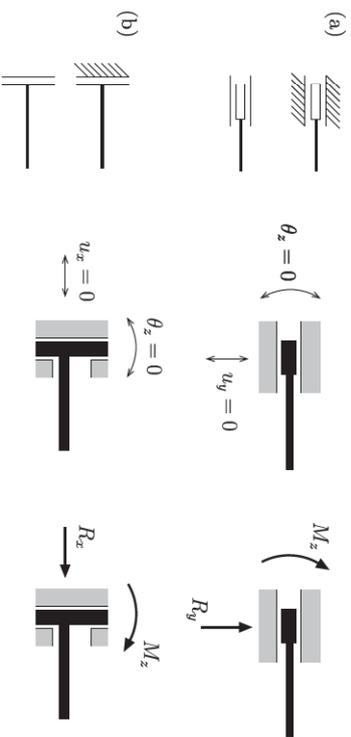


Fig. 18: Engastes móveis nas direções (a) Longitudinal e (b) transversal à barra.

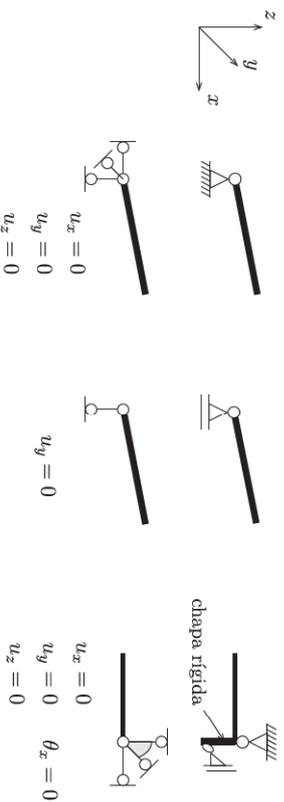


Fig. 19: Representação tridimensional dos apoios.

## 5 Classificação das Estruturas Reticuladas quanto à Estaticidade

Classificamos as estruturas reticuladas quanto à estaticidade em:

**Hipostáticas** Estruturas em que o número de equações da estática é maior que o de esforços incógnitos.

Nas estruturas hipostáticas, os vínculos internos e externos são insuficientes para impedir movimentos de corpo rígido da estrutura ou de algum trecho em seu interior. O equilíbrio

estático é possível apenas sob a ação de determinadas ações, e mesmo assim ele é instável. As estruturas hipostáticas também são denominadas *mecanismos*.

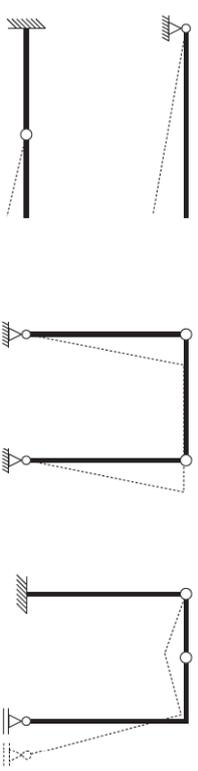


Fig. 20: Estruturas hipostáticas.

**Isostáticas** Também conhecidas por *estaticamente determinadas*, são estruturas em que as reações e os esforços solicitantes em qualquer seção transversal (ST) ficam completamente determinados pelas equações da estática.

Consequentemente, as distribuições dos esforços solicitantes<sup>8</sup> independem tanto da forma da seção transversal quanto das propriedades dos materiais que constituem a estrutura. Este fato permite obtermos os esforços solicitantes antes de especificarmos os materiais e as dimensões da seção a resisti-los.

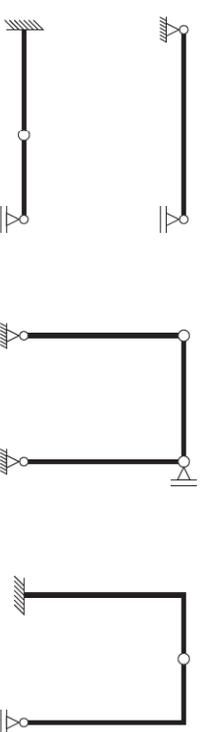


Fig. 21: Estruturas isostáticas.

**Hiperestáticas** Estruturas em que as equações de equilíbrio não bastam para determinarmos os esforços solicitantes em todas as suas STs, sendo necessário a consideração da deformabilidade da estrutura na resolução.

Se o número de reações de apoio em uma estrutura hiperestática é maior que o de equações de equilíbrio<sup>9</sup> a estrutura é dita *externamente hiperestática*. Fig. 22. Se a estrutura permanecer indeterminada uma vez conhecidos todos os esforços reativos, ela é dita *internamente hiperestática*.

<sup>8</sup> As deformações devem ser pequenas para que as equações de equilíbrio possam ser escritas na configuração indeformada.

<sup>9</sup> Considerando as equações fundamentais da estática e as condições impostas na estrutura, como a de momento nulo nas articulações.

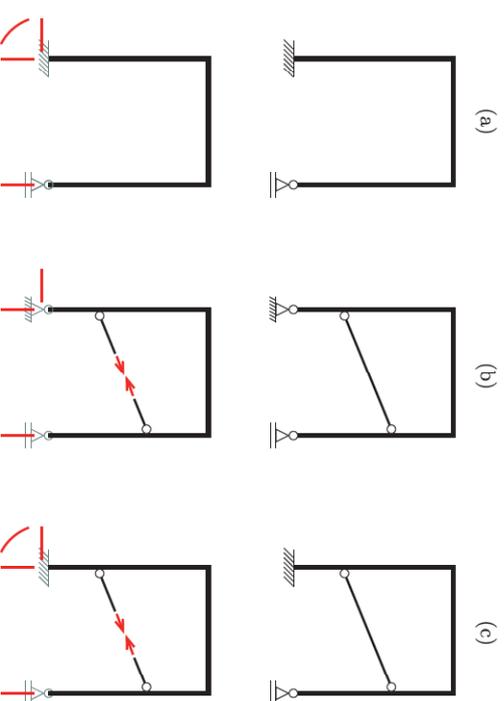


Fig. 22: Estruturas hiperestáticas: (a) externamente, (b) internamente, (c) interna- e externamente.

**Críticas** Estruturas cuja verificação do equilíbrio requer que as equações da estática sejam escritas na configuração deformada. O equilíbrio é possível por que elas conseguem mobilizar, na configuração deformada, esforços internos e esforços reativos capazes de equilibrar os esforços aplicados.

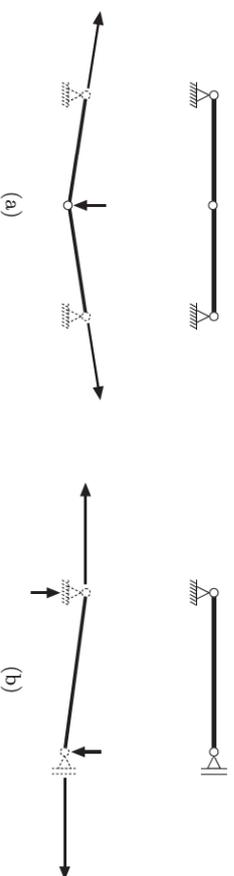


Fig. 23: Estruturas críticas: mobilização de (a) forças normais inclinadas e (b) forças binárias nos apoios.

**Nota 1** A classificação quanto à estaticidade é uma característica da estrutura e *independe* do carregamento.

Muitas vezes o reconhecimento do tipo de estrutura é mais simples se examinarmos os movimentos de corpo rígido<sup>10</sup> da estrutura e a vinculação (interna e externa) capaz de restringi-los.

- Uma estrutura **hipostática** apresenta um ou mais movimentos de corpo rígido, podendo envolver toda a estrutura ou apenas parte dela.
- Uma estrutura **isostática** não apresenta movimentos de corpo rígido, mas passa a apresentar-se um vínculo qualquer for eliminado.
- Uma estrutura **hiperestática** não apresenta movimento de corpo rígido e continua não apresentando se um ou mais vínculos, denominados *redundantes* ou *excedentes*, forem eliminados.
- Uma estrutura **crítica** apresenta uma tendência de movimento em relação ao qual a estrutura não opõe resistência na configuração indeformada, mas começa a opor assim que o movimento se inicia. Nesta situação, a mobilização da estrutura ocorre gradativamente com grande não-linearidade entre as deformações e os deslocamentos.

As estruturas planas com até dois vínculos externos são necessariamente hipostáticas, entretanto, um número maior de vínculos não implica em que a estrutura seja isostática ou hiperestática, Fig. 24.

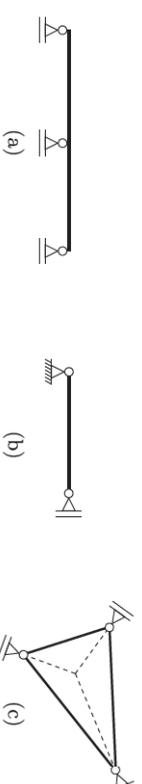


Fig. 24: Estruturas planas com três vínculos: (a) hipostática, (b) e (c) críticas.

## Grau de Hiperestaticidade

*Grau de hiperestaticidade* (GH) é o número de vínculos redundantes (externos e internos) que devem ser removidos para que a estrutura se torne estaticamente determinada (isostática).

<sup>10</sup>Movimentos sem deformação, decomponíveis em movimentos de translação e rotação da estrutura ou de seus elementos estruturais.

Simplificadamente, ele corresponde à diferença entre o número de esforços incógnitos, externos e internos, e o número de equações da estática,

$$GH = \left[ \begin{array}{c} \text{Núm. de} \\ \text{vínculos} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{Núm. de equações} \\ \text{da estática} \end{array} \right].$$

As equações não se restringem às equações de equilíbrio (6 no espaço ou 3 no plano) pois condições estáticas na forma de momentos ou forças podem ser impostas. Este é o caso da articulação no meio de uma barra pois ela implica em um momento fletor nulo na ST correspondente. Na definição de grau de hiperestaticidade está implícito que a estrutura tenha pelo menos o número mínimo de vínculos impedindo os movimentos de corpo rígido.

## Agradecimentos

O autor agradece os comentários e sugestões do Prof. Henrique de Britto Costa.

## Referências

- [1] Lindenberq, N., Henrique, *PEF 124: Introdução à Mecânica das Estruturas*, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1996.
- [2] Morilla, J. C. and Pereira, B. B., Filho. *Introdução à Resistência dos Materiais*. Preliminar ed., São Paulo, 1996.
- [3] Ricardo, O. G. *Introdução à Resistência dos Materiais*. Editora da Universidade de Campinas, Campinas, 1977.
- [4] Souza Lima, V. M. *Introdução à Resistência dos Materiais*. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - EPUSP, São Paulo, 1955.
- [5] van Langendonck, T. *Vocabulário de Teoria das Estruturas*. Associação Brasileira de Cimento Portland, São Paulo, 1967.

## Index

- |                                |                                    |
|--------------------------------|------------------------------------|
| apoio, 15                      | hiperestática, 18, 20              |
| fixo, 16                       | hipostática, 17, 20                |
| simples, 15                    | internamente hiperestática, 18     |
| arco, 3                        | isostática, 18, 20                 |
| articulação                    | linear, 2                          |
| fixa, 16                       | plana, 3                           |
| móvel, 16                      | reticulada, 3                      |
| barra, 3, 4                    | folha, 3                           |
| curva, 4                       | força                              |
| prismática, 4                  | concentrada, 7                     |
| reta, 4                        | cortante, 9                        |
| bloco, 3                       | de contato, 7                      |
| casca, 3                       | de massa, 7                        |
| chapa, 3                       | de superfície, 7                   |
| eixo longitudinal, 4           | de volume, 7                       |
| distribuída sobre linha, 7     |                                    |
| elemento estrutural, 4         | normal, 9                          |
| engastamento, 16               | gran de hiperestaticidade (GH), 20 |
| engaste, 16                    | mecanismo, 18                      |
| equilíbrio, 5                  | momento                            |
| esforço, 6                     | de torção, 9                       |
| ativo, 8                       | fletor, 9                          |
| externo, 8                     | nó, 5                              |
| interno, 8, 12                 | articulado, 5                      |
| reativo, 8                     | rígido, 5                          |
| solicitante, 8, 9              | parte resistente, 1                |
| estrutura, 1                   | placa, 3                           |
| crítica, 19, 20                | reação, 8                          |
| de superfície, 2               | seção transversal, 4               |
| de volume, 3                   |                                    |
| estaticamente determinada, 18  |                                    |
| externamente hiperestática, 18 |                                    |

- tensão, 8, 11
  - convenção de sinais, 13
  - de cisalhamento, 13
  - média, 12
  - normal, 13
  - tangencial, 13
- teorema
  - do corte, 9
  - dos esforços solicitantes, 9
- trecho, 5
- vetor tensão, 12
  - de cisalhamento, 13
  - normal, 12
  - tangencial, 13
- vínculo
  - excedente, 20
  - redundante, 20