

2-Modelagem de processos para controle

2.1-Introdução

Toda e qualquer técnica de controle, desde a mais elementar até a mais sofisticada, requer algum grau de conhecimento sobre o comportamento do sistema. Para investigar como o comportamento do sistema (suas saídas) muda com o tempo sob a influência de mudanças nas perturbações externas e variáveis manipuladas, e conseqüentemente projetar um controlador apropriado, pode-se usar duas abordagens diferentes:

- abordagem experimental: neste caso o(s) equipamento(s) físico do processo está disponível. Logo, mudamos o valor das várias entradas (perturbações e variáveis manipuladas) e observamos como as saídas variam com o tempo. Este procedimento é demorado e normalmente caro, já que um grande número de experimentos deve ser realizado. Além disso, deve-se garantir que as medidas realizadas contêm informação suficiente para caracterizar completamente a dinâmica do processo, ou pode-se obter um quadro errado desta dinâmica, de forma que podem estar ocorrendo flutuações fortes dentro do sistema que não estão aparecendo nas saídas medidas.
- abordagem teórica: modelos matemáticos são usados para determinar o comportamento dinâmico ou estático do processo.

Como em alguns casos o equipamento físico do processo não está disponível para testes e, mesmo quando está, a abordagem experimental é demorada e cara, a abordagem teórica é a mais usada.

Os modelos matemáticos podem ser classificados genericamente em duas categorias:

- teóricos (fenomenológicos): desenvolvidos a partir de pressupostos teóricos que tentam descrever de forma mais fundamentada os vários aspectos envolvidos no problema.
- empíricos: não estão baseados em quaisquer pressupostos teóricos, mas apenas são utilizados para descrever um certo conjunto de pontos experimentais conhecidos.

A princípio, os modelos empíricos são tão bons quanto os modelos teóricos, embora os modelos teóricos possam ser utilizados de forma bem mais racional do que os modelos empíricos. Por exemplo, as extrapolações feitas com modelos empíricos não são recomendadas, já que nada garante que a realidade vá continuar se comportando daquela forma numa faixa diferente de condições. No entanto, a continuidade dos pressupostos teóricos (e, portanto, do modelo matemático a que dão origem) em condições diferentes é bem mais aceitável.

Os modelos podem ainda ser classificados como lineares ou não lineares. O uso de modelos lineares se baseia na hipótese de que os sistemas têm um comportamento que pode ser aproximado linearmente. O seu uso é difundido pois a teoria de controle linear está bastante bem desenvolvida e as equações lineares em geral têm solução analítica, o que permite a fácil obtenção de resultados. Em particular na área de controle de processos, como a principal forma de operação nas grandes indústrias é no estado estacionário, os pequenos desvios associados ao efeito de perturbações não chega a afastar o sistema de um comportamento aproximadamente linear.

Entretanto, devemos ter em mente que a realidade é não linear. As crescentes exigências de qualidade e quantidade colocadas para a indústria a defrontam com situações de operação extremas, em que os efeitos não lineares são muito mais importantes. Ainda, existem inúmeros processos que são operados em batelada ou batelada alimentada (polímeros, produtos farmacêuticos, etc.). Neste tipo de operação, não há estado estacionário, e o comportamento do processo é fortemente não linear. Neste caso, são necessários modelos não lineares.

Ao se modelar o sistema de interesse, deve-se ter em mente que um modelo muito complexo não tem utilidade em análise e projeto de sistemas de controle. Muitas leis de controle são obtidas a partir de versões simplificadas do comportamento do processo e/ou são ajustadas usando essas versões. Num processo iterativo de projeto, via tentativa e erro, o uso frequente do modelo matemático também requer que o mesmo seja uma versão simples da realidade, caso contrário o esforço computacional requerido seria muito grande. Ainda, muitas das leis de controle mais avançadas incluem um modelo do processo que, conseqüentemente, tem que ser resolvido em linha. Novamente não podemos nem imaginar o uso de modelos complexos.

Neste curso a teoria de controle linear será abordada e, logo, trabalharemos na maioria das vezes com modelos lineares ou linearizados.

2.2- Linearização e variáveis desvio

Linearização é o processo pelo qual nós aproximamos sistemas não lineares com sistemas lineares. Considere a seguinte equação diferencial não linear

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{2.1}$$

Expanda a função não linear $f(x)$ em série de Taylor em torno de um ponto x_0

$$f(x) = f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} \frac{x-x_0}{1!} + \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x_0} \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_{x_0} \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \dots \quad (2.2)$$

Se desprezarmos todos os termos de ordem 2 ou maior, temos a seguinte aproximação para o valor de $f(x)$

$$f(x) \approx f(x_0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} (x-x_0) \quad (2.3)$$

A aproximação linear somente é satisfatória quando x está próximo de x_0 . Na figura 2.1 está mostrada a função não linear $f(x)$ e a sua aproximação linear em torno de x_0 . Fica claro que a aproximação linear depende da localização do ponto x_0 em torno do qual fazemos a expansão em série de Taylor. Compare a aproximação linear de $f(x)$ nos pontos x_0 e x_1 . A aproximação somente é exata no ponto de linearização.

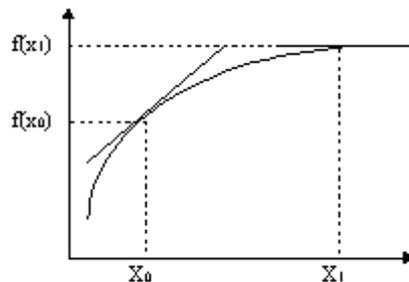


Figura 2.1- Linearização em torno de um ponto.

Vamos introduzir agora o conceito de variáveis desvio, que é muito útil para controle de processos. Suponha que x_s é o valor de estado estacionário de x que descreve o sistema dinâmico da eq. (2.1) inicialmente. Então

$$\frac{dx_s}{dt} = 0 = f(x_s) \quad (2.4)$$

Considere que x_s é o ponto de linearização para a eq. (2.1). Então o modelo linearizado é

$$\frac{dx}{dt} = f(x_s) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_s} (x-x_s) \quad (2.5)$$

Subtraia a eq. (2.4) da eq. (2.5)

$$\frac{d(x-x_s)}{dt} = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_s} (x-x_s) \quad (2.6)$$

Definimos a variável desvio como

$$x' = x - x_s \quad (2.7)$$

Então a eq. (2.5) fica

$$\frac{dx'}{dt} = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_s} x' \quad (2.8)$$

Esta é a aproximação linearizada do sistema dinâmico não linear descrito pela eq. (2.1) expressa em termos de variáveis desvio.

A noção de variáveis desvio é muito útil em controle de processos. Normalmente estamos tentando manter o valor de uma variável de processo em algum estado estacionário desejado (*set-point*). Conseqüentemente, o estado estacionário é um bom ponto em torno do qual se pode desenvolver o modelo linearizado. Nestes casos, a variável desvio descreve diretamente a magnitude do deslocamento do sistema do nível de operação desejado. Além disso, se o controlador de um dado processo foi bem projetado, não permitirá que a variável de processo se afaste muito do estado estacionário desejado. Desta forma o modelo linear aproximado expresso em termos de variáveis desvio descreverá bem o comportamento dinâmico do sistema.

Para sistemas com mais de uma variável, a metodologia para linearização é a mesma. Considere o seguinte sistema dinâmico

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \quad (2.9)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \quad (2.10)$$

Expanda as funções não lineares $f_1(x_1, x_2)$ e $f_2(x_1, x_2)$ em série de Taylor em torno do ponto $(x_{1,0}, x_{2,0})$ e despreze os termos de ordem 2 e superiores

$$f_1(x_1, x_2) \approx f_1(x_{1,0}, x_{2,0}) + \left(\frac{df_1}{dx_1} \right)_{(x_{1,0}, x_{2,0})} (x_1 - x_{1,0}) + \left(\frac{df_1}{dx_2} \right)_{(x_{1,0}, x_{2,0})} (x_2 - x_{2,0}) \quad (2.11)$$

$$f_2(x_1, x_2) \approx f_2(x_{1,0}, x_{2,0}) + \left(\frac{df_2}{dx_1} \right)_{(x_{1,0}, x_{2,0})} (x_1 - x_{1,0}) + \left(\frac{df_2}{dx_2} \right)_{(x_{1,0}, x_{2,0})} (x_2 - x_{2,0}) \quad (2.12)$$

Substituindo as aproximações acima nas equações dinâmicas (eq. (2.9) e (2.10))

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_{1,0}, x_{2,0}) + \left(\frac{df_1}{dx_1} \right)_{(x_{1,0}, x_{2,0})} (x_1 - x_{1,0}) + \left(\frac{df_1}{dx_2} \right)_{(x_{1,0}, x_{2,0})} (x_2 - x_{2,0}) \quad (2.13)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_{1,0}, x_{2,0}) + \left(\frac{df_2}{dx_1} \right)_{(x_{1,0}, x_{2,0})} (x_1 - x_{1,0}) + \left(\frac{df_2}{dx_2} \right)_{(x_{1,0}, x_{2,0})} (x_2 - x_{2,0}) \quad (2.14)$$

Estas duas últimas equações são lineares e constituem o modelo linearizado que aproxima o modelo não linear descrito pelas eqs. (2.9) e (2.10).

Para expressar o modelo linearizado em termos de variáveis desvio, selecione o estado estacionário $(x_{1,s}, x_{2,s})$ como o ponto em torno do qual a linearização vai ser feita. No estado estacionário as eqs. (2.9) e (2.10) levam a

$$0 = f_1(x_{1,s}, x_{2,s}) \quad (2.15)$$

$$0 = f_2(x_{1,s}, x_{2,s}) \quad (2.16)$$

Subtraia as eqs. (2.15) e (2.16) das eqs. (2.13) e (2.14) e obtenha

$$\frac{d(x_1 - x_{1,s})}{dt} = \left(\frac{df_1}{dx_1} \right)_{(x_{1,s}, x_{2,s})} (x_1 - x_{1,s}) + \left(\frac{df_1}{dx_2} \right)_{(x_{1,s}, x_{2,s})} (x_2 - x_{2,s}) \quad (2.17)$$

$$\frac{d(x_2 - x_{2,s})}{dt} = \left(\frac{df_2}{dx_1} \right)_{(x_{1,s}, x_{2,s})} (x_1 - x_{1,s}) + \left(\frac{df_2}{dx_2} \right)_{(x_{1,s}, x_{2,s})} (x_2 - x_{2,s}) \quad (2.18)$$

Definindo as variáveis desvio

$$x'_1 = x_1 - x_{1,s} \quad \text{e} \quad x'_2 = x_2 - x_{2,s}$$

$$\frac{dx'_1}{dt} = \left(\frac{df_1}{dx_1} \right)_{(x_{1,s}, x_{2,s})} x'_1 + \left(\frac{df_1}{dx_2} \right)_{(x_{1,s}, x_{2,s})} x'_2 \quad (2.19)$$

$$\frac{dx'_2}{dt} = \left(\frac{df_2}{dx_1} \right)_{(x_{1,s}, x_{2,s})} x'_1 + \left(\frac{df_2}{dx_2} \right)_{(x_{1,s}, x_{2,s})} x'_2 \quad (2.20)$$

Exemplo 2.1- Linearize a seguinte expressão e a escreva em função de variáveis desvio em

relação ao ponto x_{10} e x_{20} : $\frac{dx_1(t)}{dt} = ax_1(t) + bx_1(t)x_2(t) + cx_2(t)^2$. Nesta expressão a, b e c são

parâmetros constantes e x_1 e x_2 variam com o tempo. Considere $x_{10}=1$, $x_{20}=2$, $a=b=c=1$.

Da eq. (2.9) temos que $f_1(x_1, x_2) = ax_1(t) + bx_1(t)x_2(t) + cx_2(t)^2$. Pela eq. (2.11) podemos aproximar $f_1(x_1, x_2)$ por:

$$f_1(x_1, x_2) \approx ax_{10} + bx_{10}x_{20} + cx_{20}^2 + (a + bx_{20})(x_1 - x_{10}) + (bx_{10} + 2cx_{20})(x_2 - x_{20})$$

$$\text{Logo, } \frac{dx_1}{dt} \approx ax_{10} + bx_{10}x_{20} + cx_{20}^2 + (a + bx_{20})(x_1 - x_{10}) + (bx_{10} + 2cx_{20})(x_2 - x_{20})$$

No estado estacionário:

$$\frac{dx_{10}}{dt} = 0 = ax_{10} + bx_{10}x_{20} + cx_{20}^2$$

Subtraindo as duas equações chegamos a:

$$\frac{d(x_1 - x_{10})}{dt} = (a + bx_{20})(x_1 - x_{10}) + (bx_{10} + 2cx_{20})(x_2 - x_{20})$$

Mas $(x_1 - x_{10}) = x_1'$ e $(x_2 - x_{20}) = x_2'$, então a equação acima fica igual a:

$$\frac{dx_1'}{dt} = (a + bx_{20})x_1' + (bx_{10} + 2cx_{20})x_2'$$

Substituindo os valores de x_{10} , x_{20} , a , b e c , chegamos a:

$$\frac{dx_1'}{dt} = 3x_1' + 5x_2'$$

2.3-Alguns tipos de modelos matemáticos

a) Modelos de equações diferenciais

b) Modelos de diferenças finitas

c) Modelos de entrada saída (exemplo: modelos de função de transferência)

a) Modelos de equações diferenciais

Estes são modelos teóricos, baseados nas hipóteses fundamentais que balizam a análise de problemas da engenharia química, que são normalmente os princípios de conservação de massa e energia. Os balanços de massa e/ou energia dão origem a equações diferenciais ordinárias e/ou parciais, geralmente combinadas com uma ou mais equações algébricas. As equações algébricas podem descrever relações termodinâmicas (relações que descrevem as situações de equilíbrio atingidas durante uma reação ou por uma ou mais fases), equações de estado (por exemplo a lei dos gases ideais ou a equação de Van der Waals), equações de taxa de transporte (taxas de transferência de massa, energia etc.), equações de taxas cinéticas (descrevem as taxas de reações químicas), etc.

A aplicação dos princípios de conservação permite construir modelos para um grande número de sistemas. No entanto, informações adicionais que não podem ser obtidas das equações de balanço são freqüentemente necessárias. Por exemplo, saber como a densidade de um fluido depende da temperatura ou como a velocidade da reação depende das concentrações dos reagentes. Nestes casos, equações empíricas podem ser utilizadas para descrever a fração desconhecida do modelo ou uma modelagem mais detalhada do fenômeno pode ser utilizada. Por exemplo, pode-se dizer simplesmente que a velocidade de reação varia com uma potência da concentração e tentar determinar o expoente a partir de experimentos, introduzindo-se assim um certo grau de empirismo ao nosso modelo teórico, ou tentar descrever o mecanismo de reação de forma detalhada para tentar desvendar a forma com que a velocidade de reação depende da concentração do reagente.

Para a maioria dos sistemas de interesse para um engenheiro químico existem somente três quantidades: massa, energia e momento. Frequentemente, no entanto, as variáveis fundamentais não podem ser medidas diretamente. Nestes casos, selecionamos outras variáveis que podem ser medidas e que agrupadas apropriadamente determinam o valor das variáveis fundamentais. Então massa, energia e momento podem ser caracterizados por variáveis tais como densidade, concentração, temperatura, pressão e vazão. Estas são as chamadas **variáveis de estado** e os seus valores definem o **estado** de um sistema.

As equações que relacionam as variáveis de estado (variáveis dependentes) às variáveis independentes são derivadas da aplicação de princípios de conservação nas quantidades fundamentais e são chamadas de equações de estado.

O princípio da conservação de uma quantidade S diz que:

$$[\text{acúmulo S}]/\text{tempo} = [\text{entrada S}]/\text{tempo} - [\text{saída S}]/\text{tempo} + [\text{geração S}]/\text{tempo} - [\text{consumo S}]/\text{tempo}$$

S pode ser:

- massa total
- massa dos componentes individuais
- energia total
- momento

Deve-se lembrar sempre que para os processos químicos a massa total e a energia total não podem ser gerados nem desaparecer.

Revisando a forma mais usada das equações de balanço:

- Balanço de massa total:

$$\frac{d(\rho V)}{dt} = \sum_{i:\text{entradas}} \rho_i F_i - \sum_{j:\text{saídas}} \rho_j F_j \quad (2.21)$$

- Balanço de massa para o componente A:

$$\frac{dn_A}{dt} = \frac{d(C_A V)}{dt} = \sum_{i:\text{entradas}} C_{Ai} F_i - \sum_{j:\text{saídas}} C_{Aj} F_j \pm rV \quad (2.22)$$

- Balanço total de energia:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(U + K + P)}{dt} = \sum_{i:\text{entradas}} \rho_i F_i h_i - \sum_{j:\text{saídas}} \rho_j F_j h_j \pm Q \pm W_s \quad (2.23)$$

As variáveis que aparecem acima são:

ρ : densidade

V: volume do sistema

- F: vazão volumétrica de alimentação
- n_A : número de moles do componente A
- C_A : concentração molar de A (moles/volume)
- r: taxa de reação por unidade de volume para o componente A
- h: entalpia específica
- U, K, P: energias interna, cinética e potencial do sistema
- Q: quantidade de calor trocada pelo sistema com o meio ambiente por unidade de tempo (por condução, radiação ou reação)
- Ws: trabalho realizado por unidade de tempo
- Por convenção, uma quantidade é considerada positiva se entra no sistema e negativa se sai.

As equações de estado com as variáveis de estado associadas constituem o modelo matemático do processo, que simula o comportamento dinâmico do processo. A aplicação dos princípios de conservação levam a um conjunto de equações diferenciais com as quantidades fundamentais como variáveis dependentes e o tempo como a variável independente. A solução das equações diferenciais determinam como as quantidades fundamentais, ou equivalentemente, as variáveis de estado, mudam com o tempo, ou seja, o comportamento dinâmico do processo.

Se as variáveis de estado não variam com o tempo, dizemos que o processo está em estado estacionário. Neste caso a taxa de acúmulo é zero e, logo, os balanços resultantes são um conjunto de equações algébricas.

Exemplo 2.2- Considere o tanque aquecedor do exemplo 1.1 (Figura 1.1). As quantidades fundamentais cujos valores definem o estado do aquecedor são:

- a massa total de líquido no tanque
- a energia total do material no tanque
- o momento

O momento permanece constante mesmo com as perturbações e não será considerado.

As variáveis de estado, logo, são:

- massa total no tanque= $\rho V = \rho Ah$

em que ρ é a densidade do líquido, V é o volume de líquido, A é a área transversal do tanque e h é a altura do nível de líquido.

- energia total do líquido no tanque= $E=U+K+P$

Se a velocidade de escoamento da entrada e saída não forem muito altas, o termo de energia cinética é desprezível: dK/dt . Se a diferença de altura entre a entrada e saída não for alta a energia potencial também é desprezível: $dP/dt=0$. Assim, $dE/dt=dU/dt$.

As equações de balanço são dadas por:

- balanço de massa total: $\frac{d(\rho Ah)}{dt} = \rho F_i - \rho F$

em que F_i e F são as vazões volumétricas de entrada e saída.

Considerando-se que ρ não varia com a temperatura

$$A \frac{dh}{dt} = F_i - F \quad (2.24)$$

- balanço de energia total

$$\frac{d(\rho VU)}{dt} = F_i \rho h_i - F \rho h + Q$$

Mas a entalpia é definida como

$$H = U + P\bar{V}$$

Para líquidos o termo $P\bar{V}$ é desprezível e $\frac{dU}{dt} \approx \frac{dH}{dt}$

Além disso $H = C_p(T - T_{ref})$

em que C_p é a capacidade calorífica do líquido no tanque e T_{ref} é a temperatura de referência em que a entalpia específica do líquido é assumida igual a zero. A equação se transforma em:

$$\frac{d[\rho Ah C_p(T - T_{ref})]}{dt} = \rho F_i C_p(T_i - T_{ref}) - \rho F C_p(T - T_{ref}) + Q$$

em que Q é a quantidade de calor fornecida pelo vapor por unidade de tempo. Simplificando (assume-se que $T_{ref}=0$):

$$A \frac{d(hT)}{dt} = F_i T_i - FT + \frac{Q}{\rho C_p}$$

Mas, $A \frac{d(hT)}{dt} = Ah \frac{dT}{dt} + AT \frac{dh}{dt}$. Substituindo então a equação 2.24 e simplificando chega-se a

$$Ah \frac{dT}{dt} = F_i (T_i - T) + \frac{Q}{\rho C_p} \quad (2.25)$$

As variáveis nas equações 2.4 e 2.5 podem ser classificadas como segue:

- variáveis de estado: h, T
- variáveis de saída: h, T (medidas)
- variáveis de entrada:

- perturbações: T_i, F_i
- variáveis manipuladas: Q, F (para controle feedback)
 F_i (para controle feedforward)

Elementos adicionais dos modelos matemáticos

Além das equações de balanço, precisamos de outras relações para expressar equilíbrio termodinâmico, taxas de reação, taxas de transporte para calor, massa, momento, etc. Estas relações adicionais podem ser classificadas como:

- Equações de taxas de transporte

São necessárias para descrever taxas de transferência de massa, energia e momento. São estudadas em cursos de fenômenos de transporte. Por exemplo, o calor fornecido pelo vapor no exemplo anterior é dado pela seguinte equação de transferência de calor:

$$Q = UA_t(T_V - T)$$

em que U =coeficiente global de transferência de calor

A_t =área total de transferência de calor

T_V =temperatura do vapor

- Equações de taxas cinéticas

São necessárias para descrever as taxas de reação química que ocorrem no sistema. São estudadas nos cursos de cinética. Por exemplo, a taxa de uma reação de primeira ordem ocorrendo num CSTR é dada por:

$$r = k_0 e^{\frac{-E}{RT}} C_A$$

em que k_0 =constante cinética

E =energia de ativação da reação

R =constante dos gases ideais

T, C_A =Temperatura e concentração de A no líquido reacional.

- Relações de equilíbrio de fase e reação

São necessárias para descrever as situações de equilíbrio alcançadas durante uma reação química por duas ou mais fases. São estudadas em cursos de termodinâmica.

- Equações de estado

São necessárias para descrever relações entre as variáveis que descrevem o estado termodinâmico de um sistema. A equação dos gases ideais e a equação de van der Waals são dois exemplos de equação de estado para sistemas gasosos.

Tempo morto

Nos exemplos anteriores assumimos que sempre que uma mudança ocorre numa das variáveis de entrada, seu efeito é instantaneamente observado nas variáveis de saída. Na verdade, normalmente quando uma variável de entrada sofre uma mudança existe um intervalo de tempo (curto ou longo) durante o qual nenhum efeito é observado nas saídas do sistema. Este intervalo é chamado de tempo morto.

Exemplo 2.3- Considere o escoamento de um líquido incompressível através de um tubo (Figura 2.1a). Se o tubo é termicamente isolado e o calor gerado pela fricção do fluido escoando é desprezível, é fácil concluir que no estado estacionário a temperatura de saída do tubo (T_{out}) é igual à de entrada (T_{in}). Se no tempo $t=0$ a temperatura de entrada muda como mostrado pela curva A mostrada na Figura 2.1b é claro que a temperatura na saída (T_{out}) vai permanecer a mesma até que a mudança chegue ao final do tubo. Então vamos observar a temperatura de saída mudando, como mostrado na curva B na Figura 2.1b. Notamos que a mudança na temperatura de saída segue a mesma forma da mudança na entrada com um atraso de t_d segundos. t_d é o tempo morto e a partir de considerações físicas é fácil ver que:

$$t_d = \frac{\text{volume do tubo}}{\text{vazão volumétrica}} = \frac{AL}{AU_{av}} = \frac{L}{U_{av}}$$

em que U_{av} é a velocidade média do fluido através da área transversal do tubo, assumida constante. Podemos relacionar T_{in} e T_{out} como:

$$T_{out}(t) = T_{in}(t - t_d)$$

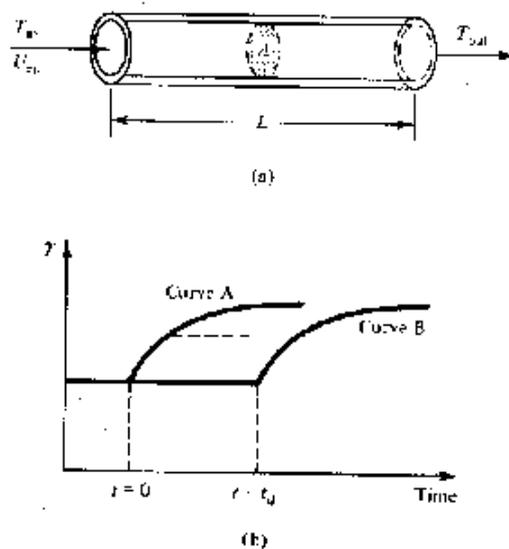


Figura 2.2

Exemplos adicionais

Exemplo 2.4: Modelo matemático de um CSTR

Considere o CSRT do exemplo 1.2 (Figura 1.4), onde uma reação simples exotérmica $A \rightarrow B$ acontece no reator, que é resfriado por um fluido refrigerante que escoar através de uma jaqueta em torno do reator.

As quantidades fundamentais do reator são:

- massa total de mistura reativa no reator
- massa do componente A na mistura reativa
- energia total da mistura reagente no tanque

A massa do componente B pode ser calculada a partir dos balanços do componente A e global. Logo, este balanço não é independente. (massa total = massa A + massa B). A massa se conserva, mas não o número de moles dos componentes.

Os balanços são:

- balanço global: $\frac{d(\rho V)}{dt} = \rho_i F_i - \rho F$

considerando $\rho = \text{cte}$, temos: $\frac{dV}{dt} = F_i - F$

- balanço para o componente A:

$$\frac{dn_A}{dt} = \frac{d(C_A V)}{dt} = C_{Ai} F_i - C_A F - rV$$

Substituindo a equação de balanço global (dV/dt) e simplificando:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{F_i}{V} (C_{Ai} - C_A) - k_0 e^{\frac{-E}{RT}} C_A$$

- balanço de energia:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d[\rho V c_p (T - T_{ref})]}{dt} = \rho F_i c_p (T_i - T_{ref}) - \rho F c_p (T - T_{ref}) + (-\Delta H_r) r V - Q$$

em que ΔH_r é o calor de reação, que por convenção é negativo para reação exotérmica e Q é o calor retirado pela jaqueta.

Simplificando chega-se a:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{F_i}{V} (T_i - T) + \frac{(-\Delta H_r) r}{\rho C_p} - \frac{Q}{\rho C_p V}$$

Exemplo 2.5- Considere o CSTR com duas fases mostrado na Figura 2.3. Correntes de líquido (F) e vapor (F_v) são retiradas do tanque. A pressão no tanque é P . Os volumes de

líquido e vapor são V e V_v . A densidade e temperatura da fase vapor são ρ_v e T_v . A fração molar de A no vapor é y .

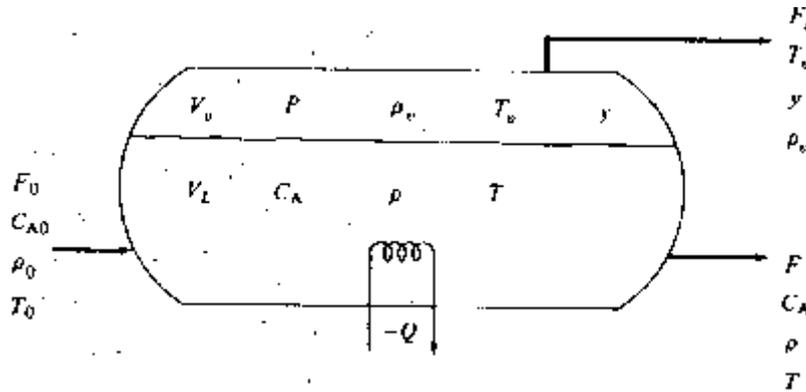


Figura 2.3

Se as fases estão em equilíbrio térmico, as temperaturas do vapor e líquido são iguais ($T=T_v$). Se existe equilíbrio de fases, as composições do líquido e do vapor estão relacionadas pela lei de Raoult, por uma relação de volatilidade relativa ou alguma outra relação de equilíbrio líquido-vapor. A entalpia da fase vapor (H) é uma função da composição y , da temperatura T_v e da pressão. Desprezando os termos de energia cinética, potencial e trabalho e substituindo as energias internas por entalpias, a equação de balanço global de energia se transforma em:

$$\frac{d(\rho_v V_v H + \rho V_L h)}{dt} = F_0 \rho_0 h_0 - F \rho h - F_v \rho_v H + Q - (\Delta H_r) V_r$$

Pode-se substituir a entalpia do líquido por $h=C_p T$ e a do vapor por $H=C_p T + \lambda_v$, em que λ_v é o calor de vaporização da mistura. A equação se transforma em:

$$\frac{d(\rho_v V_v (C_p T + \lambda_v) + \rho V_L C_p T)}{dt} = F_0 \rho_0 C_p T_0 - F \rho C_p T - F_v \rho_v (C_p T + \lambda_v) + Q - (\Delta H_r) V_r$$

b) Modelos de diferenças finitas

Modelos com equações de diferenças finitas correspondem à discretização de modelos de equações diferenciais e são normalmente usados em sistemas de controle digital.

Exemplo 2.6: discretização de um modelo de 1ª ordem. Considere o processo

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y) \tag{2.26}$$

Discretizando, temos

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t} \tag{2.27}$$

$$\text{ou } \frac{dy}{dt} \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} \tag{2.28}$$

Usando a eq. (2.27) temos a equação de diferenças finitas

$$\boxed{y_n = y_{n-1} + \Delta t \cdot f(y_{n-1}, x_{n-1})} \quad (2.29)$$

Exemplo 2.7: discretização de um modelo de 2ª ordem.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x \quad (2.30)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) \approx \frac{d}{dt} \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t} \right) = \frac{1}{\Delta t^2} (y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}) \quad (2.31)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{a_1}{\Delta t} \right) y_n = \left(\frac{2}{\Delta t^2} + \frac{a_1}{\Delta t} - a_0 \right) y_{n-1} - \frac{1}{\Delta t^2} y_{n-2} + x_{n-1} \quad (2.32)$$

Logo, $\boxed{y_n = a_1' y_{n-1} + a_2' y_{n-2} + b_1' x_{n-1}}$ (2.33)

Estes modelos podem ser não lineares ou lineares, dependendo se resultam da discretização de equações diferenciais não lineares ou linearizadas.

c) Modelos de entrada-saída

Todo processo químico e as suas variáveis associadas podem ser descritos pela Figura 2.4. Um modelo matemático conveniente para um projetista de sistemas de controle deve estar de acordo com esta figura, ou seja, deve ser tal que, dados os valores das entradas, ele calcula diretamente os valores das saídas. Em particular, o modelo deve ter a seguinte forma geral para cada saída

$$\text{saída} = f(\text{variáveis de entrada})$$

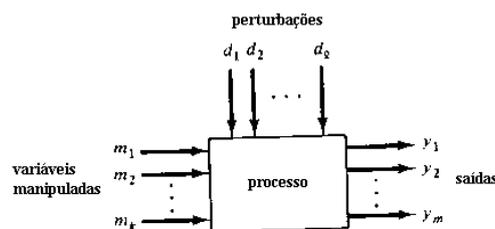


Figura 2.4

ou seja, usando-se a Figura 2.4:

$$y_i = f(m_1, m_2, \dots, m_k; d_1, d_2, \dots, d_L) \quad \text{para } i=1, 2, \dots, m. \quad (2.34)$$

Estes modelos que descrevem diretamente a relação entre as variáveis de entrada e saída de um processo são chamados de modelos de entrada-saída. Existem diversos tipos de modelo de entrada-saída, entre eles os modelos de resposta ao degrau, os modelos de convolução, os modelos de funções de transferência e até mesmo as redes neurais.

c.1) Modelos de função de transferência

c.1.1) Transformada de Laplace

Os modelos de função de transferência usam transformadas de Laplace. Estas transformadas são muito usadas em controle de processos, já que permitem o desenvolvimento de representações dinâmicas bastante simples de processos químicos. Elas transformam equações diferenciais lineares ou linearizadas em equações algébricas, com as quais é muito mais fácil trabalhar, e permitem uma análise rápida da dinâmica do processo. Além disso, elas fornecem uma relação direta entre as entradas e saídas do processo.

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ é definida da seguinte forma:

$$L [f(t)] \equiv f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.35)$$

Nota-se que a transformada de Laplace é a transformação de uma função do domínio do tempo (em que t é a variável independente) para o domínio s (em que s é a variável independente). s é uma variável definida no plano complexo ($s=a+jb$).

A transformada de Laplace é uma operação linear:

$$L [a_1f_1(t) + a_2f_2(t)] = a_1L [f_1(t)] + a_2L [f_2(t)] \quad (2.36)$$

em que a_1 e a_2 são parâmetros constantes.

Propriedades adicionais das transformadas de Laplace:

Teorema do valor final:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sf(s)] \quad (2.37)$$

Teorema do valor inicial:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sf(s)] \quad (2.38)$$

c.1.2) Funções de transferência dos modelos entrada-saída

Considere um sistema simples com uma entrada e uma saída (SISO-Single input Single Output), como descrito na Figura 2.5a. O seu comportamento dinâmico é descrito por uma equação diferencial linear ou linearizada de ordem n .

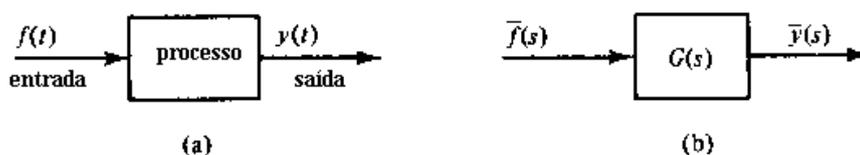


Figura 2.5

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = bf(t) \quad (2.39)$$

em que $f(t)$ e $y(t)$ são as variáveis de entrada e saída do processo, respectivamente. As duas são descritas como variáveis desvio. Considere que o sistema inicialmente está no estado estacionário. Logo

$$y(0) = \left[\frac{dy}{dt} \right]_{t=0} = \left[\frac{d^2 y}{dt^2} \right]_{t=0} = \dots = \left[\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right]_{t=0} = 0 \quad (2.40)$$

Sabemos que a transformada de Laplace da derivada é dada por

$$L \left[\frac{d^n y(t)}{dt^n} \right] = s^n y(s) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \dots - s y^{n-2}(0) - y^{n-1}(0) \quad (2.41)$$

Logo, pode-se calcular a transformada de Laplace da eq. (2.39)

$$a_n s^n y(s) + a_{n-1} s^{n-1} y(s) + \dots + a_1 s y(s) + a_0 y(s) = bf(s) \quad (2.42)$$

Pode-se escrever a função de transferência, $G(s)$, que relaciona a entrada diretamente com a saída numa forma algébrica simples

$$G(s) = \frac{y(s)}{f(s)} = \frac{b}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.43)$$

A figura 2.5b descreve esta relação entrada-saída e é chamada de diagrama de blocos do sistema.

Se o processo tem duas entradas, como mostrado na figura 2.6a, o modelo dinâmico é

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 f_1(t) + b_2 f_2(t) \quad (2.44)$$

Com as mesmas condições iniciais (eq. (2.38)), temos

$$y(s) = \frac{b_1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} f_1(s) + \frac{b_2}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} f_2(s) \quad (2.45)$$

Ou equivalentemente

$$y(s) = G_1(s) f_1(s) + G_2(s) f_2(s) \quad (2.46)$$

em que $G_1(s)$ e $G_2(s)$ são duas funções de transferência que relacionam a saída do processo a cada uma das entradas. Estas relações estão mostradas no diagrama de blocos da figura 2.6b. Um procedimento semelhante pode ser aplicado a qualquer sistema com uma saída e várias entradas, como mostrado na figura 2.7.

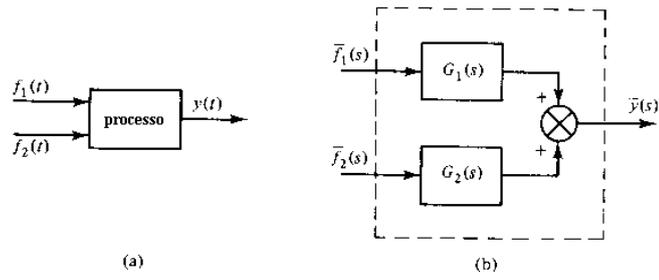


Figura 2.6

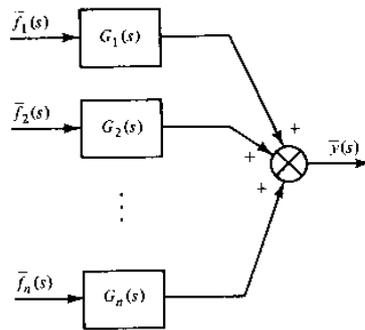


Figura 2.7

Resumindo, pode-se definir a função de transferência entre uma entrada e uma saída da seguinte forma

$$G(s) = \frac{\text{transformada de Laplace da saída, em variáveis desvio}}{\text{transformada de Laplace da entrada, em variáveis desvio}} \quad (2.47)$$

TABELA 2.1
LAPLACE TRANSFORMS OF VARIOUS FUNCTIONS

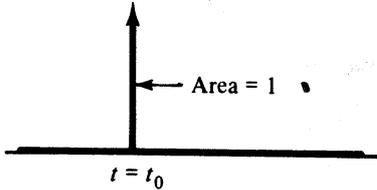
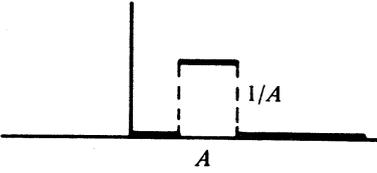
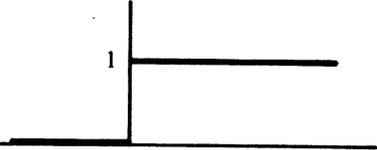
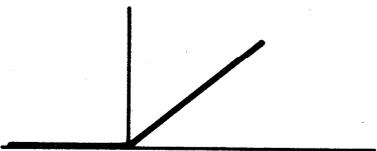
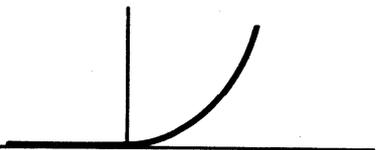
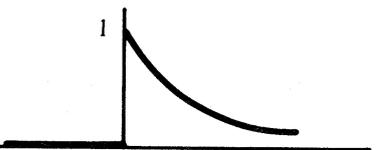
Time function ($t \geq 0$)	Laplace transform	
Unit impulse, $\delta(t_0)$	1	
Unit pulse, $\delta_A(t)$	$\frac{1}{A} \frac{1 - e^{-sA}}{s}$	
Unit step	$\frac{1}{s}$	
Ramp, $f(t) = t$	$\frac{1}{s^2}$	
t^2	$\frac{2!}{s^3}$	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	
e^{-at}	$\frac{1}{s + a}$	

TABELA 2.1 (CONT.)

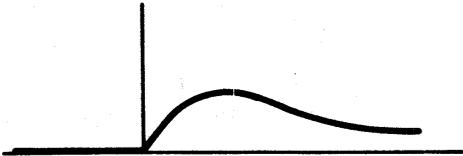
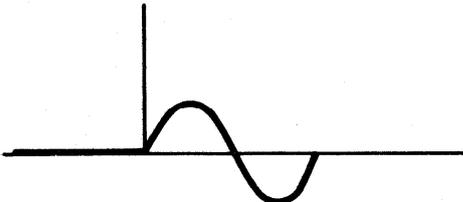
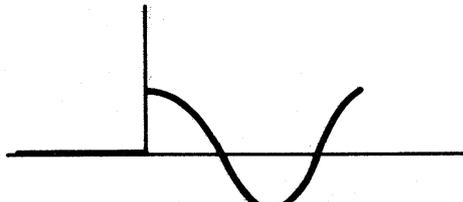
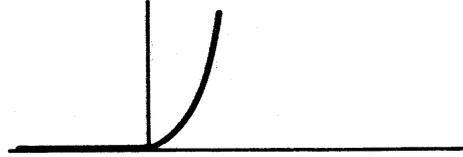
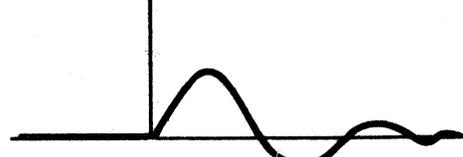
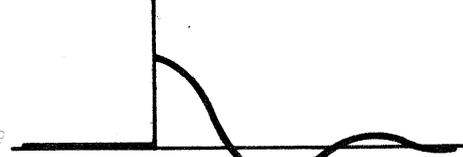
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega^2}$	

TABELA 2.2

INVERSE LAPLACE TRANSFORMS OF SELECTED EXPRESSIONS

Laplace transform: $\bar{f}(s)$	Time function: $f(t)$
1. $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$
2. $\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
3. $\frac{s+a}{(s+b)(s+c)}$	$\frac{1}{c-b} [(a-b)e^{-bt} - (a-c)e^{-ct}]$
4. $\frac{a}{(s+b)^2}$	ate^{-bt}
5. $\frac{a}{(s+b)^3}$	$\frac{a}{2} t^2 e^{-bt}$
6. $\frac{a}{(s+b)^{n+1}}$	$\frac{a}{n!} t^n e^{-bt}$
7. $\frac{1}{s(as+1)}$	$1 - e^{-t/a}$
8. $\frac{1}{s(as+1)^2}$	$1 - \frac{a+t}{a} e^{-t/a}$
9. $\frac{\omega^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)}$	$1 + \frac{e^{-\zeta\omega t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega\sqrt{1-\zeta^2}t - \phi)$ where $\cos \phi = -\zeta$
10. $\frac{s}{(1+as)(s^2 + \omega^2)}$	$-\frac{1}{1+a^2\omega^2} e^{-t/a} + \frac{1}{\sqrt{1+a^2\omega^2}} \cos(\omega t - \phi)$ where $\phi = \tan^{-1} a\omega$
11. $\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$
12. $\frac{1}{(s+a)[(s+b)^2 + \omega^2]}$	$\frac{e^{-at}}{(a-b)^2 + \omega^2} + \frac{e^{-bt} \sin(\omega t - \phi)}{\omega[(a-b)^2 + \omega^2]^{1/2}}$ where $\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{a-b} \right)$

c.1.3) Inversão de transformadas de Laplace (Expansão por frações parciais ou expansão de Heaviside)

O ponto crítico para se achar a solução de uma equação diferencial usando transformadas de Laplace é a inversão destas transformadas para voltar ao domínio do tempo. Vamos então estudar o método das frações parciais para inversão destas transformadas.

Considere que a transformada de Laplace de uma função desconhecida $x(t)$ é dada por:

$$x(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

- Caso 1- $P(s)$ com raízes reais e distintas

Considere a seguinte função de transferência: $x(s) = \frac{s^2 - s - 6}{s^3 - 2s^2 - s + 2} = \frac{Q(s)}{P(s)}$

$P(s)$ é de 3ª ordem e tem três raízes: $p_1=1$, $p_2=-1$ e $p_3=2$

Então $P(s)$ pode ser escrito como $P(s) = (s-1)(s+1)(s-2)$

Então a equação de $x(s)$ pode ser expandida em frações parciais como

$$x(s) = \frac{s^2 - s - 6}{(s-1)(s+1)(s-2)} = \frac{C_1}{(s-1)} + \frac{C_2}{(s+1)} + \frac{C_3}{(s-2)} \quad (2.48)$$

A inversa desta função de transferência é igual a:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_1}{(s-1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_2}{(s+1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_3}{(s-2)}\right]$$

Usando a Tabela 2.1, temos:

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t} \quad (2.49)$$

Para calcular C_1 deve-se multiplicar os dois lados da equação acima por $(s-1)$:

$$x(s) = \frac{(s^2 - s - 6)}{(s+1)(s-2)} = C_1 + \frac{C_2(s-1)}{(s+1)} + \frac{C_3(s-1)}{(s-2)}$$

Se assumirmos $(s-1)=0$ ou $s=1$, temos:

$$C_1 = \left[\frac{(s^2 - s - 6)}{(s+1)(s-2)} \right]_{s=1} = 3$$

Para calcular C_2 deve-se multiplicar ambos os lados da eq. (2.48) por $(s+1)$:

$$x(s) = \frac{s^2 - s - 6}{(s-1)(s-2)} = \frac{C_1(s+1)}{(s-1)} + C_2 + \frac{C_3(s+1)}{(s-2)}$$

Assumimos $s+1=0$ ou $s=-1$, logo:

$$C_2 = \left[\frac{s^2 - s - 6}{(s-1)(s-2)} \right]_{s=-1} = -2/3$$

Para calcular C_3 deve-se multiplicar ambos os lados da eq. (2.48) por $(s-2)$:

$$x(s) = \frac{s^2 - s - 6}{(s-1)(s+1)} = \frac{C_1(s-2)}{(s-1)} + \frac{C_2(s-2)}{(s+1)} + C_3$$

Assumimos $s-2=0$, ou seja, $s=2$. Logo

$$C_3 = \left[\frac{s^2 - s - 6}{(s-1)(s+1)} \right]_{s=2} = -4/3$$

Da eq. (2.49) temos a resposta:

$$x(t) = 3e^t - 2/3e^{-t} - 4/3e^{2t}$$

- Caso 2- P(s) com raízes complexas e distintas

Considere a transformada:

$$x(s) = \frac{s+1}{s^2 - 2s + 5}$$

P(s) tem duas raízes distintas e complexas conjugadas:

$$p_1=1+2j \quad \text{e} \quad p_2=1-2j$$

$$\text{Então } P(s) = s^2 - 2s + 5 = [s - (1 + 2j)][s - (1 - 2j)]$$

Expandindo em frações parciais:

$$x(s) = \frac{s+1}{s^2 - 2s + 5} = \frac{s+1}{[s - (1 + 2j)][s - (1 - 2j)]} = \frac{C_1}{s - (1 + 2j)} + \frac{C_2}{s - (1 - 2j)}$$

Usando a Tabela 2.1:

$$x(t) = C_1 e^{(1+2j)t} + C_2 e^{(1-2j)t}$$

Para calcular C_1 , multiplica-se ambos os lados da equação acima por $[s - (1 + 2j)]$

$$\frac{s+1}{[s - (1 - 2j)]} = C_1 + \frac{C_2 [s - (1 + 2j)]}{s - (1 - 2j)}$$

Fazendo $[s - (1 + 2j)] = 0$, ou seja $s = 1 + 2j$, calcula-se

$$C_1 = \frac{1 - j}{2}$$

Fazendo $[s - (1 - 2j)] = 0$, ou seja $s = 1 - 2j$, calcula-se

$$C_2 = \frac{1 + j}{2}$$

Note que os coeficientes C_1 e C_2 são complexos conjugados.

Substituindo a resposta é:

$$x(t) = \frac{1-j}{2} e^{(1+2j)t} + \frac{1+j}{2} e^{(1-2j)t} \quad \text{ou} \quad x(t) = \frac{e^t}{2} [(1-j)e^{2jt} + (1+j)e^{-2jt}]$$

Relembrando a identidade de Euler:

$$e^{ja} = \cos a + j \operatorname{sen} a$$

Então

$$e^{2jt} = \cos 2t + j \operatorname{sen} 2t$$

e

$$e^{-2jt} = \cos(-2t) + j \operatorname{sen}(-2t) = \cos 2t - j \operatorname{sen} 2t$$

Então

$$x(t) = \frac{e^t}{2}[(1-j)e^{2jt} + (1+j)e^{-2jt}] = \frac{e^t}{2}[(1-j)(\cos 2t + j\sin 2t) + (1+j)(\cos 2t - j\sin 2t)] = e^t(\cos 2t + \sin 2t)$$

Relembrando a identidade trigonométrica:

$$a_1 \cos b + a_2 \sin b = a_3 \sin(b + \phi)$$

em que

$$a_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad e \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$$

Então a resposta é

$$x(t) = e^t \sqrt{2} \sin(2t + \phi)$$

em que $\phi = \tan^{-1}(1/1) = 45^\circ$

Então, sempre que um polinômio $P(s)$ tiver raízes complexas :

-elas sempre serão pares complexos conjugados

-os coeficientes dos termos correspondentes na expansão em frações parciais também serão complexos conjugados um do outro.

-darão origem a um termo periódico (ex. onda senoidal).

- Caso 3- $P(s)$ com raízes múltiplas

Considere a transformada de Laplace:

$$x(s) = \frac{1}{(s+1)^3(s+2)}$$

Este polinômio tem 3 raízes iguais e uma diferente:

$$p_1 = p_2 = p_3 = -1 \quad e \quad p_4 = -2$$

Expandindo em frações parciais:

$$x(s) = \frac{1}{(s+1)^3(s+2)} = \frac{C_1}{s+1} + \frac{C_2}{(s+1)^2} + \frac{C_3}{(s+1)^3} + \frac{C_4}{s+2} \quad (2.50)$$

Pelas tabelas 2.1 e 2.2 temos que:

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + \frac{C_3}{2} t^2 e^{-t} + C_4 e^{-2t}$$

Cálculo de C_4 : este coeficiente é o correspondente à raiz distinta e pode ser calculado pelo procedimento já descrito, ou seja, multiplica-se ambos os lados da eq.(2.50) por $(s+2)$ e faça $s=-2$. $C_4 = -1$.

Cálculo de C_3 : multiplique ambos os lados da eq. (2.50) por $(s+1)^3$:

$$\frac{1}{(s+2)} = C_1(s+1)^2 + C_2(s+1) + C_3 + \frac{C_4(s+1)^3}{s+2} \quad (2.51)$$

Faça $s=-1$ e obtenha $C_3=1$.

Cálculo de C_2 : o procedimento descrito acima não funciona. Se multiplicarmos ambos os lados da equação por $(s+1)^2$ temos:

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = C_1(s+1) + C_2 + \frac{C_3}{(s+1)} + \frac{C_4(s+1)^2}{s+2}$$

Fazendo $s=-1$, tanto o lado esquerdo quanto o termo envolvendo C_3 tendem a infinito. O mesmo problema acontece se tentarmos calcular C_1 . Então, um procedimento alternativo deve ser usado. Diferencie ambos os lados da eq. (2.51) com relação a s e obtenha:

$$-\frac{1}{(s+2)^2} = 2C_1(s+1) + C_2 + C_4 \frac{(s+1)^2(2s+5)}{(s+2)^2} \quad (2.52)$$

Faça $s=-1$ e obtenha $C_2=-1$.

Cálculo de C_1 : para obter C_1 diferencie a eq. (2.52) uma vez mais e obtenha:

$$\frac{2}{(s+2)^3} = 2C_1 + C_4 2(s+1) \frac{s^2 + 5s + 7}{(s+2)^3}$$

Faça $s=-1$ e obtenha $C_1=1$.

c.1.4) Pólos e zeros de uma função de transferência

De acordo com a definição de função de transferência, temos:

$$G(s) = \frac{y(s)}{f(s)} \quad (2.53)$$

Em geral, a função de transferência $G(s)$ será a razão de dois polinômios:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (2.54)$$

Para sistemas fisicamente realizáveis, o polinômio $Q(s)$ será sempre de ordem menor do que o $P(s)$.

As raízes do polinômio $Q(s)$ são chamadas de zeros da função de transferência ou zeros do sistema cuja dinâmica é descrita pela função de transferência $G(s)$. Quando a variável s assume os valores dos zeros de $Q(s)$, a função de transferência é igual a zero.

As raízes do polinômio $P(s)$ são chamadas de pólos da função de transferência, ou equivalentemente de pólos do sistema. Nos pólos de um sistema a função de transferência tende ao infinito.

Se sabemos onde os pólos de um sistema estão localizados, podemos determinar as características qualitativas da resposta do sistema a uma entrada em particular sem cálculos adicionais. Por exemplo, considere que a função de transferência de um sistema dada por:

$$G(s) = \frac{Q(s)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)^m(s-p_4)(s-p_4^*)(s-p_5)}$$

em que $p_1, p_2, p_3, p_4, p_4^*$ e p_5 são as raízes de $P(s)$, ou seja, os pólos do sistema. As seguintes observações podem ser feitas sobre a localização dos pólos:

1- Pólos distintos e reais, tais como p_1 e p_2 na Figura 2.8, estão localizados no eixo real. Durante a inversão da transformada de Laplace, dão origem a termos exponenciais tais como $C_1e^{p_1t}$ e $C_2e^{p_2t}$. Como $p_1 < 0$, $C_1e^{p_1t}$ cai exponencialmente para zero para $t \rightarrow \infty$ (Figura 2.9a). Como $p_2 > 0$, $C_2e^{p_2t}$ aumenta exponencialmente conforme $t \rightarrow \infty$ (Figura 2.9b). Então, pólos distintos no eixo real negativo produzem termos que caem para zero com o tempo, enquanto pólos positivos reais fazem com que a resposta tenda a infinito com o tempo.

2-Múltiplos pólos reais, tais como p_3 , que são repetidos m vezes, levam a termos como:

$$\left[C_{31} + \frac{C_{32}}{1!} t + \frac{C_{33}}{2!} t^2 + \dots + \frac{C_{3m}}{(m-1)!} t^{m-1} \right] e^{p_3 t}$$

O termo entre colchetes tende à infinito com o tempo. O comportamento do termo exponencial depende do valor do pólo p_3 :

Se $p_3 > 0$ então $e^{p_3 t} \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$.

Se $p_3 < 0$ então $e^{p_3 t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Se $p_3 = 0$ então $e^{p_3 t} = 1$ para todo tempo t .

Então pólos reais e múltiplos levam a termos que tendem ao infinito, se o pólo é positivo ou zero, ou decaem para zero, se o pólo é negativo.

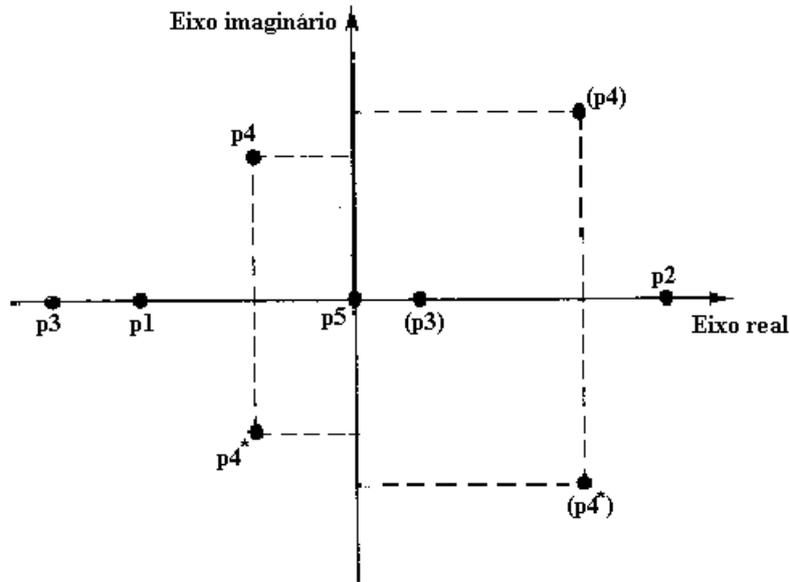


Figura 2.8

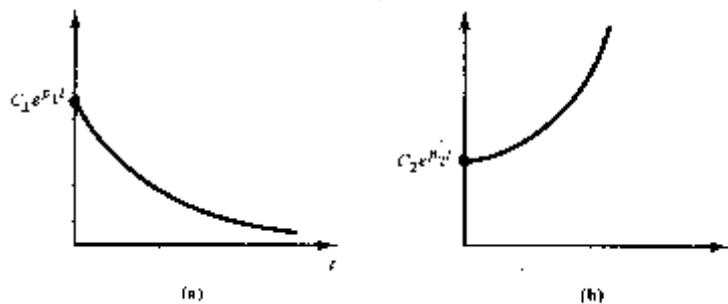


Figura 2.9

3-Pólos conjugados e complexos, tais como p_4 e p_4^* . Deve-se enfatizar que estas pólos sempre aparecem em pares conjugados e nunca sozinhos. Seja $p_4 = a + jb$ e $p_4^* = a - jb$. Na inversão estes levam a termos tais como $e^{at} \sin(bt + \phi)$. A função $\sin(bt + \phi)$ é periódica e oscilatória e o comportamento de e^{at} depende do valor da parte real a . Então:

Se $a > 0$, então $e^{at} \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$, e $e^{at} \sin(bt + \phi)$ tende para infinito de forma oscilatória (Figura 2.10a).

Se $a < 0$, então $e^{at} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, e $e^{at} \sin(bt + \phi)$ cai para zero de forma oscilatória com amplitude decrescente (Figura 2.10b).

Se $a = 0$, então $e^{at} = 1$ para todo t , e $e^{at} \sin(bt + \phi) = \sin(bt + \phi)$, que oscila continuamente com amplitude constante (Figura 2.10c).

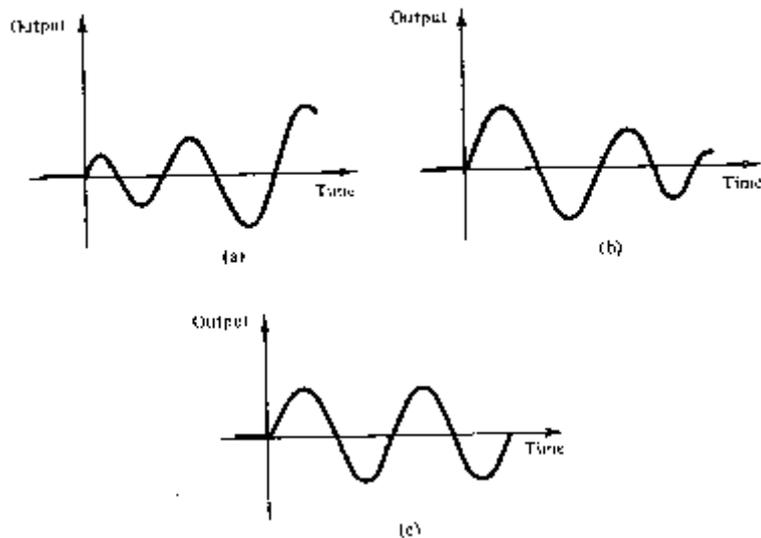


Figura 2.10

Então, um par de complexos conjugados como pólos levam a comportamento oscilatório, cuja amplitude pode crescer continuamente se a parte real do pólo complexo for positiva, decrescer para zero se a parte real do complexo for negativa ou permanecer constante se a parte real for zero.

Observações

1-O comportamento descrito acima é geral e descreve qualquer sistema. Assim, pode-se encontrar as características qualitativas da resposta do sistema se sabemos onde os pólos da sua função de transferência estão localizados. Para uma entrada particular $f(t)$ devemos considerar as raízes adicionais introduzidas pelo denominador de $f(s)$ antes de ter o quadro completo da resposta do sistema.

2-Pólos à direita do eixo imaginário levam a termos que crescem para o infinito com o tempo. Tais sistemas com comportamento não limitado são chamados de instáveis. Assim, um sistema será estável (ou seja, com resposta dentro de limites) se todos os pólos estão situados à esquerda do eixo imaginário (Figura 2.8).