Texto complementar nº 5

I. A Segunda Lei de Newton

Imagine a seguinte situação: você em um carro que está percorrendo a marginal do rio Pinheiros. Em determinados momentos a velocidade do carro aumenta, em outros ela diminui e ainda pode ficar constante (ou muito próximo disso) por alguns instantes, ou seja, com o passar do tempo a velocidade *varia*. Já vimos que a velocidade é uma grandeza física obtida a partir da *taxa de variação* da posição com o tempo: $v = \frac{dx}{dt}$.

Ótimo! E o que isso tem a ver com a variação da velocidade? Como a velocidade está variando no tempo, podemos obter a sua taxa de variação seguindo um raciocínio semelhante:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Esta é uma definição da Cinemática e a esta altura você pode estar se perguntando: derivei x uma vez e obtive a velocidade, derivei outra vez e tenho a aceleração, onde isso vai parar? Para nós, o processo acaba aqui. Acontece que o conceito de aceleração não fica restrito à Cinemática, ele tem um importante papel na Dinâmica naquilo que conhecemos como *Segunda Lei de Newton*. Em sua forma original, a Segunda Lei é representada da seguinte forma:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} = ma$$

com as duas últimas igualdades válidas apenas para corpos de massa constante. A grandeza $p = mv$ mede o quanto há de movimento no corpo e por isso é chamada de quantidade de movimento.

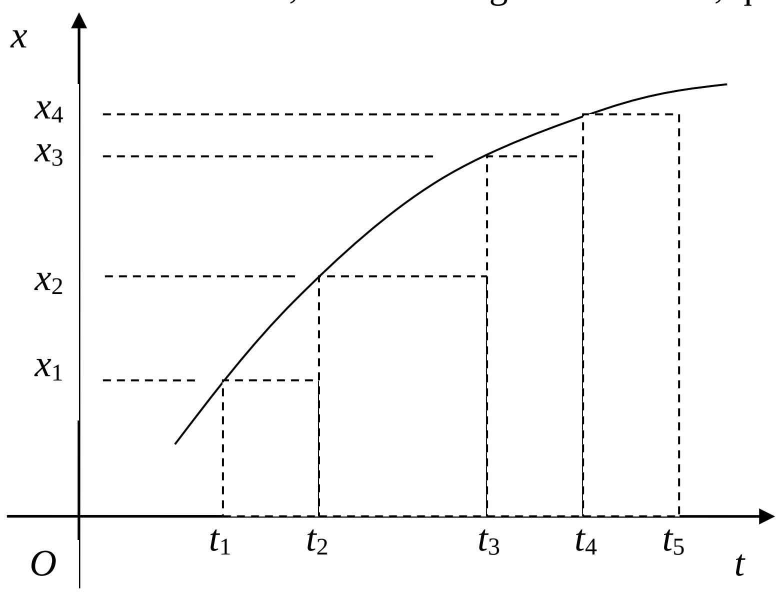
A Segunda Lei nos diz que as forças agindo sobre um objeto causam uma aceleração diretamente proporcional à intensidade da resultante dessas forças. A massa inercial m é o coeficiente de proporcionalidade entre as duas; em nosso dia a dia estão presentes objetos de massas tão pequenas como um grão de poeira (10^{-15} kg) até tão grandes quanto a do Sol ($2 \cdot 10^{30}$ kg). Percebam que o termo *dv/dt* – a taxa de variação da velocidade com o tempo – surge naturalmente como resultado de havermos considerado constante a massa do objeto. Devemos ter cuidado ao escrever uma equação como essa, pois nesse caso consideramos m constante, o que normalmente é uma excelente aproximação, mas nem sempre verdadeira. Essa lei também não corresponde a uma definição de força, uma vez que as leis de força dependem de outras propriedades da matéria e, à exceção da força gravitacional, sequer estão ligadas à massa do objeto.

II. Determinação da posição de um objeto por meio da área sob o gráfico de v(t).

Já vimos que os gráficos de posição e velocidade de um objeto em função do tempo estão relacionados. A velocidade, *v*, é a taxa de variação da posição pelo tempo, de maneira que quando *x(t)* é uma função crescente, *v* é positivo e quando *x(t)* é decrescente, *v* é negativo. Quantitativamente, definimos a velocidade como a inclinação da reta tangente ao gráfico de *x(t)*, que corresponde matematicamente à derivada da função e pode ser interpretada como a velocidade média num intervalo de tempo muito pequeno em torno do instante de interesse. Verificamos que é possível obter fórmulas para as derivadas das funções mais comuns, como as potências e as funções trigonométricas. Enfim, dado *x(t)*, podemos determinar *v(t)*.

Queremos aqui lidar com o processo inverso. Já que de *x(t)* podemos determinar *v(t)*, parece que será possível determinar *x(t)* a partir de *v(t)*. Veremos que quase podemos mesmo determinar a posição de um objeto a partir de sua velocidade. Acontece que, como a velocidade não está ligada à posição de um corpo, mas sim à variação de posição, tudo que podemos obter da velocidade é a **diferença** de posição em relação a uma posição inicial.

Para facilitar o acompanhamento da discussão, considere o gráfico ao lado, que representa a posição de um objeto, *x*, em função do tempo, *t*. Podemos dividir o movimento de um objeto em *n* pequenos deslocamentos sucessivos e, no gráfico ao lado, consideramos apenas 4 deslocamentos, entre os instantes de t_1 a t_5 marcados no eixo das abscissas; nesses instantes, o objeto está nas posições x_1 a x_5 , conforme o gráfico. Note que precisamos 5 tempos para 4 deslocamentos, porque definimos o deslocamento por meio da relação



$$\Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) \quad ,$$

onde a letra grega Δ (delta maiúsculo) vai ser usada freqüentemente nesta disciplina e no curso todo para significar a variação de uma grandeza.

Voltemos a considerar um número *n* de deslocamentos, Δx_1 , Δx_2 , ... , Δx_i , ... Δx_n , que se iniciaram nos instantes de tempo t_1 , t_2 , ... , t_i , ..., t_n . Chamando de Δt_i o intervalo de tempo em que ocorreu o deslocamento Δx_i , podemos relacionar os deslocamentos com as velocidades por meio da expressão

$$\Delta x_i \cong v(t_i)\Delta t_i \ ,$$

que se constitui numa aproximação boa quando o intervalo de tempo é suficientemente pequeno para que a velocidade seja aproximadamente constante no intervalo.

Podemos então montar o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
&x(t_2) - x(t_1) \cong v(t_1)\Delta t_1 \\
&x(t_3) - x(t_2) \cong v(t_2)\Delta t_2 \\
&\qquad\vdots \\
&x(t_{i+1}) - x(t_i) \cong v(t_i)\Delta t_i \\
&\qquad\vdots \\
&x(t_{n+1}) - x(t_n) \cong v(t_n)\Delta t_n \ .
\end{aligned}$$

Somando todas essas equações, nota-se que, na soma dos membros esquerdos, todas as posições intermediárias entre $x(t_{n+1})$ e $x(t_1)$ cancelam-se, resultando em

$$x(t_{n+1}) - x(t_1) \cong v(t_1)\Delta t_1 + v(t_2)\Delta t_2 + \cdots + v(t_i)\Delta t_i + \cdots + v(t_n)\Delta t_n \ ,$$

ou seja, o deslocamento total do corpo é, simplesmente, a soma dos produtos $v(t_i)\ \Delta t_i$ ao longo de todo o intervalo de tempo. Num gráfico de velocidade em função do tempo, esse produto é interpretado como a área de um retângulo, de altura $v(t_i)$ e largura Δt_i .[1] A soma desses retângulos aproxima a área sob a curva de $v(t)$, porém uma área que não pode ser obtida por medidas diretas com a régua porque, além de considerar as escalas do gráfico, quando $v(t)$ é negativo o deslocamento é negativo, de maneira que teremos que subtrair a área correspondente. Finalmente, veja que não obtivemos a posição do objeto, mas sim $x(t_{n+1}) - x(t_1)$, ou seja, o deslocamento em relação à posição inicial. No fundo isso era esperado, já que a velocidade depende da **variação** de posição, e não da posição, de um objeto.

A expressão acima é representada melhor usando o símbolo de somatório,

$$x(t_{n+1}) - x(t_1) \cong \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t_i \ .$$

No curso de cálculo será estudado que o limite dessa expressão, quando cada um dos deslocamentos sucessivos tende a zero, pode ser calculado exatamente. Esse valor limite é chamado de integral, sendo simbolizado por um S distorcido, $\int$. A fórmula fica assim:

$$x(t_{n+1}) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_{n+1}} v(t)dt \ .$$

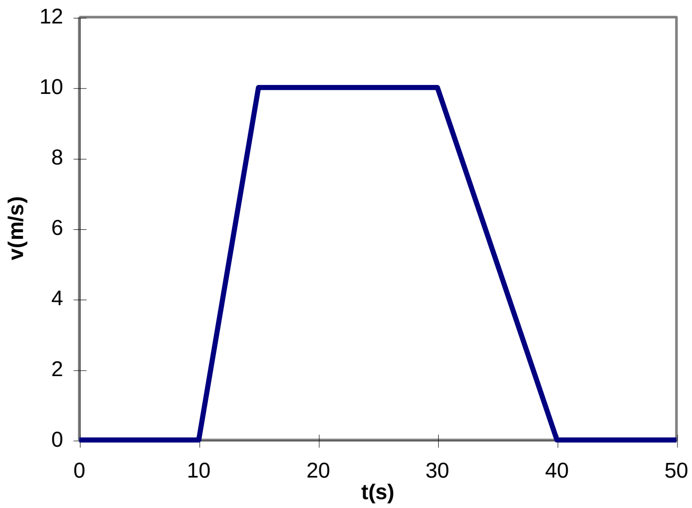
A integral pode ser determinada por meio de fórmulas analíticas, assim como fizemos com as derivadas. Neste momento, porém, nos concentraremos na interpretação do deslocamento como área sob a curva da velocidade.

[1] É bom perceber que o fato de ambas as grandezas terem dimensões físicas distintas exige que o termo “área” não seja tomado ao pé da letra, mais ou menos repetindo a situação que encontramos na definição da velocidade: velocidade é a inclinação da reta tangente ao gráfico de $x(t)$, mas não pode ser confundida com a tangente do ângulo dessa reta, embora ambas as grandezas possam ser interpretadas de modo quase idêntico – veja texto 1.

Exemplo 1. O motorista de um automóvel no trânsito urbano, parado em um farol, começa a acelerar em t = 10 s com aceleração constante e igual a 2,0 m/s^2 até atingir 36 km/h, mantendo essa velocidade por 15 s, quando avista o farol seguinte fechado e começa a frear, com aceleração constante e de módulo 1,0 m/s^2 , até parar completamente o veículo. (a) Faça um gráfico da velocidade em função do tempo. (b) Que distância o veículo percorreu entre as duas paradas? (c) Em que momento o veículo estava a 200 m do ponto de partida?

Solução.

(a) Vamos escolher o eixo orientado no sentido do deslocamento do veículo. Como ele alcançou 36 km/h = 10,0 m/s e a aceleração era 2,0 m/s^2, o veículo foi acelerado durante um intervalo de tempo de 5,0 s. Por um cálculo semelhante determinamos que a freada, com aceleração –1,0 m/s^2, durou 10 s.



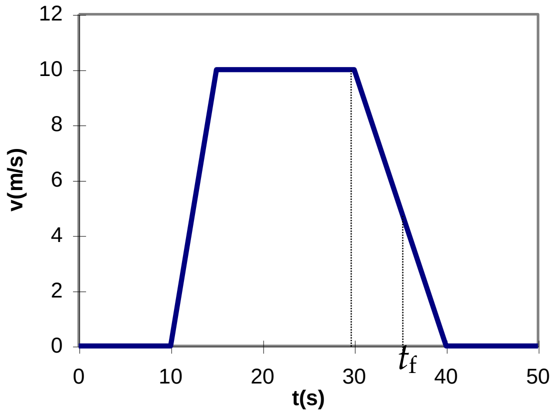
(b) O deslocamento entre as duas paradas corresponde à área sob a curva da velocidade. Desde que a figura forma um trapézio, calculamos essa área como

$$\text{deslocamento} = \frac{15+30}{2}\cdot 10 = 225\ \text{m}$$

(c) O veículo de fato passou por um ponto a 200 m do ponto de partida, porque o percurso total foi maior que esse, conforme o cálculo do item (b) acima. Ao invés de determinar a equação horária para qualquer *t*, que será complexa uma vez que o movimento tem aceleração variável, determinamos um intervalo de tempo curto em que o veículo passa por esse ponto e escrevemos uma equação mais detalhada apenas para esse intervalo. O deslocamento até t = 30 s, calculado por uma forma análoga à usada no item (b), é

$$\text{deslocamento(t = 0 ate t = 30s)} = \frac{15+20}{2}\cdot 10 = 175\ \text{m}\ .$$

Juntando com o resultado do item (b), vemos que o veículo está a 200 m do ponto de partida em algum instante compreendido entre t = 30 s e t = 40 s.

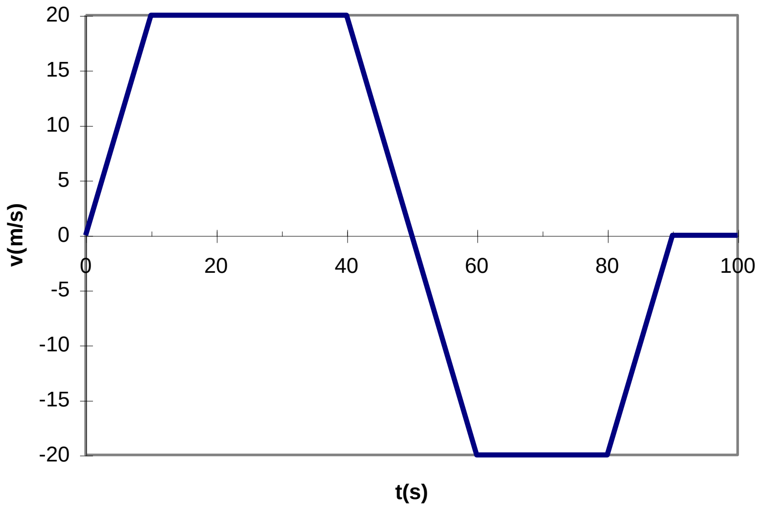


Na figura ao lado, marcamos com linha pontilhada a região do gráfico cuja área corresponde ao deslocamento entre t = 30 s e um certo instante de tempo t_f . O instante de tempo que buscamos corresponde a t_f desde que o deslocamento seja de 25 m (obtido pela diferença entre o ponto determinado pela questão, 200 m, e o deslocamento até t = 30 s, 175 m). A equação obtida impondo-se essa condição é

$$25 = \frac{v(30)+v(t_f)}{2}\cdot(t_f - 30) = \frac{10+10-(t_f - 30)}{2}\cdot(t_f - 30),$$

tendo sido calculada como a da área de um trapézio (que agora está deitado, a altura está na abscissa). Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos t_f = 32,9 s ≅ 33 s, que é o instante em que o veículo alcançou um ponto a 200 m do ponto de partida.

Exemplo 2. A figura abaixo representa, aproximadamente, a velocidade de um automóvel, deslocando-se ao longo de uma avenida em função do tempo.



a) Como você interpreta a mudança de sinal de velocidade em t = 50 s?
b) Em t = 70 s, o automóvel encontra-se a que distância do ponto em que estava em t = 20 s?
c) Em que instante o automóvel está de volta ao mesmo ponto por que passou em t = 20 s?
d) Sabendo que em t = 0 a posição do automóvel era x = 300 m, qual a posição do automóvel em t = 100 s ?

Solução.

a) A mudança de sinal da velocidade sempre indica inversão do sentido do movimento. Como o veículo atinge velocidades elevadas em ambos os sentidos, significa que ele fez um retorno na avenida.

b) O deslocamento é a área sob a curva no intervalo mencionado pelo problema, ou usando o símbolo matemático correspondente,

$$x(70) - x(20) = \int_{20}^{70} v(t')dt' \ .$$

A velocidade é positiva no início desse intervalo, tornando-se negativa no final. Tanto a parte positiva quanto a negativa têm a forma de trapézios, de maneira que calculamos

$$x(70) - x(20) = \frac{30+20}{2} \cdot 20 - \frac{20+10}{2} \cdot 20 = 200 \text{ m} \ .$$

Note que tanto faz subtrairmos a área do 2º trapézio como somarmos as parcelas utilizando um valor negativo para a velocidade no cálculo da parcela relativa ao 2º trapézio. Tudo o que temos a fazer é evitar falar em área negativa, desde que área é uma grandeza definida positiva.

c) Queremos determinar t_f de modo que a área sob a curva no intervalo $20 < t < t_f$ seja nula, ou melhor, que a área do trapézio formado pela curva entre $t = 20$ e $t = 50$ s seja igual à do trapézio formado pela curva entre $t = 50$ e $t = t_f$. Aproveitando a simetria da figura em relação a $t = 50$ s, vemos que, escolhendo $t_f = 80$ s, o trapézio formado pela curva entre $t = 50$ e $t = 80$ é idêntico ao formado pela curva entre $t = 20$ e $t = 50$ s. A resposta é, portanto,

$t_f = 80$ s.

Veja que, não fosse a simetria da figura, daria mais trabalho achar a resposta. Precisaríamos repartir a figura em pedaços cujas áreas fossem mais fáceis de calcular, como fizemos no problema anterior.

d) De novo temos que calcular uma integral definida,

$$x(100) - x(0) = \int_{0}^{100} v(t')dt' \therefore$$

$$x(100) - 300 = \frac{50+30}{2} \cdot 20 - \frac{40+20}{2} \cdot 20 = 200 \text{ m} \ \therefore \ x(100) = 500 \text{ m} \ .$$

III. Integral indefinida *ou*

Determinação da posição de um objeto por meio da primitiva de v(t).

Quando estudamos derivadas, montamos a seguinte tabela:

função	derivada	condição
$f(x)=C$	$\dfrac{df}{dx}=0$	C é independente de x
$f(x)=x^n$	$\dfrac{df}{dx}=nx^{n-1}$	qualquer n para $x>0$ somente n inteiro para $x<0$
$f(x)=\text{sen}(ax+b)$	$\dfrac{df}{dx}=a\cos(ax+b)$	ax medido em radianos
$f(x)=\cos(ax+b)$	$\dfrac{df}{dx}=-a\,\text{sen}(ax+b)$	ax medido em radianos
$f(x)=g(x)+h(x)$	$\dfrac{df}{dx}=\dfrac{dg}{dx}+\dfrac{dh}{dx}$	
$f(x)=Cg(x)$	$\dfrac{df}{dx}=C\dfrac{dg}{dx}$	C é independente de x

Agora, entendendo a integração como operação inversa da derivação, ou seja, $\int f(x)dx=F(x)\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{dF}{dx}$,

podemos montar a seguinte tabela, onde F(x) é chamada de primitiva de f(x) ou antiderivada:

função, $f(x)$	Antiderivada, $F(x)=\int f(x')dx'$	condição
$f(x)=C$	$F(x)=Cx+cte$	C é independente de x
$f(x)=x^n$	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+cte$	qualquer $n\neq-1$ para $x>0$; somente n inteiro e $n\neq-1$ p/ $x<0$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$F(x)=\dfrac{\text{sen}(ax+b)}{a}+cte$	ax medido em radianos
$f(x)=\text{sen}(ax+b)$	$F(x)=-\dfrac{\cos(ax+b)}{a}+cte$	ax medido em radianos
$f(x)=g(x)+h(x)$	$F(x)=G(x)+H(x)$	G e H, integrais de g e h
$f(x)=Cg(x)$	$F(x)=CG(x)$	C é independente de x

Esta tabela é obtida a partir da anterior permutando as colunas e, eventualmente, redefinindo as constantes que aparecem nas fórmulas.

A partir da primitiva, podemos calcular qualquer integral definida, ou seja, a área (ou menos um vezes a área) entre o gráfico da função e o eixo Ox num intervalo [a,b] dado, por

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \ .$$

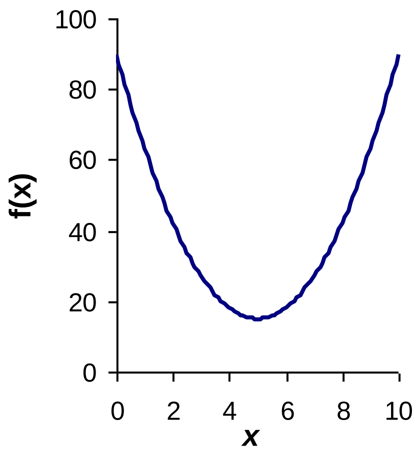
Note que a constante que sempre aparece na primitiva não importa neste cálculo, porque a integral definida é uma diferença da primitiva para dois valores distintos de x, ou seja, a constante é somada e subtraída no membro direito da equação acima, não dando qualquer contribuição para a integral.

Os exercícios 1 a 3 da lista que segue este texto são exemplos da utilização deste método, usando as primitivas das potências inteiras de x. O exemplo que apresentamos aqui busca apenas mostrar o formalismo.

Exemplo. Quando temos uma função do 2º grau,

$y = a + bx + cx^2$, a primitiva é $F(x) = \int (a + bx + cx^2) dx$, que, usando a regra de que a primitiva da soma é uma soma de primitivas, leva a

$$F(x) = \int adx + \int bxdx + \int cx^2 dx \, .$$



Usando que a primitiva de uma constante multiplicada por uma função é a constante multiplicada pela primitiva da função, temos

$$F(x) = ax + C' + b\left(\frac{x^2}{2} + C''\right) + c\left(\frac{x^3}{3} + C'''\right).$$

Agora, reunindo as constantes todas numa só (afinal, a soma de constantes é uma constante), obtemos finalmente

$$F(x) = ax + b\frac{x^2}{2} + c\frac{x^3}{3} + C \quad .$$

Assim, para calcular a área sob a parábola $y = 90 - 30x + 3x^2$ da figura ao lado entre x = 0 e x =10, precisamos da primitiva, que é $F(x) = 90x - 15x^2 + x^3 + C$ e a área entre x=0 e x=10 é, simplesmente, $A = F(10) - F(0) = 90 \cdot 10 - 15 \cdot 100 + 1000 + C - C = 400$, um valor que é pouco menos da metade do retângulo de altura 90 e base 10, determinado pelos extremos da figura.

Note que poderíamos ter escolhido C = 0, porque, como estamos calculando uma diferença, o valor dessa constante acaba não entrando no cálculo.

A primitiva para o polinômio do 1º grau, $y = a + bx$, pode ser obtida do resultado acima, substituindo c=0 . Neste caso, porém, as figuras formadas pela curva com o eixo Ox são triângulos, retângulos e trapézios, cujas áreas podem ser calculadas facilmente, dispensando o uso da primitiva.