Métodos numéricos para o cálculo de sistemas de equações não lineares

Introdução

Um sistema de equações não lineares é um sistema constituído por combinação de funções algébricas e funções transcendentes, tais como a função exponencial, a função logaritmo, as funções trigonométricas, etc.

Devido à não linearidade dos sistemas de equações não lineares eles não podem ser reduzidos à forma matricial $Ax = b$, de modo que nem o cálculo direto pelo método de eliminação gaussiana nem por inversão de matrizes pode ser aplicado. Outra dificuldade vem da diversidade de funções transcendentes que impede a elaboração de algoritmo que possa ser aplicado a um sistema de equações não lineares genérico.

Um sistema de três equações não lineares contendo três incógnitas *x*, *y*, *z* pode ser escrito na forma padrão como:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 0 \\ g(x,y,z) &= 0 \\ h(x,y,z) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

A Tabela 1 apresenta exemplos de sistemas de equações não lineares expressos na forma padrão na coluna direita, de acordo com a equação (1).

Tabela 1. Exemplos de sistemas de equações não lineares

Sistema	**Forma padrão**
$x - ln\, y = 2$	$f(x,y) = x - ln\, y - 2$
$x^2 + y = 0$	$g(x,y) = x^2 + y$
$x_1 + x_2^3 - x_3 = 1$	$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2^3 - x_3 - 1$
$e^{x_1} - 2x_2 + \sqrt{x_3} = 0$	$g(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1} - 2x_2 + \sqrt{x_3}$
$x_1 + x_2 - x_3 = 5$	$h(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 - x_3 - 5$

Significado gráfico da solução do sistema de equações não lineares

A solução de um sistema de equações não lineares é o *lócus* no qual as curvas representadas pelas equações não lineares se interceptam. A Fig. 1 apresenta o gráfico contendo as curvas das equações não lineares

$$\begin{aligned} -x^2 + 2y^2 &= 4 \\ 2x^2 - y &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

que possui duas raízes no intervalo [-2; 2].

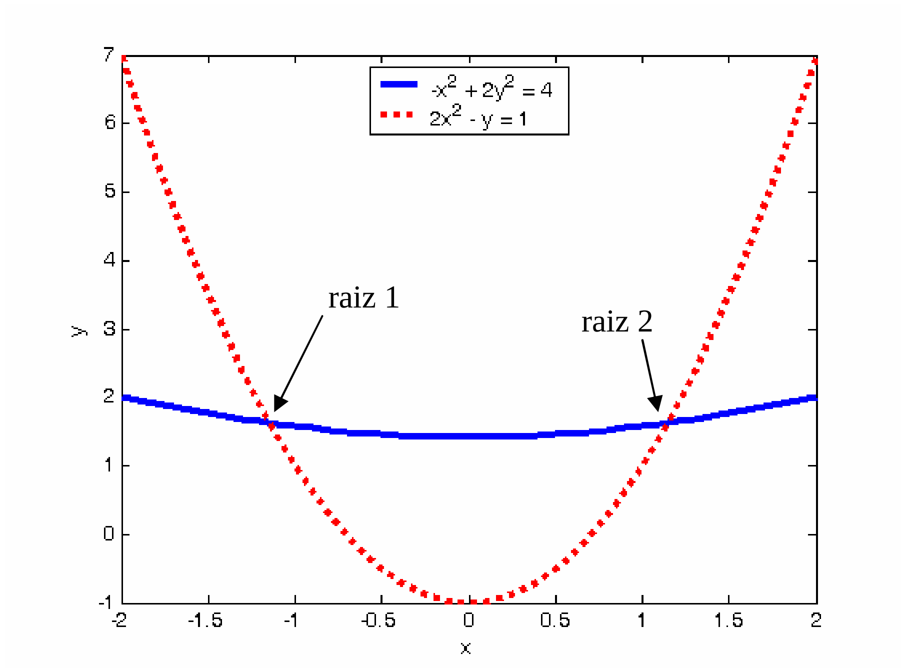

Fig. 1. Gráfico mostrando o *locus* da solução do sistema de equações não lineares.

Método de Gauss-Seidel

A solução do sistema de equações não lineares pelo método de Gauss-Seidel é feito da mesma forma que na solução de um sistema de equações lineares. Considere um sistema com duas equações não lineares:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Podemos escrever o sistema de equações (3) na forma:

$$\begin{aligned} x &= f^*(x,y) \\ y &= g^*(x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

As equações (4) são as funções para o cálculo iterativo pelo método de Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= f^*(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= g^*(x_{i+1}, y_i) \end{aligned}, \; i = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots \tag{5}$$

Para $i = 0$, escolhemos arbitrariamente os valores iniciais x_0 e y_0.

Critério de convergência para o método de Gauss-Seidel:

O critério de convergência do método de Gauss-Seidel é satisfeito quando o desvio absoluto nas variáveis x e y for inferior ao o erro especificado ε:

$$\begin{aligned} |x_{i+1} - x_i| &< \varepsilon \\ |y_{i+1} - y_i| &< \varepsilon \end{aligned} \tag{6}$$

Exemplo
Cálculo da solução do sistema de equações não lineares (2) pelo método de Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} -x^2 + 2y^2 &= 4 \\ 2x^2 - y &= 1 \end{aligned} \qquad (2)$$

Solução
Escrevemos o sistema de equações isolando as variáveis *x* e *y*, respectivamente na primeira e na segunda equação de (2):

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{2y^2 - 4} \\ y &= 2x^2 - 1 \end{aligned} \qquad (7)$$

O sinal ± na primeira equação é utilizado, respectivamente para o cálculo das raízes positiva e negativa em (2). Vamos considerar o sinal negativo na primeira equação em (7) para o cálculo da raiz negativa pelo método de Gauss-Seidel:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= -\sqrt{2y_i^2 - 4} \\ y_{i+1} &= 2x_{i+1}^2 - 1 \end{aligned} \qquad (8)$$

Vamos escolher o valor inicial y_0 = 2 por inspeção do gráfico mostrado na Fig. 1. A Tabela 2 apresenta os resultados do cálculo para cinco iterações, mostrando que o cálculo é divergente pois tanto os valores das variáveis como os desvios δ_x e δ_y são crescentes.

Tabela 2. Resultados do cálculo do sistema de equações não lineares pelo método de Gauss-Seidel

i	x_i	y_i	δ_x	δ_y
0	-1	2		
1	-2	7	1	5
2	-9,6954	187	7,6954	180
3	-264,45	139867	254,755	139680
4	-197802	$7{,}8.10^{10}$	197537,4	$7{,}8.10^{10}$
5	$-1{,}1.10^{11}$	$2{,}5.10^{22}$	$1{,}1.10^{11}$	$2{,}5.10^{22}$

Para que o cálculo pelo método de Gauss-Seidel seja convergente, vamos permutar a ordem das equações no sistema (2):

$$\begin{aligned} 2x^2 - y &= 1 \\ -x^2 + 2y^2 &= 4 \end{aligned} \qquad (9)$$

A partir do sistema permutado (9), escrevemos as equações para o cálculo iterativo da raiz negativa de *x*:

$$\begin{aligned} x &= -\sqrt{0{,}5\,(y+1)} \\ y &= \sqrt{0{,}5\,(x^2+4)} \end{aligned} \qquad (10)$$

Os resultados do cálculo convergente estão apresentados na Tabela 3. Com seis iterações, a solução do sistema de equações não lineares (2) é dado por x = -1,1468 e y = 1,6302, com desvio inferior a 10^{-4}.

Tabela 3. Resultados do cálculo do sistema de equações não lineares pelo método de Gauss-Seidel

i	x_i	y_i	δ_x	δ_y
0	-1	2		
1	-1,2247	1,6583	0,2247	0,3417
2	-1,1529	1,6324	0,0719	0,0260
3	-1,1473	1,6304	0,0056	0,0020
4	-1,1468	1,6302	0,0004	0,0002
5	-1,1468	1,6302	$3{,}3.10^{-5}$	$1{,}2.10^{-5}$

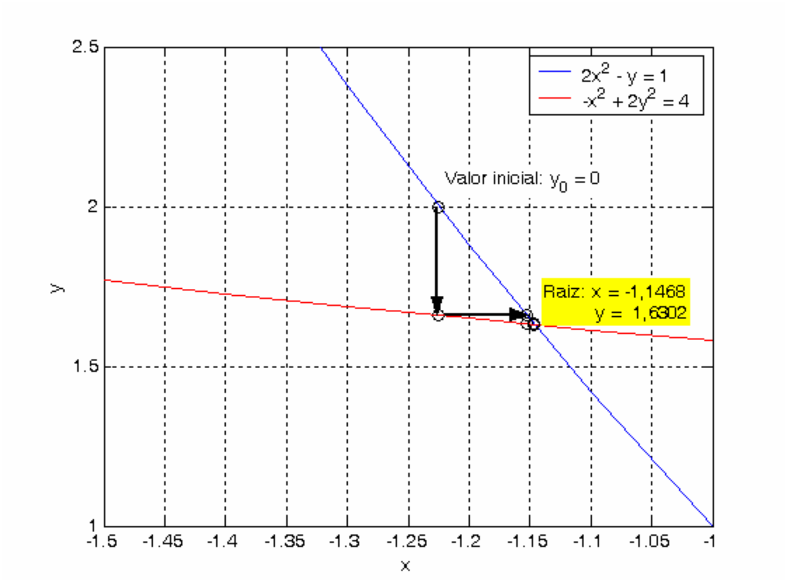

Fig. 2. Gráfico mostrando a sequência dos valores calculados pelo método de Gauss-Seidel convergente.

Roteiro Matlab

```
% Solucao do sistema não linear: metodo de Gauss-Seidel
x0 = -1; y0 = 2;  % Valor inicial
dx = 1; dy = 1; i = 0; erro = 1e-4;  % Definição dos desvios iniciais
while dx > erro & dy > erro
    disp(['i = ' num2str(i) '  x = ' num2str(x0) '  y = ' num2str(y0)]);
    xn = -sqrt(0.5*(y0 + 1));
    yn = sqrt(0.5*(xn.^2 + 4));
    dx = abs(xn - x0); dy = abs(yn - y0);
    x0 = xn; y0 = yn; i = i + 1;
end
```

Método de Newton-Raphson

Devido ao fato que o método de Gauss-Seidel nem sempre converge, utiliza-se o método Newton-Raphson, que é baseado na derivada das funções e se existir uma raiz do sistema próxima ao valor inicial, o método irá convergir para a solução.

O método de Newton-Raphson, que foi desenvolvido para o cálculo de raízes de equações não lineares, também pode ser aplicado para o cálculo iterativo da solução de sistemas de equações não lineares. Vamos desenvolver o método para um sistema de duas equações não lineares:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Expandindo as funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ em séries de Taylor em torno de (x_i, y_i) vem:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_i,y_i) + f_x(x_i,y_i)(x-x_i) + f_y(x_i,y_i)(y-y_i) + \ldots = 0 \\ g(x,y) &= g(x_i,y_i) + g_x(x_i,y_i)(x-x_i) + g_y(x_i,y_i)(y-y_i) + \ldots = 0 \end{aligned}$$

nas quais:

$$f_x(x_i,y_i) \equiv \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_i,y_i)} \quad \text{e} \quad f_y(x_i,y_i) \equiv \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_i,y_i)}$$

$$g_x(x_i,y_i) \equiv \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_i,y_i)} \quad \text{e} \quad g_y(x_i,y_i) \equiv \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_i,y_i)}$$

Truncando as séries de Taylor até os termos de 1ª ordem

$$\begin{aligned} f_x(x_i,y_i)\,\Delta x_i + f_y(x_i,y_i)\,\Delta y_i &= -f(x_i,y_i) \\ g_x(x_i,y_i)\,\Delta x_i + g_y(x_i,y_i)\,\Delta y_i &= -g(x_i,y_i) \end{aligned}$$

Escrevendo na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f_x(x_i,y_i) & f_y(x_i,y_i) \\ g_x(x_i,y_i) & g_y(x_i,y_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_i,y_i) \\ -g(x_i,y_i) \end{bmatrix} \tag{12}$$

A solução do sistema de equações lineares (12) pode ser utilizado na solução do sistema de equações não lineares empregando o seguinte esquema iterativo:

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} \tag{13}$$

A solução é obtida quando o critério de convergência for satisfeito:

$$\begin{aligned} \Delta x_i &< \varepsilon \\ \Delta y_i &< \varepsilon \end{aligned} \tag{14}$$

Exemplo

Cálculo da solução do sistema de equações não lineares (2) pelo método de Newton-Raphson:

$$\begin{aligned} -x^2 + 2y^2 &= 4 \\ 2x^2 - y &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Solução

Primeiramente temos que escrever o sistema de equações (2) na forma padrão:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -x^2 + 2y^2 - 4 \\ g(x,y) &= 2x^2 - y - 1 \end{aligned} \tag{15}$$

Para calcular os incrementos Δx_i e Δy_i vamos calcular as expressões das derivadas parciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= -2x, \quad f_y(x,y) = 4y \\ g_x(x,y) &= 4x, \quad g_y(x,y) = -1 \end{aligned} \tag{16}$$

Substituindo (15) e (16) na equação (12), resulta o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} -2x_i & 4y_i \\ 4x_i & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_i^2 + 2y_i^2 - 4 \\ 2x_i^2 - y_i - 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

A solução de (17) fornece os valores dos incrementos Δx_i e Δy_i que serão usados em:

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} \tag{13}$$

Cálculo numérico passo-a-passo

Iniciando o cálculo de (17) com os valores iniciais: $i = 0$, $x_0 = -1$ e $y_0 = 2$, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A solução deste sistema fornece: $\Delta x_0 = -0{,}1667$ e $\Delta y_0 = -0{,}3333$. Substituindo em (13):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}1667 \\ -0{,}3333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}1667 \\ 1{,}6667 \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores obtidos acima, $i = 1$, $x_1 = -1{,}1667$ e $y_1 = 1{,}6667$, na equação (17), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 2{,}3333 & 6{,}6667 \\ -4{,}6667 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1944 \\ -0{,}0556 \end{bmatrix}$$

A solução deste sistema fornece: $\Delta x_1 = 0{,}0196$ e $\Delta y_1 = -0{,}0360$. Substituindo em (13):

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}1667 \\ 1{,}6667 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0196 \\ -0{,}0360 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}1470 \\ 1{,}6306 \end{bmatrix}$$

Novamente, tomando-se os valores calculados acima, i = 2, x_2 = -1,1470 e y_2 = 1,6306, na equação (17), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 2{,}2941 & 6{,}5225 \\ -4{,}5882 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0022 \\ -0{,}0008 \end{bmatrix}$$

A solução deste sistema fornece: $\Delta x_2 = 0{,}0003$ e $\Delta y_2 = -0{,}0004$. Substituindo em (13):

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}1470 \\ 1{,}6306 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0002 \\ -0{,}0004 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}1468 \\ 1{,}6302 \end{bmatrix}$$

Na próxima iteração (i = 4), calculada a partir dos valores i = 3, x_3 = -1,1468 e y_3 = 1,6302 obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{bmatrix} 2{,}2936 & 6{,}5208 \\ -4{,}5871 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_3 \\ \Delta y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3{,}0.10^{-7} \\ -1{,}4.10^{-7} \end{bmatrix}$$

Como a solução deste sistema fornece os valores: $\Delta x_3 = 4{,}3.10^{-8}$ e $\Delta y_3 = -6{,}2.10^{-8}$, que são os valores dos desvios do método de Newton-Raphson, o cálculo das raízes do sistema de equações não lineares (2) convergiu para: x = -1,1468 e y = 1,6302.

Os resultados do cálculo passo-a-passo estão resumidos na Tabela 4.

Tabela 4. Resultados do cálculo do sistema de equações pelo método de Newton-Raphson

i	x_i	y_i	δ_x	δ_y
0	-1	2		
1	-1,1667	1,6667	0,1667	0,3333
2	-1,1470	1,6306	0,0196	0,0360
3	-1,1468	1,6302	0,0003	0,0004
4	-1,1468	1,6302	$4{,}3.10^{-8}$	$6{,}2.10^{-8}$

Observa-se deste exemplo que o método de Newton-Raphson converge rapidamente para a solução, diferentemente do método de Gauss-Seidel, cuja convergência e rapidez dependerão do sistema de equações não lineares.

Roteiro Matlab

```
% Sistema de equações não lineares: metodo de Newton-Raphson
x0 = -1; y0 = 2;
dx = 1; dy = 1; i = 0; erro = 1e-4;
while abs(dx) > erro & abs(dy) > erro
    disp(['i: ' num2str(i) ' x: ' num2str(x0) ' y: ' num2str(y0) ...
            ' dx: ' num2str(dx) ' dy: ' num2str(dy)]);
    A = [-2*x0 4*y0; 4*x0 -1];
    b = [x0.^2 - 2*y0.^2 + 4; -2*x0.^2 + y0 + 1];
    delta = A\b;
    dx = delta(1); dy = delta(2);
    xn = x0 + dx;
    yn = y0 + dy;
    x0 = xn; y0 = yn; i = i + 1;
end
```