ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Naval e Oceânica

PNV5203 – INTERAÇÃO FLUIDO ESTRUTURA I

NOTAS DE AULA

ELEMENTOS DE VIBRAÇÕES DE SISTEMAS
MECÂNICOS CONTÍNUOS

C. P. PESCE

Baseado no Cap. 7 do livro "Computational Methods in Structural Dynamics"
(Leonard Meirovitch)

2012

PNV-5203

ELEMENTOS DE DINÂMICA DE ESTRUTURAS

- VIBRAÇÕES DE SISTEMAS MECÂNICOS CONTÍNUOS -

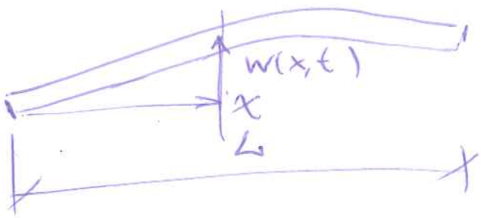
CELSO P. PESCE

1. Equações de Lagrange. Sistemas Contínuos. Problema de Valor de Contorno.

- SISTEMAS DISCRETOS vs SISTEMAS CONTÍNUOS
- ODE's vs PDE's
-

1.1. Sistemas Unidimensionais. Abordagem inicial

- vigas
- barras
- cabos
-



DOMÍNIO

$0 \leq x \leq L$

- Energia Cinética

$$T(t) = \int_0^L \hat{T}(x,t)\, dt \qquad (1)$$

$\hat{T}(x,t)$ densidade de energia cinética (unidimensional)

$$\hat{T}(x,t) = \hat{T}(\dot{w}, \dot{w}') \text{ , com } w = w(x,t) \qquad (2)$$

- Trabalho virtual e Energia Potencial

$$\delta W(t) = \int_0^L \delta \hat{W}(x,t)\, dx \quad , \qquad (3)$$

com

$$\delta \hat{W}(x,t) = \underbrace{\delta \hat{W}_c(x,t)}_{\text{conservativo}} + \underbrace{\delta \hat{W}_{nc}(x,t)}_{\text{não conservativo}} \qquad (4)$$

Note que

$$\delta \hat{W}_c(x,t) = -\delta \hat{V}(x,t) \qquad (5)$$

com $\hat{V}(x,t)$: densidade de energia potencial;

no caso $\hat{V}(x,t) = \hat{V}(w, w', w'')$ (6)

Força distribuída de natureza não conservativa:

$$\delta \hat{W}_{nc}(x,t) = p(x,t)\, \delta w(x,t) \qquad (7)$$

$\delta w(x,t)$: deslocamento virtual.

- Princípio de Hamilton estendido

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W)\, dt = 0 \quad . \qquad (8)$$

com $\delta w = 0$, $x \in [0, L]$

em $t = t_1, t_2$

Então:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L (\delta\hat{L} + \delta\hat{W}_{nc})\,dx\,dt \quad ; \quad \delta w = 0 \text{ em } t = t_1, t_2 \qquad (9)$$

com

$\hat{L}$ = Lagrangeana (densidade)

definida como:

$$\hat{L} = \hat{T} - \hat{V} = \hat{L}_e(w, w', w'', \dot{w}, \dot{w}') \qquad (10)$$

A variação da densidade Lagrangiana é

$$\delta\hat{L}_e = \frac{\partial\hat{L}_e}{\partial w}\delta w + \frac{\partial\hat{L}_e}{\partial w'}\delta w' + \frac{\partial\hat{L}_e}{\partial w''}\delta w'' + \frac{\partial\hat{L}_e}{\partial \dot{w}}\delta\dot{w} + \frac{\partial\hat{L}_e}{\partial \dot{w}'}\delta\dot{w}' \qquad (11)$$

t.f., com (7) e (11) em (9)

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L dx\,dt\left(\frac{\partial\hat{L}_e}{\partial w}\delta w + \frac{\partial\hat{L}_e}{\partial w'}\delta w' + \frac{\partial\hat{L}_e}{\partial w''}\delta w'' + \frac{\partial\hat{L}_e}{\partial \dot{w}}\delta\dot{w} + \frac{\partial\hat{L}_e}{\partial \dot{w}'}\delta\dot{w}' + p\,\delta w\right) = 0 \qquad (12)$$

O integrando deve ser transformado de forma a conter o fator δw tão somente.

Técnica – integrais por partes

$$\int_0^L \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial w'}\,\delta w'\,dx = \left[\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial w'}\,\delta w\right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial w'}\right)\delta w\,dx \quad (13.a)$$

$$\int_0^L \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial w''}\,\delta w''\,dx = \left[\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial w''}\,\delta w'\right]_0^L - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial w''}\right)\delta w\right]_0^L +$$

$$+ \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial w''}\right)\delta w\,dx \quad (13.b)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial \dot{w}}\,\delta \dot{w}\,dt = \left[\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial \dot{w}}\,\delta w\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial \dot{w}}\right)\delta w\,dt \quad (13.c)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial \dot{w}'}\,\delta \dot{w}'\,dx\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial \dot{w}'}\,\delta \dot{w}\right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial \dot{w}'}\right)\delta \dot{w}\,dx\right\}dt$$

$$= \left\{\left[\left[\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial \dot{w}'}\,\delta w\right]_0^L\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial \dot{w}'}\right)\delta w\right]_0^L dt +\right.$$

$$\left. - \left[\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial \dot{w}'}\right)\delta w\,dx\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x}\left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}_e}{\partial \dot{w}'}\right)\delta w\,dx\,dt\right\}$$

(13.d)

Substituindo (13.a,b,c,d) em (12), lembrando que $\delta w(x,t)=0$ em t_1 e t_2 e colecionando termos teremos:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_0^L dx \left[\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial w'}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial w''}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial \dot{w}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial \dot{w}'}\right) + p \right] \delta w \right.$$
$$\left. + \left[\left[\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial w'} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial w''}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial \dot{w}'}\right)\right] \delta w \right]_0^L + \left[\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial w''} \delta w'\right]_0^L \right\} = 0$$

(14)

δw é arbitrário, desde que compatível com as restrições ou vínculos.

Tome $\delta w = \delta w' = 0$ em $x=0$ e $x=L$:

Então:

$$\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial w'}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial w''}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial \dot{w}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial \dot{w}'}\right) + p = 0 \quad (15)$$

$$x \in [0, L]$$

E, adicionalmente, escrevendo

$$\left[\left[\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial w'} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial w''}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial \dot{w}'}\right)\right] \delta w \right]_0^L = 0 \qquad (16.a)$$

e

$$\left[\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial w''} \delta w'\right]_0^L = 0 \qquad (16.b)$$

resguarda-se a possibilidade de $\delta w, \delta w' = 0$ nos extremos $x=0, L$ ou que os fatores multiplicativos formados pelas derivadas parciais de $\hat{L}_e$ o sejam.

A eq. (15) é a equação de Lagrange para sistemas contínuos unidimensionais e deve ser satisfeita em todo o domínio $x \in [0, L]$.

Por outro lado, as <u>restrições</u> (16.a,b) podem ser satisfeitas de diversas formas. De fato (16.a) é satisfeita se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial w'} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial w''}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial \dot{w}'}\right) = 0 \quad \text{em } x = 0, L \qquad (17.a)$$

ou se

$$w = 0 \quad \text{em } x = 0, L \qquad (17.b)$$

A eq. (16.b) é satisfeita se:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_e}{\partial w''} = 0 \quad \text{em } x = 0, L \qquad (18.a)$$

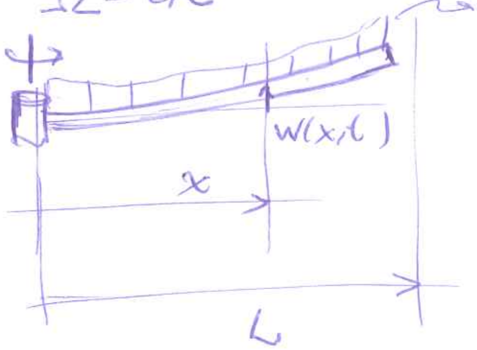
ou se

$$w' = 0 \quad \text{em } x = 0, L. \qquad (18.b)$$

As Eqs (17) e (18) são as condições de contorno e apenas uma das possibilidades de cada eq. precisa ser satisfeita.
Tais condições refletem ~~as~~ <u>situação física</u>.

Exemplo

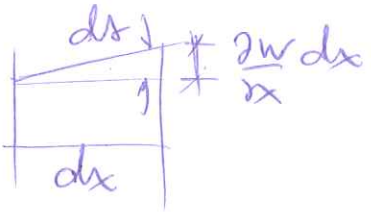
$\Omega = cte$



$m(x)$: massa linear

$J(x)$: momento de inércia de massa, linear

$EI(x)$: rigidez flexional.



$\gamma \simeq \frac{\partial w}{\partial x}$

Energia cinética (relativa ao rotor)

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^L m(x)\left(\dot{w}(x,t)\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L J(x)\left(\dot{w}'(x,t)\right)^2 dx \qquad (19)$$

$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$: velocidade transversal do elemento

$\dot{w}' = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}$: velocidade angular do elemento.

Energia potencial : (sem considerar a gravitacional)

$$V(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\left[w''(x,t)\right]^2 dx}_{\text{flexional}} + \underbrace{\int_0^L N(x,t)(ds - dx)}_{\text{axial}} \qquad (20)$$

neste caso:

$$N(x,t) = N(x) = \int_x^L m(\xi)\Omega^2 \xi \, d\xi = \Omega^2 \int_x^L m(\xi)\xi \, d\xi \qquad (21)$$

Note que o encurtamento

$$ds - dx = \sqrt{(dx)^2 + (w'(x,t)\,dx)^2} - dx = dx\left(\sqrt{1 + w'^2(x,t)} - 1\right)$$

$$\cong \left(1 + \frac{1}{2} w'^2(x,t) - 1\right) dx = \frac{1}{2} w'^2(x,t)\,dx \qquad (22)$$

Substituindo (21) e (22) em (20) segue:

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^L EI(x)\, w''^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^L \left(\Omega^2 \int_x^L m(\xi)\,\xi\, d\xi\right) w'^2 dx \qquad (23)$$

O trabalho virtual das cargas externas é escrito:

$$\delta W_{nc} = + \int_0^L p(x,t)\,\delta w\, dx \qquad (24)$$

note que $p(x,t) = q(x,t) - m g$. A parcela do peso é, estrito senso, conservativa e poderia ter sido adicionada na função de energia potencial elástica $V(t)$.

A função densidade Lagrangeana $\hat{\mathcal{L}}$ pode então ser escrita:

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} m \dot{w}^2 + \frac{1}{2} J \dot{w}'^2 - \frac{1}{2} EI\, w''^2 - \frac{1}{2}\Omega^2 \int_x^L m(\xi)\,\xi\, d\xi \cdot w'^2 \qquad (25)$$

Analisemos os termos presentes em Eq (15):

$$\frac{\partial \hat{L_e}}{\partial w} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \hat{L_e}}{\partial w'}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\int_x^L m(\xi)\Omega^2\xi d\xi \, w'\right) =$$

$$= m(x)\Omega^2 x w' - \left(\int_x^L m\Omega^2\xi d\xi\right) w''$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \hat{L_e}}{\partial w''}\right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI w'')$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{L_e}}{\partial \dot{w}}\right) = m\ddot{w}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(\frac{\partial \hat{L_e}}{\partial \dot{w}'}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}(J\dot{w}') = \frac{\partial}{\partial x}(J\ddot{w}') \qquad (27)$$

Desta forma, a equação de movimento fica:

$$-m\Omega^2 x w' + \left(\int_x^L m\Omega^2\xi d\xi\right) w'' - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI w'') - m\ddot{w} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}(J\ddot{w}') + q - mg = 0 \quad ; \quad x \in [0, L]$$

$$(28)$$

Analisando as condições de contorno:

$$\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial w'} = -\left(\int_x^L m\Omega^2 \xi \, d\xi\right) w'$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial w''}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(EI w''\right) \qquad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial \dot{w}'}\right) = J \ddot{w}'$$

$$\frac{\partial \hat{L}_e}{\partial w''} = -EI w''$$

L.q. (17.a) toma a forma:

$$-\left(\int_x^L m\Omega^2 \xi \, d\xi\right) w' + \frac{\partial}{\partial x}\left(EI w''\right) - J\ddot{w}' = 0 \qquad \text{em } x = 0, L \qquad (30)$$

e (18.a):

$$-EI w'' = 0 \qquad \text{em } x = 0, L \qquad (31).$$

ou (17.b) e (18.b):

$w = 0$ em $x = 0, L$

$w' = 0$ em $x = 0, L$

<u>Em $x=0$</u> : (engaste) :

$$w(0,t) = 0 \qquad (32.a)$$

e

$$w'(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \qquad (32.b)$$

<u>Em $x=L$</u> ; (livre) , de (30):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\,w''(x,t)\right)\Big|_{x=L} = J\ddot{w}'(x,t)\Big|_{x=L} \qquad (33.a)$$

e

$$EI\,w''(x,t)\Big|_{x=L} = 0 \qquad (33.b)$$

As condições (32.a) e (32.b) são condições geométricas, ou "essenciais".

Já as condições (33.a) e (33.b) são de balanço de forças/momentos. A primeira de força de cisalhamento ou esforço cortante. A segunda de balanço de momento fletor. São c.c. dinâmicas ou "<u>naturais</u>".

[Pergunta-se: como seriam modificadas se uma massa concentrada fosse adicionada a $x=L$?]

O problema matemático estará completo com o estabelecimento de condições iniciais:

$$w(x,0) = w_0(x) \qquad (34.a)$$

e

$$\dot{w}(x,t)\Big|_{t=0} = \dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x) \qquad (34.b)$$

2. O problema de auto-valor. Exemplo.

Por simplicidade o deslocamento será medido da posição de eq. estática, tal que o termo $-mg$ não mais comparecerá! (*)

Também suprimiremos o termo forçante $f(x,t)$ já que estamos interessados em tratar o problema de vibrações "naturais".

A técnica é a "velha" por separação de variáveis:

$$w(x,t) = W(x)\,T(t) \qquad (35)$$

Substituindo (35) em (28), segue:

(*) O equilíbrio é, por hipótese, estável. (lembrar de instabilidades flexo-torsionais)

$$\left[-m\Omega^2 x v' + \left(\int_x^L m\Omega^2 \xi \, d\xi\right) v'' - \frac{d^2}{dx^2}(EIv'')\right] \tau =$$

$$= \left[m v - \frac{d}{dx}(Jv')\right] \ddot{\tau} \qquad ; \; 0 \leq x < L \qquad (36)$$

(note que as derivadas parciais, no tempo e espaço, tornaram-se derivadas totais)

A eq. (32) leva a:

$$v(0)\,\tau = 0 \qquad (37.a)$$

e

$$v'(0)\,\tau = 0 \qquad (37.b)$$

E a eq. (33) a:

$$\left[\frac{d}{dx}(EIv'')\right]_{x=L} \tau = (Jv')\Big|_{x=L} \tau \qquad (38.a)$$

e

$$(EIv'')_{x=L}\, \tau = 0 \qquad (38.b)$$

Rearranjando a eq. (36):

$$\frac{m\Omega^2 x v' - \left(\int_x^L m\Omega^2 \xi \, d\xi\right) v'' + \frac{d^2}{dx^2}(EIv'')}{m v - \frac{d}{dx}(Jv')} = -\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = \lambda$$

(39)

ou seja:

$$\ddot{\tau} + \lambda \tau = 0 \qquad (40)$$

com solução

$$\tau(t) = A e^{st} \qquad (41)$$

de onde, em (40), surge a eq. característica:

$$s^2 + \lambda = 0 \qquad (42)$$

com raízes:

$$s_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} \qquad (43)$$

que levam a:

$$\tau(t) = A_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, t} + A_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, t} \qquad (44)$$

λ deve ser tomado como positivo para preservar soluções finitas. Assim, com

$$\lambda = \omega^2 \Rightarrow s_{1,2} = \pm i\omega \qquad (45)$$

e

$$\tau(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t} \qquad (46)$$

Mas, como $\tau(t)$ é real, então $A_1 = A_2^*$.

A frequência de oscilação ω depende das condições de contorno, obviamente. De fato, tomando a identidade da esquerda da eq. (39):

$$m\Omega^2 v' - \left(\int_x^L m\Omega^2 \xi \, d\xi\right) v'' + \frac{d^2}{dx^2}(EIv'') = \lambda\left[mv - \frac{d}{dx}(Jv')\right]$$

$0<x<L$ (47)

E a c.c. (37) fornece:

$$v(0) = 0 \qquad (48.a)$$

e

$$v'(0) = 0 \qquad (48.b)$$

E a c.c. (38) fornece:

$$-\left[\frac{d}{dx}(EIv'')\right]_{x=L} = \lambda\,(Jv')\Big|_{x=L} \qquad (49.a)$$

e

$$(EIv'')\Big|_{x=L} = 0 \qquad (49.b)$$

O problema de valor característico(*) consiste então em determinar ~~uma solução $v(x)$ não~~ ~~trivial~~ um parâmetro λ para o qual (47)-(48,49) admite soluções não triviais.

(*) ou de auto-valor

3. Problemas auto-adjuntos

Generalização é necessário, para um estudo das propriedades das soluções das equações do tipo exemplificado por (47-49).

Considere o operador diferencial linear:

$$Lw = A_0(x)\,w + A_1(x)\frac{dw}{dx} + \dots + A_{2p}(x)\frac{d^{2p}w}{dx^{2p}} \quad (50)$$

onde $A_0(x), \dots, A_{2p}(x)$ são funções conhecidas

p: é um inteiro, tal que o operador diferencial é dito de ordem $2p$.

Ou seja,

$$L = A_0(x) + A_1(x)\frac{d}{dx} + \dots + A_{2p}(x)\frac{d^{2p}}{dx^{2p}} \quad (51)$$

Considere um outro operador M, de ordem $2q$, $q<p$ e escreva:

$$Lw = \lambda M w \quad (52)$$

com λ um parâmetro. A eq. (52) é definida sobre o intervalo $(0,L)$.

Adicionalmente, a função w deve satisfazer a condições de contorno:

$$\mathcal{B}_i w = \lambda \, \mathcal{C}_i w \quad , \quad \begin{array}{l} i=1,\dots,p \\ x=0,L \end{array} \qquad (53)$$

onde $\mathcal{B}_i$ e $\mathcal{C}_i$ são operadores diferenciais lineares (homogêneos). A máxima ordem de $\mathcal{B}_i$ e $\mathcal{C}_i$ é $2p-1$ e $2q-1$ respectivamente.

Note que os operadores correspondentes a $x=0, L$ são, em geral, diferentes entre si.

O problema de auto-valor linear pode então ser posto da seguinte forma:

"Determinar os valores do parâmetro λ para aquel (quais) existem soluções não-triviais de (52-53)".

Os valores de λ são denominados <u>autovalores</u>.(*) As soluções correspondentes são as <u>autofunções</u>.

(*) valores próprios e funções próprias ou características.

No exemplo anterior:

$$L = m\Omega^2 x \frac{d}{dx} - \left[\left(\int_x^L m\Omega^2 \xi \, d\xi\right) - E\frac{d^2 I}{dx^2}\right]\frac{d^2}{dx^2} +$$

$$+ 2E\frac{dI}{dx}\frac{d^3}{dx^3} + EI\frac{d^4}{dx^4} \qquad (54.a)$$

e

$$M = m - \frac{dJ}{dx}\frac{d}{dx} - J\frac{d^2}{dx^2} \qquad (54.b)$$

com

$$B_1 = 1 \quad , \quad C_1 = 0 \quad , \quad B_2 = \frac{d}{dx} \quad , \quad C_2 = 0 \text{ em } x = 0 \qquad (54.c)$$

e

$$B_1 = -E\frac{dI}{dx}\frac{d^2}{dx^2} - EI\frac{d^3}{dx^3} \quad , \quad C_1 = J\frac{d}{dx}$$

$$B_2 = EI\frac{d^2}{dx^2} \quad , \quad C_2 = 0 \qquad \text{em } x = L \qquad (54.d).$$

O problema unidimensional

$$Lw = \lambda M w$$

pode ser generalizado para 2 e 3 dimensões.

Algumas Definições

$\mathcal{D}$: $x \in [0, L]$

$f(x)$, $g(x)$ contínua por partes e com primeira derivada tb contínua por partes.

(i) Produto interno:

$$(f, g) = \int_0^L f g \, dx \qquad (55)$$

Se $(f, g) = 0 \Rightarrow f$ e g são ditas ortogonais.

(ii) Norma

$$\|f\|^2 = (f, f) \qquad (56)$$

funções ortogonais com norma unitária são ditas ortonormais.

(iii) $\|f\| < \infty \Rightarrow$ norma existe

f é então dita quadrado integrável no sentido de Lebesgue. (Energia finita).

(iv) Independência linear

ϕ_j, $j = 1, \ldots, n$ são ditas linearmente independentes se

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j = 0 \quad \Rightarrow \quad c_j = 0, \; j = 1, \ldots, n \qquad (57)$$

(v) ortogonalidade implica, obviamente, em independência linear:

$$\text{de (57)} \quad 0=\sum_{j=1}^{n} c_j \int_0^L \phi_j \phi_k \, dx = \sum_{j=1}^{n} c_j \|\phi_k\|^2 \delta_{jk} = c_k \|\phi_k\|^2 \qquad (58)$$

$k=1,\dots,n$

Então, como $\|\phi_k\| \neq 0 \Rightarrow c_k \equiv 0, \quad k=1,\dots,n$.

(vi) O inverso não é necessariamente verdadeiro, embora o conjunto possa ser transformado em ortogonal.

(vii) Seja $\{\phi_j\}$ um conjunto ortonormal e f uma função qualquer

$$c_j = (\phi_j, f) = (f, \phi_j) = \int_0^L f \phi_j \, dx \qquad j=1,\dots,n \qquad (59)$$

são as projeções ou componentes de f na base ϕ_j.

(viii) Desigualdade de Bessel:

Seja

$$\|f - \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j\|^2 = \int_0^L (f - \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j)^2 dx \geq 0 \qquad (60)$$

Expandindo:

$$\int_0^L f^2 dx - 2\sum_{j=1}^{n} c_j \int_0^L f\phi_j \, dx + \sum_{j=1}^{n} c_j^2 =$$

$$= \int_0^L f^2 dx - 2\sum_{j=1}^{n} c_j^2 + \sum_{j=1}^{n} c_j^2 = \underbrace{\int_0^L f^2 dx}_{\|f\|^2} - \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \geq 0 \qquad (61)$$

então:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \qquad (62)$$

Como $\|f\|^2$ é independente do número de termos:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2 \qquad (63)$$

portanto, sempre limitado

Desigualdade de Bessel

(ix) <u>Melhor aproximação</u>

Seja $\tilde{f} = \sum_{j=1}^{n} d_j \phi_j$ uma aproximação.

O erro médio quadrático é:

$$M = \int_0^L \left(f - \sum_{j=1}^{n} d_j \phi_j\right)^2 dx = \int_0^L (f - \tilde{f}) dx \qquad (64)$$

Expandindo:

$$M = \int_0^L f^2 dx - 2\sum_{j=1}^{n} d_j \int_0^L f\phi_j \, dx + \sum_{j=1}^{n} d_j^2 =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{j=1}^{n} d_j c_j + \sum_{j=1}^{n} d_j^2 =$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{j=1}^{n} (d_j - c_j)^2 - \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \qquad (65)$$

Obviamente M é mínimo quando $d_j = c_j$, $j = 1, \dots, n$.

(x) Aproximação na média:

Se

$$\int_0^L (f - \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j)^2 dx < \varepsilon \quad , \ \varepsilon > 0 \text{ e arbitrariamente}$$

pequeno, então $\{\phi_j\}$ é dito completo. Se $\{\phi_j\}$ for completo, então:

$$\| f \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} c_j^2$$

Considere: $$f_n = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j \quad , \ n = 1, 2, \ldots \qquad (66)$$

Se

$$\lim_{n \to \infty} \| f - f_n \| = 0 \qquad (67)$$

então $f_1, f_2, \ldots$ é uma sequência que converge na média para f.

Note que completude não requer ortonormalidade do conjunto.

(xi) O espaço de soluções do problema (52-53) é denominado H_B^{2p}, significando que a derivada de ordem $2p$ de w tem energia finita com w satisfazendo as c.c. (53).

Toda função $\in$ a H_B^{2p} será denominada uma função de comparação. Elas precisam ser $2p$-diferenciáveis e satisfazer as cond. de contorno (53), mas não, necessariamente, a eq. diferencial.

Se E_B^{2p} for o espaço das auto-funções o espaço das funções de comparação é muito maior. De facto $H_B^{2p} \subset E_B^{2p}$.

Em geral, o problema (52-53)

$$Lw = \lambda M w$$
$$B_i w = \lambda C_i w$$

é relativamente simples. Usualmente M é uma mera função (e não um operador diferencial) e λ não comparece nas c. contorno.

(No exemplo do helicóptero, este é o caso se $J=0$.)

Consideramos, por simplicidade,

$$Lw = \lambda m w \qquad 0 < x < L \qquad (68a)$$
$$B_i w = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, p \qquad x = 0, L \qquad (68b)$$

com m a massa por unidade de comprimento.

Considere duas funções de comparação e o seguinte produto interno:

$$(u, Lv) = \int_0^L u L v \, dx \qquad (69)$$

O operador diferencial L (e o sistema (68)) é dito <u>auto-adjunto</u> se:

$$(u, Lv) = (v, Lu) \qquad (70)$$

Ser auto-adjunto implica um certo tipo de simetria do problema de auto-valor.

Integrando por partes,

$$(u,Lv) = \int_0^L u\,Lv\,dx = \int_0^L \sum_{k=0}^{p} a_k \frac{d^k u}{dx^k}\frac{d^k v}{dx^k}\,dx + \left[\sum_{l=0}^{p-1} b_l \frac{d^l u}{dx^l}\frac{d^l v}{dx^l}\right]_0^L \qquad (71)$$

com $a_k = a_k(x)$, $b_l = b_l(x)$, em geral.

Introduz-se a notação:

$$[u,v] = (u, Lv) = \int_0^L \sum_{k=0}^{p} a_k u^{(k)} v^{(k)} dx + \sum_{l=0}^{p-1} \Big[b_l u^{(l)} v^{(l)}\Big]_0^L \qquad (72)$$

denominada "produto interno de energia".

Note que, com $u=v$,

$$[u,u] = \int_0^L \sum_{k=0}^{p} a_k \left(u^{(k)}\right)^2 dx + \sum_{l=0}^{p-1} b_l \left(u^{(l)}\right)^2\Big|_0^L \qquad (73)$$

que pode ser interpretado como 2x a máxima energia potencial do sistema. A <u>norma de energia</u> é então definida como

$$|u| = [u,u]^{1/2} \qquad (74)$$

Introduzindo a sequência:

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (75)$$

Se $|u - u_n|^2 < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ para um n suficientemente grande, então $\{\phi_j\}$ é dito completo na norma de energia. E a sequência é dita convergente em energia para u se:

$$\lim_{n \to \infty} |u - u_n| = 0 \qquad (76)$$

O operador L é dito definido positivo se para qualquer função de comparação u

$$(u, Lu) = \int_0^L u L u \geq 0$$

e se a igualdade ocorrer se e só se $u \equiv 0$.

Neste caso, todos os autovalores λ_r são positivos. O sistema é dito definido positivo.

Estabilidade

$$\int_0^L w L w \, dx = \lambda \int_0^L w M w \, dx .$$

Se, no entanto, a igualdade ocorrer para $u \neq 0$, L é dito semidefinido positivo e existe ao menos um autovalor nulo → movimentos de corpo rígido.

Ortogonalidade de auto-funções (sistema auto-adj.)

Considere duas soluções distintas (λ_r, w_r) e (λ_s, w_s) ; Logo

$$L w_r = \lambda_r m w_r \qquad (7.78a)$$

$$L w_s = \lambda_s m w_s \qquad (78b)$$

então:

$$\int_0^L w_s L w_r \, dx = \lambda_r \int_0^L m w_r w_s \, ds \qquad (79a)$$

e

$$\int_0^L w_r L w_s \, dx = \lambda_s \int_0^L m w_r w_s \, ds \qquad (79.b)$$

Subtraindo:

$$\int_0^L w_s L w_r \, dx - \int_0^L w_r L w_s \, dx = (\lambda_r - \lambda_s) \int_0^L m w_r w_s \, ds \qquad (80)$$

Se o sistema é auto-adjunto $(w_s, L w_r) = (w_s, L w_r)$

portanto, para $\lambda_r \neq \lambda_s$:

$$\int_0^L m w_r w_s \, ds = 0 \qquad \lambda_r \neq \lambda_s \qquad (81)$$

que é a propriedade de ortogonalidade dos autovetores com respeito à função m.

Normalizando os modos, multiplicando-os por $\sqrt{m}$, escreve-se a ortogonalidade na forma ordinária:

$$(\sqrt{m}\, w_s, \sqrt{m}\, w_r) = 0 \qquad \lambda_r \neq \lambda_s \qquad (82)$$

Note que, tb,

$$\int_0^L w_s \mathcal{L} w_r \, dx = \int_0^L w_r \mathcal{L} w_s \, dx = 0 \quad , \lambda_r \neq \lambda_s \qquad (83)$$

ou seja, em sistemas auto-adjuntos, as auto-funções são ortogonais tb com respeito ao produto interno de energia, ou seja, com respeito ao operador $\mathcal{L}$.

<u>Nota</u>: multiplicidade
Se um certo λ_i tem multiplicidade $m_i \in \mathbb{N}$ então existem m_i auto-funções independentes a ele correspondentes. Qualquer combinação linear destas autofunções é uma autofunção. Tais combinações podem ser tomadas de forma a que sejam ortogonais entre si e (tb) às demais autofunções correspondentes aos demais autovalores.

<u>Normalização adicional conveniente</u>: $\int_0^L m w_r^2 dx = 1$

Neste caso, as auto-funções constituem um conjunto ortonormal infinito satisfazendo:

$$\underbrace{(\sqrt{m}\, w_r, \sqrt{m}\, w_s)}_{\text{prod. int. em massa}} = \int_0^L m\, w_r w_s \, dx = \delta_{rs} \qquad r,s = 1,2,\ldots \qquad (84.a)$$

$$\underbrace{[w_r, w_s]}_{\text{prod. interno em energia}} = \int_0^L \sum_{k=0}^{p} a_k\, w_r^{(k)} w_s^{(k)} dx + \left. \sum_{\ell=0}^{p-1} b_\ell\, w_r^{(\ell)} w_s^{(\ell)} \right]_0^L = \lambda_r \delta_{rs} \qquad r,s = 1,2,\ldots \qquad (84.b)$$

Assim o conjunto de autofunções $\{w_r\}$ $r=1,2,\ldots$ é completo. De onde pode ser enunciado o seguinte "teorema de expansão":

"Toda função w com Lw contínua e satisfazendo as condições de contorno do sistema pode ser expandida (representada) através de uma série absolutamente e uniformemente convergente formada (rápida) pelas autofunções na forma:

$$w = \sum_{r=1}^{\infty} c_r w_r \qquad (85)^{(*)}$$

onde os coeficientes c_r são dados por

$$c_r = \int_0^L m w w_r \, dx \qquad r=1,2,\ldots \qquad (86)."$$

Este teorema, no contínuo, tem sua imagem na teoria discreta, envolvendo matrizes de massa e rigidez simétricas.

Usualmente não há soluções analíticas ou em forma fechada o que nos remete a trabalhar com um conjunto de funções admissíveis ao invés das próprias auto-funções.

(*) questão prática: truncamento.

4. Sistemas Não-autoadjuntos

Alguns sistemas aeroelásticos, p.ex., são não-autoadjuntos, como flutter por exemplo.

Consideremos um op. lin. dif. hom. $\mathcal{L}$.
Pode-se mostrar que $\mathcal{L}$ tem sempre um operador adjunto $\mathcal{L}^*$ t.q.

$$(v, \mathcal{L}u) = (\mathcal{L}^* v, u) \qquad (87)$$

onde u e v são funções quaisquer nos domínios $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^*$ respectivamente, ~~em~~ particular, tome u como uma auto-função de $\mathcal{L}$, u_i e v como uma auto-função de $\mathcal{L}^*$, v_j:

$$\mathcal{L}u_i = \lambda_i u_i \qquad (88a)$$

$$\mathcal{L}^* v_j = \lambda_j^* v_j \qquad (88b)$$

O conjunto de autofunções v_i é dito adjunto ao conjunto de autofunções u_i.

Tome agora,

$$(v_j, \mathcal{L}u_i) = \int_0^L v_j \mathcal{L} u_i \, dx = \lambda_i \int_0^L v_j u_i \, dx \qquad (89.a)$$

e

$$(u_i, \mathcal{L}^* v_j) = \int_0^L u_i \mathcal{L}^* v_j \, dx = \lambda_j^* \int_0^L u_i v_j \, dx \qquad (89.b)$$

A subtração leva a (considere (87)):

$$(\lambda_i - \lambda_j^*) \int_0^L u_i v_j \, dx = 0 \qquad (90)$$

Então, para $\lambda_i \neq \lambda_j^*$:

$$(u_i, v_j) = \int_0^L u_i v_j \, dx = 0, \qquad \lambda_i \neq \lambda_j^* \quad i,j = 1,2,\ldots \qquad (91)$$

ou seja as auto-funções correspondentes aos operadores $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^*$ são ortogonais entre si, para distintos autovalores ($\lambda_i \neq \lambda_j^*$).
Ou seja, existe uma relação de "biortogonalidade" entre as auto-funções dos problemas adjuntos.

Escrevamos (88a) como:

$$(\mathcal{L} - \lambda_i) u_i = 0 \qquad (92)$$

e, então:

$$(v_i, (\mathcal{L} - \lambda_i) u_i) = 0 \qquad (93)$$

que expandida e considerando (87) leva a

$$(v_i, \mathcal{L} u_i) - (v_i, \lambda_i u_i) = (v_i, \mathcal{L} u_i) - \lambda_i (v_i, u_i) =$$

$$= (\mathcal{L}^* v_i, u_i) - \lambda_i (v_i, u_i) = ((\mathcal{L}^* - \lambda_i) v_i, u_i) = 0 \qquad (94)$$

Ou seja: u_i é ortogonal a qualquer função da forma $(\mathcal{L}^* - \lambda_i) v_i$. Assumindo que uma função genérica f seja representada por $(\mathcal{L}^* - \lambda_i) v_i$, isto implicaria em $(f, u_i) = 0$ e que u_i seria nula. Como isso não é possível, por definição, então:

$$(\mathcal{L}^* - \lambda_i) v_i = 0 \qquad (95)$$

O que prova que existe uma autofunção de $\mathcal{L}^*$ correspondente ao autovalor λ_i. Assim:

<u>TEO</u>:

"Os autovalores de $\mathcal{L}$ coincidem com os autovalores de $\mathcal{L}^*$, embora as auto-funções sejam distintas".

É conveniente normalizar os conjuntos das auto-funções t.q. $\int_0^L u_i v_i \, dx = 1$ $(i = 1, 2, \ldots)$, i.e., de forma bi-ortonormal,

$$(u_i, v_j) = \int_0^L u_i v_j \, dx = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, \ldots \qquad (96)$$

Os conjuntos de auto-funções são supostos completos. Assim $\forall f$ quadrado integrável pode ser expandida em $\forall$ um dos conjuntos:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i \qquad (97)$$

Assim:

$$(v_j, f) = (v_j, \sum_i \alpha_i u_i) = \sum_i \alpha_i (v_j, u_i) =$$

$$= \sum_i \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j = \alpha_i \qquad (98)$$

$$i = 1, 2, \ldots$$

As eqs (97)-(98) constituem uma versão do teo de expansão para sistemas não-autoadjuntos.
Uma segunda versão pode ser obtida através da expansão nos $\{v_j\}$:

$$f = \sum_j{}' \beta_j v_j \qquad (99)$$

com (mesmo procedimento).

$$\beta_j = (u_j, f) \qquad j = 1, 2, \ldots \qquad (100)$$

Consideremos também,

$$\mathcal{L} f = \sum_{i=1}^{\infty}{}' \alpha_i \mathcal{L} u_i = \sum_{i=1}^{\infty}{}' \alpha_i \lambda_i u_i$$

tal que $\mathcal{L} f$ pode ser expandido em série de autofunções u_i. De forma similar

$$\mathcal{L}^* f = \sum_{j=1}^{\infty}{}' \beta_j \mathcal{L}^* v_j = \sum_{j=1}^{\infty}{}' \beta_j \bar{\lambda}_j v_j \qquad (101)$$

Se $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$ então o operador $\mathcal{L}$ é dito auto-adjunto e as autofunções são, obviamente, as mesmas.

Problemas auto-adjuntos não têm, em geral, soluções em forma fechada.

Teoria Geral

O problema geral pode ser posto na forma:

$$\mathcal{L}[v] + M\left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] = 0 \qquad (102)$$

$+$ e.c.'s $+$ i.c.'s

onde $\mathcal{L}[\cdot]$ é um op. lin. dif. homogêneo no espaço $\underset{\sim}{x}$ de ordem $2n$ e $M[\cdot]$ o é de ordem $2m$ $n > m$.

Considere a solução na forma

$$v(\underset{\sim}{x}, t) = u(\underset{\sim}{x})\, e^{i\omega t} \qquad (103)$$

Assim:

$$\mathcal{L}[u] = \lambda M[u] \qquad u : \mathcal{D}$$

com $\lambda = \omega^2$ $\qquad (104)$

e

$$B_i[u] = 0 \quad (\text{homogêneas}) \quad i = 1, \dots, n$$

$$u : S = \partial\mathcal{D}$$

com $B_i[\cdot]$ op. lin. dif. hom. envolvendo derivadas normais a $\partial\mathcal{D} = S$, de ordem $n-1$.

A solução de (104) é conjunto infinito-enumerável de auto-valores e o correspondente conjunto de auto-vetores u_j, $j=1,2,\ldots$.

Como $L[\cdot]$ e $M[\cdot]$ são homogêneos, u_i podem ser determinados a menos de uma constante.

<u>Def. 1</u> toda função arbitrária satisfazendo (104b), 2n-diferenciável em $\mathcal{D}$ é denominada <u>função de comparação</u>.

<u>Def. 2</u>

O problema é dito <u>auto-adjunto</u> se para 2 <u>funções</u> de <u>comparações</u>

$$\int_{\mathcal{D}} u L[v]\, d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} v L[u]\, d\mathcal{D}$$

e (105)

$$\int_{\mathcal{D}} u M[v]\, d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} v M[u]\, d\mathcal{D}$$

Integração por partes é a técnica para verificar se o sistema é auto-adjunto, com o devido uso das c.c.'s.

<u>Def. 3</u> Um operador $\mathcal{L}[\cdot]$ é dito <u>definido positivo</u> se

$$\int_{\mathcal{D}} u\,\mathcal{L}[u]\,d\mathcal{D} > 0 \qquad (106)$$

(note que $= 0$ se $\mathcal{L}[u] = 0$)

<u>Def. 4</u> Se $\mathcal{L}[\cdot]$ e $M[\cdot]$ são def. positivos, então o sistema <u>o é</u>.

<u>Teo</u>
Se o sist. (104) é ~~def~~ positivo def. então $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, ..$. Se $M[u]$ é pos. def. mas $\mathcal{L}[u]$ é apenas pos. então $\lambda_i = 0$ é um autovalor. Se quaisquer $\mathcal{L}$ autovalores forem iguais então, qualquer comb. linear das correspondentes auto-funções é tb uma auto função.

Ortogonalidade

Seja $\lambda_r \neq \lambda_s$ autovalores de um problema auto-adjunto. Então:

$$\mathcal{L}[u_r] = \lambda_r M[u_r]$$
$$\mathcal{L}[u_s] = \lambda_s M[u_s] \qquad (107)$$

Assim:

$$\int_{\mathcal{D}} \left(u_s \mathcal{L}[u_r] - u_r \mathcal{L}[u_s] \right) d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \left(\lambda_r u_s M[u_r] - \lambda_s u_r M[u_s] \right) d\mathcal{D} \qquad (108)$$

Cond. "auto-adjunto" $\Rightarrow$

$$\int_{\mathcal{D}} u_s \mathcal{L}[u_r]\, d\mathcal{D} = \int u_r \mathcal{L}[u_s]\, d\mathcal{D}$$
$$\int_{\mathcal{D}} u_s M[u_r]\, d\mathcal{D} = \int u_r M[u_s]\, d\mathcal{D} \qquad (109)$$

logo

$$(\lambda_r - \lambda_s) \int_{\mathcal{D}} u_r M[u_s]\, d\mathcal{D} = 0 \qquad (110$$

assim

$$\int_{\mathcal{D}} u_r M[u_s]\, d\mathcal{D} = 0$$
$$r \neq s \qquad (111)$$
$$\int_{\mathcal{D}} u_r \mathcal{L}[u_s]\, d\mathcal{D} = 0$$

para um sist. auto-adjunto

Teorema

Qualquer função u satisfazendo as c.c.'s e para a qual $\mathcal{L}[u]$ é contínua pode ser representada pela série convergente (uniforme e absolutamente):

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u_i$$

com, da prop. de ortogonalidade:

$$a_i = \frac{\int_{\mathcal{D}} u M[u_i]\, d\mathcal{D}}{\int_{\mathcal{D}} u_i M[u_i]\, d\mathcal{D}} \qquad i = 1, 2, \dots, \qquad (112)$$

"Enclosure"

Considere o prob. auto-adjunto:

$$\mathcal{L}[u] = \lambda M[u] \quad \text{em } \mathcal{D} \qquad (113)$$

$$B_i[u] = 0 \qquad i = 1, \dots, n \quad \text{em } \partial\mathcal{D}$$

Defina $\bar{\lambda} = \dfrac{\mathcal{L}[v]}{M[v]}$ onde v é uma função de comparação (114)

Então:

$$\bar{I} \rightarrow I_r \quad \text{se} \quad v \rightarrow u_r \quad \text{(auto-função)}$$

Teorema:

Sejam $\bar{I}_M$ e $\bar{I}_m$ valores máximos e mínimos de $\bar{I}$ em D para funções de comparações v. Então existe ao menos um autovalor λ_r do prob. de auto-valor.

$$\bar{I}_m \leq \lambda_r \leq \bar{I}_M \qquad (115)$$

Exemplo: barra fixa-livre

eq:

$$E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (116)$$

$$u = X(x)\, e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X'' e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u = -\omega^2 X e^{i\omega t}$$

então:

$$E X''(x) = -\rho\omega^2 X(x) \Rightarrow$$

$$-E X'' = -\rho\lambda X \qquad (117)$$

ou

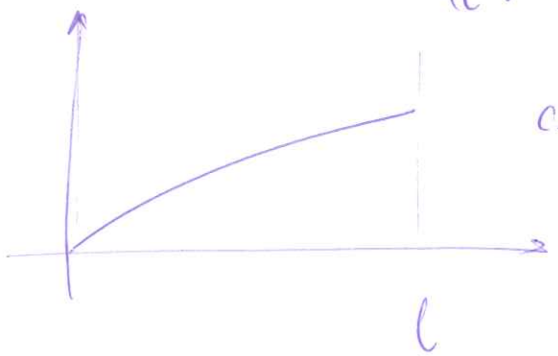
$$\mathcal{L}[u] = -E\frac{d^2}{dx^2} \quad , \quad M[u] = \rho \tag{118}$$

e

$$X(0) = X'(0) = 0$$

As funções de comparação devem satisfazer as c.c.'s. Tentemos:

$$v(x) = c\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)\right]$$



$$\text{c.c.}\begin{cases} v(0) = 0 \\ v'(x) = c\left[3(x/\ell)^2 - 3\right] \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

Assim:

$$\mathcal{L}[v] = -E\frac{6c}{\ell^2}\left(\frac{x}{\ell}\right)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\mathcal{L}[v]}{M[v]} = \frac{E}{\rho\ell^2}\frac{6}{(3-(x/\ell)^2)}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{\lambda}_m &= \frac{2E}{\rho\ell^2} \\ \bar{\lambda}_M &= \frac{3E}{\rho\ell^2} \end{aligned}\right\} \quad \bar{\lambda}_m \leq \lambda \leq \bar{\lambda}_M$$

Na realidade:

$$\lambda_1 = (\pi/2)^2 \frac{E}{\rho l^2} = 2.4674 \frac{E}{\rho l^2}$$

Quociente de Rayleigh

Considere

$$R[u] = \frac{\int_{\mathcal{D}} u\, L[u]\, d\mathcal{D}}{\int_{\mathcal{D}} u\, M[u]\, d\mathcal{D}} \qquad (119)$$

Se o sistema é pos. def. $\Rightarrow R[u] > 0$

Tb, se $u = u_i$, uma auto-função então:

$$R[u_i] = \frac{\int_{\mathcal{D}} u_i \lambda_i M[u]\, d\mathcal{D}}{\int_{\mathcal{D}} u_i M[u_i]\, d\mathcal{D}} =$$

$$= \lambda_i \qquad (120)$$

Seja:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} b_i u_i \qquad (121)$$

e normalize tal que:

$$\int_{\mathcal{D}} u_i M[u_i] d\mathcal{D} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots \qquad (122)$$

então

$$\int_{\mathcal{D}} u_i L[u_i] d\mathcal{D} = \lambda_i , \qquad i = 1, 2, \ldots \qquad (123)$$

Substituindo em $R[u]$:

$$R[u] = \frac{\int_{\mathcal{D}} \left(\sum' b_i u_i\right) L\left(\sum' b_i u_i\right) d\mathcal{D}}{\int_{\mathcal{D}} \left(\sum' b_i u_i\right) M\left(\sum' b_i u_i\right) d\mathcal{D}} =$$

$$= \frac{\sum'_i \sum'_j b_i b_j \int_{\mathcal{D}} u_i L[u_j] d\mathcal{D}}{\sum'_i \sum_j b_i b_j \int_{\mathcal{D}} u_i M[u_j] d\mathcal{D}} \qquad (124)$$

Da condição de ortogonalidade:

$$R[u] = \frac{\sum' b_i^2 \lambda_i}{\sum' b_i^2} \qquad (125)$$

Seja u próximo a uma u_r t.q.

$$\left| \frac{b_i}{b_r} \right| = \varepsilon_i \ll 1 \qquad \forall i \neq r$$

(126)

Então:

$$R[u] = \frac{\lambda_r + \sum'_{i\neq r} \varepsilon_i^2 \lambda_i}{1 + \sum'_{i\neq r} \varepsilon_i^2} = \lambda_r \cdot (1 + O(\varepsilon^2)) \qquad (127)$$

Se $r = 1$

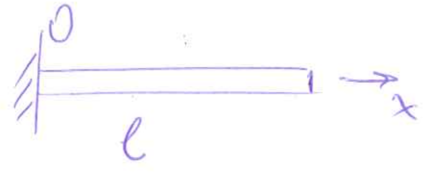
$$R[u] = \frac{\lambda_1 + \sum'_{i\neq 1} \varepsilon_i^2 \lambda_i}{1 + \sum'_{i\neq 1} \varepsilon_i^2} = \left(\lambda_1 + \sum'_{i\neq 1} \varepsilon_i^2 \lambda_i\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 - \sum'_{i\neq 1} \varepsilon_i^2 + O(\varepsilon^4)\right) =$$

$$= \lambda_1 + \sum'_{i\neq 1} (\lambda_i - \lambda_1)\varepsilon_i^2 + O(\varepsilon^4) \qquad (128)$$

Mas $\lambda_i > \lambda_1 \Rightarrow R[u] \geqslant \lambda_1$

Exemplo:



$$X(x) = c\left[\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{\ell}\right)\right] = u(x)$$

$$\mathcal{L}(u) = -E\frac{d^2}{dx^2}u = -\frac{6EC}{\ell^2}(x/\ell)$$

$$M(u) = \rho c\left((x/\ell)^3 - 3(x/\ell)\right)$$

$$\int_0^l u\, L[u]\, dx = \frac{24}{5}\frac{Ec^2}{l}$$

$$\int_0^l u\, M[u]\, dx = \frac{68}{35} c^2 \rho l$$

$$\therefore \quad \ell[u] = \frac{168}{68}\frac{E}{\rho l^2} = 2.4706 \frac{E}{\rho l^2}$$

compare com $\quad \lambda_1 = 2.4674 \dfrac{E}{\rho l^2}$!

5. MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

A função de comparação u pode ser expandida em termos de um conjunto finito de funções de comparação v_i:

$$u^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad (129)$$

então:

$$R[u^{(n)}] = \frac{\int_{\mathcal{D}} u^{(n)} L[u^{(n)}]\, d\mathcal{D}}{\int_{\mathcal{D}} u^{(n)} M[u^{(n)}]\, d\mathcal{D}} =$$

$$= \frac{A[u^{(n)}]}{B[u^{(n)}]} = \lambda^{(n)} \qquad (130)$$

O "melhor" resultado para $R[u^{(n)}]$ será o de menor valor. Queremos portanto minimizar $R[u^{(n)}]$. Uma c.n. para que $R[u^{(n)}]$ tenha um mínimo é:

$$\frac{\partial R[u^{(n)}]}{\partial a_j} = 0 \qquad (131)$$

que fornece:

$$\frac{1}{B^2[u^{(n)}]} \left\{ B[u^{(n)}] \frac{\partial A[u^{(n)}]}{\partial a_j} - A[u^{(n)}] \frac{\partial B[u^{(n)}]}{\partial a_j} \right\} = 0$$

$$j = 1, \ldots, n \qquad (132)$$

Note que esta condição é, na realidade de estacionariedade.

Se o sistema é positivo definido

$$\delta^2 [u^{(n)}] > 0 \qquad (133)$$

i.e.,

$$\frac{\partial A[u^{(n)}]}{\partial a_j} - \lambda^{(n)} \frac{\partial B[u^{(n)}]}{\partial a_j} = 0 \quad j=1,\dots,n \qquad (134)$$

pois $\lambda^{(n)} = \dfrac{A[u^{(n)}]}{B[u^{(n)}]}$

Definimos:

$$K_{ij} = \int_{\mathcal{D}} v_i L[v_j] \, d\mathcal{D}$$

e $\qquad (134)$

$$m_{ij} = \int_{\mathcal{D}} v_i M[v_j] \, d\mathcal{D}$$

Note que, se o sistema for auto-adjunto,

$$K_{ij} = K_{ji}$$

e $\qquad (135)$

$$m_{ij} = m_{ji}$$

Como $\mathcal{L}$ e M são operadores diferenciais lineares ;

$$\mathcal{A}[u^{(n)}] = \int_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \, \mathcal{L}\left[\sum_{j=1}^{n} a_j v_j\right] d\mathcal{D} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \int_{\mathcal{D}} v_i \, \mathcal{L}[v_j] \, d\mathcal{D} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} a_i a_j = \underset{\sim}{a}^t \mathbb{K} \underset{\sim}{a} \qquad (136)$$

com $\quad \mathbb{K} = [k_{ij}] \qquad (137)$

e $\quad \underset{\sim}{a} = [a_j]^t \qquad (138)$

Analogamente,

$$\mathcal{B}[u^{(n)}] = \underset{\sim}{a}^t \mathbb{M} \underset{\sim}{a} \qquad (139)$$

com $\quad \mathbb{M} = [m_{ij}] \qquad (140)$

Assim

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(k_{ij} \frac{\partial a_i}{\partial a_k} a_j + k_{ij} a_i \frac{\partial a_j}{\partial a_k} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(k_{ij} \delta_{ik} a_j + k_{ij} \delta_{jk} a_i \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} k_{kj} a_j + \sum_{i=1}^{n} k_{ki} a_i = 2 \sum_{j=1}^{n} k_{kj} a_j =$$

$$= 2 \left(\mathbb{K} \underset{\sim}{a} \right)_{k\text{'ésima coluna}} \qquad (141)$$

Similarmente:

$$\frac{\partial B}{\partial a_k} = 2 \sum_{j=1}^{n} m_{kj} \cdot a_j = 2 \left(\mathbb{M} \underset{\sim}{a} \right)_{k\text{'ésima coluna}} \qquad (142)$$

De (134) tem então que:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(k_{kj} - \lambda^{(n)} m_{kj} \right) a_j = 0 \qquad (143)$$

ou

$$\left(\mathbb{K} - \lambda^{(n)} \mathbb{M} \right) \underset{\sim}{a} = 0 \qquad (144)$$

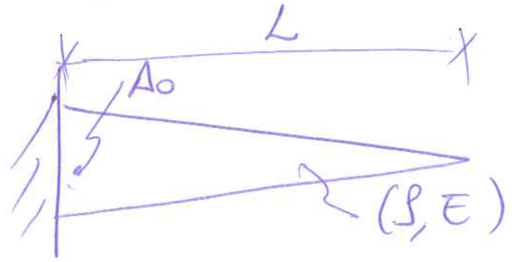
que é um problema de autovalor discreto e é conhecida como Eq. de Galerkin.

Resolvendo-se (144), obtém-se:

$$\left(\lambda_i^{(n)};\ \underset{\sim}{a}_i^{(n)}\right);\quad i=1,\dots,n$$

como os auto-valores e respectivos auto-vetores do problema. Os autovalores $\lambda_i^{(n)}$ da eq. de Galerkin são "upper bounds" ou valores limite-superior dos autovalores do prob. contínuo, original.

<u>Exemplo</u>: Barra com seção variável ("tapered")



Use: $$u^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_i \,\text{sen}\, \frac{(2i-1)\pi x}{2L}$$

com $v_i = \text{sen}\,\frac{(2i-1)\pi x}{2L}$ funções de comparação (satisfazem as c.c.'s)

Assim:

$$k_{11} = \int_0^L v_1 \mathcal{L}[v_1]\,dx = \frac{EA_0}{4L}\left(1+\pi^2/4\right)$$

$$m_{11} = \int_0^L v_1 M[v_1]\,dx = \rho\frac{A_0 L}{4}\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right)$$

pois:

$$A(x) = A_0 \, (1 - x/L)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\, E \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho A(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left(A(x)\, E \frac{d X(x)}{dx} \right) = \omega^2 \rho \, A(x) X(x)$$

com

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dx}\left(A(x)\, E \frac{d}{dx}(\circ) \right)$$

$$M = \omega^2 \rho A(x)$$

Se parássemos por aqui:

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{k_{11}}{m_{11}} = (2{,}4146)^2 \frac{E}{\rho L^2}$$

(Método do Quociente de Rayleigh)

Continuando:

$$K_{12} = K_{21} = \int_0^L v_1 \mathcal{L}[v_2]\, dx = \frac{3}{4} \frac{E A_0}{L}$$

$$K_{22} = \int_0^L v_2 \mathcal{L}[v_2]\, dx = \frac{E A_0}{4L} \left(1 + \frac{9}{4}\pi^2 \right)$$

$$m_{12} = m_{21} = \int_0^L v_1 M[v_2]\, dx = \frac{\rho A_0 L}{\pi^2}$$

$$m_{22} = \frac{\rho A_0 L}{4} \left(1 - \frac{4}{9\pi^2} \right) = \int_0^L v_2 M[v_2]\, dx$$

Assim, em aprox. com $n=2$:

$$\left[\frac{EA_0}{L} \begin{bmatrix} 1+\pi^2/4 & 3 \\ 3 & 1+\frac{9}{4}\pi^2 \end{bmatrix} - \lambda^{(2)} \rho A_0 L \begin{bmatrix} 1-4/\pi^2 & 4/\pi^2 \\ 4/\pi^2 & 1-4/9\pi^2 \end{bmatrix} \right]$$

$$\cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{0}$$

Resolvendo: "Exato"

$$\lambda_1^{(2)} = (2.4062)^2 \frac{E}{\rho L^2} \qquad (2.4048)^2 \frac{E}{\rho L^2}$$

$$\lambda_2^{(2)} = (5.5929)^2 \frac{E}{\rho L^2} \qquad (5.5201)^2 \frac{E}{\rho L^2}$$

Continuando:

$$\frac{\lambda_1^{(3)}}{\frac{E}{\rho L^2}} = (2.4049)^2 \qquad \frac{\lambda_2^{(3)}}{\frac{E}{\rho L^2}} = (5.5216)^2$$

$$\frac{\lambda_3^{(3)}}{\frac{E}{\rho L^2}} = (8.6646)^2$$

"Exato": $(8.6536)^2$

Note que:

$$R[u] = \frac{\int_{\mathcal{D}} u \, \mathcal{L}[u] \, d\mathcal{D}}{\int_{\mathcal{D}} u \, M[u] \, d\mathcal{D}} = \frac{\bar{V}_{MAX}}{\bar{\bar{T}}_{MAX}} \qquad (145)$$

6. MÉTODO DE GALERKIN

Considere o problema de auto-valor

$$\mathcal{L}[u] = \lambda M[u] \qquad (146)$$

e a aproximação:

$$u^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \qquad (147)$$

Observe que $u^{(n)}$, em geral, não satisfaz as eq. diferenciais de forma exata. É apenas uma aproximação.

Define o erro associado como:

$$\varepsilon^{(n)} = \mathcal{L}[u^{(n)}] - \lambda^{(n)} M[u^{(n)}] \qquad (148)$$

com $\lambda^{(n)}$ a aproximação do autovalor λ

Faz-se então o erro ortogonal a todo v_k,

ou seja:

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{E}^{(n)} v_k \, d\mathcal{D} = 0 \qquad k=1,\dots,n \quad (149)$$

NOTA: poder-se-ia definir a ortogonalidade com respeito ao operador M:

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{E}^{(n)} M[v_k] \, d\mathcal{D} \equiv 0$$

Substituindo $\mathcal{E}^{(n)}$ em (149):

$$\int_{\mathcal{D}} v_k \mathcal{L}[u^{(n)}] \, d\mathcal{D} - \lambda^{(n)} \int_{\mathcal{D}} v_k M[u^{(n)}] \, d\mathcal{D} = 0$$

$$k=1,\dots,n \quad (150)$$

Mas

$$\int_{\mathcal{D}} v_k \mathcal{L}[u^{(n)}] \, d\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{n} k_{ki} a_i$$

$$(151)$$

e

$$\int_{\mathcal{D}} v_k M[u^{(n)}] \, d\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{n} m_{ki} a_i$$

E, portanto:

$$\left[\mathbb{K} - \lambda^{(n)}\mathbb{M}\right]\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0} \qquad (152)$$

como anteriormente.

Ou seja, o método de Rayleigh-Ritz é, essencialmente, o método de Galerkin.

7. MÉTODO DA COLOCAÇÃO

Assuma:

$$u^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_j v_j \qquad (153)$$

onde, agora, v_j pode satisfazer a eq. dif. ou as c.c.'s, (ou nenhuma delas). Selecione um conjunto de posições ξ_i no contorno $\partial\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$. Então, determine os coeficientes a_i, impondo que $u^{(n)}$ satisfaça a eq. dif. ou as c.c.'s em ξ_i

Considere o caso em que $\xi_i \in \mathcal{D}$.

Para que a eq. dif. seja satisfeita:

$$\mathcal{L}\left[u^{(n)}(\xi_i)\right] - \lambda^{(n)} M\left[u^{(n)}(\xi_i)\right] = 0 \qquad (154)$$

ou

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{L}\left[v_j(\xi_i)\right] - \lambda^{(n)} \sum_{j=1}^{n} a_j M\left[v_j(\xi_i)\right] = 0 \qquad (155)$$

Tome:

$$k_{ij} = \mathcal{L}\left[v_j(\xi_i)\right]$$
$$m_{ij} = M\left[v_j(\xi_i)\right] \qquad (156)$$

Então:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(k_{ij} - \lambda^{(n)} m_{ij}\right) a_j = 0 \qquad (157)$$

ou

$$\left(\mathbb{K} - \lambda^{(n)} \mathbb{M}\right) \underset{\sim}{a} = 0 \qquad (158)$$

que tem a mesma forma que o método de Ritz-Galerkin. No entanto, neste caso, $\mathbb{K}$ e $\mathbb{M}$ não resultam, em geral, simétricas.

8. MÉTODO DE GALERKIN – OSCILAÇÕES FORÇADAS

(redução do prob. contínuo em equações "modais")

Considere o sistema:

$$\mathcal{L}\left[u(\xi,t)\right] + M(\xi)\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2} = f(\xi,t) \quad (159)$$

com c.c.'s e c.i.'s

Tome:

$$u^{(n)}(\xi,t) = \sum_{i=1}^{n} v_i(\xi)\, \xi_i(t) \quad (160)$$

onde v_i são funções de comparação.

O termo de erro de aproximação será:

$$\mathcal{E}(\xi,t) = \mathcal{L}\left[u^{(n)}(\xi,t)\right] + M(\xi)\frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2}(\xi,t) - f(\xi,t) \quad (161)$$

No método Ritz-Galerkin, impõe-se que:

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{E}(\xi,t)\, v_k(\xi)\, d\mathcal{D} \equiv 0 \quad , k=1,\dots,n \quad (162)$$

Como $\mathcal{L}$ é linear:

$$\sum_{i=1}^{n} \ddot{\xi}_i(t) \int_{\mathcal{D}} M(\xi) v_k(\xi) v_i(\xi) d\mathcal{D} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) \int_{\mathcal{D}} v_k(\xi) \mathcal{L}\left[v_i(\xi)\right] d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} f(\xi, t) v_k(\xi) d\mathcal{D} \qquad (163)$$

Define:

$$m_{kj} = \int_{\mathcal{D}} M(\xi) v_k(\xi) v_j(\xi) d\mathcal{D} = m_{jk} \qquad (164)$$

e

$$k_{kj} = \int_{\mathcal{D}} v_k(\xi) \mathcal{L}\left[v_j(\xi)\right] d\mathcal{D} = k_{jk} \qquad (165)$$

e

$$Q_k = \int_{\mathcal{D}} f(\xi, t) v_k(\xi) d\mathcal{D} \qquad (166)$$

Assim:

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ki} \ddot{\xi}_i + \sum_{i=1}^{n} k_{ki} \xi_i = Q_k(t) \qquad (167)$$

ou

or

$$\mathbb{M}\,\ddot{\underset{\sim}{\xi}} + \mathbb{K}\,\underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{Q}(t) \qquad (168)$$