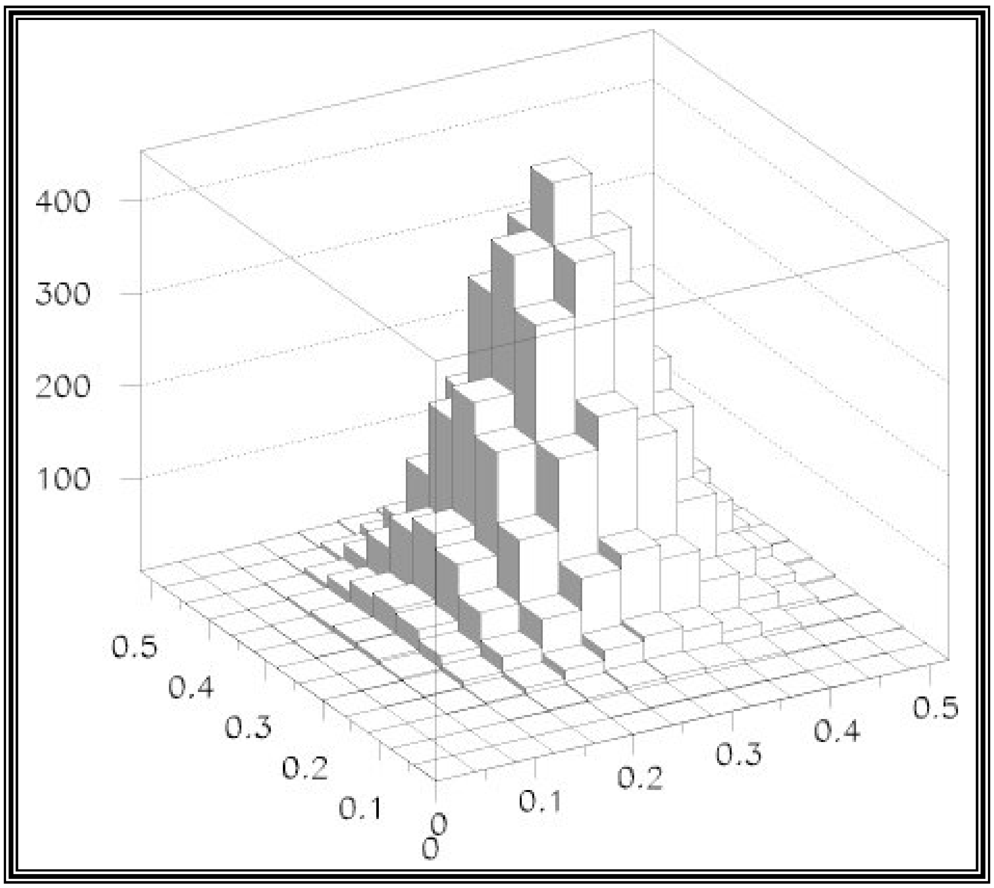
Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Conceitos Básicos da Teoria de Erros



Manfredo H. Tabacniks

Revisão 2009 (AAQ)

"Embora este Guia forneça um esquema de trabalho para obter incerteza, ele não pode substituir pensamento crítico, honestidade intelectual e habilidade profissional. A avaliação de incerteza não é uma tarefa de rotina, nem um trabalho puramente matemático. Ela depende do conhecimento detalhado da natureza do mensurando e da medição. Assim, a qualidade e a utilidade da incerteza apresentada para o resultado de uma medição dependem, em última instância, da compreensão, análise crítica e integridade daqueles que contribuíram para atribuir o valor à mesma."

Tradução de um trecho do "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements", International Organization for Standardization, Geneva (1993).

1. EXPRESSÃO DE VALORES DE MEDIDAS EXPERIMENTAIS

1.1. Introdução

O valor de uma grandeza submetida a medição costuma ser adquirido através de um procedimento que, em geral, envolve algum(s) instrumento(s) de medição. O próprio processo de medida, assim como o instrumento utilizado, tem limites de *precisão* e *exatidão*, ou seja, toda medida realizada tem uma incerteza associada que procura expressar a nossa ignorância (no bom sentido) do valor medido. A seleção do processo de medida, do instrumento usado e a reprodutibilidade da grandeza medida têm que ser expressas de alguma forma. Em alguns aparelhos, a incerteza do instrumento já vem marcada. Caso contrário, a metade da menor divisão da escala é um bom começo. Note que nada sabemos ainda sobre a reprodutibilidade do processo de medida.

A incerteza é importante na hora de compararmos resultados. Na tabela abaixo temos os resultados de duas medidas de uma mesma grandeza com diferentes aparelhos e um padrão.

medida	viscosidade (g cm^{-1} s^{-1})
A	9,8 ± 0,4
B	12,3 ± 4,0
padrão	9,3

Na tabela, o valor após o símbolo "±" indica em geral *o intervalo de confiança de um desvio padrão*[1], ou seja, o intervalo com probabilidadede de 67% de conter uma medida da grandeza. O valor que segue o símbolo "±" é denominado *incerteza*[2]. No caso acima, apesar da medida A estar aparentemente mais próxima do padrão, sua incerteza, expressa pelo intervalo de confiança, indica um provável erro de medida, enquanto o valor da medida B, apesar de ter uma incerteza maior, concorda com o valor do padrão.

1.2. Algarismos significativos

Em medidas físicas, é facil encontrar uma dispersão de valores muito grande. O raio de um átomo e o raio do universo são exemplos entre tantos. Para expressar esses valores adequadamente, é conveniente o uso da notação científica. Escreve-se o valor com apenas um dígito antes da vírgula, completa-se com algarismos decimais necessários (eventualmente truncando e arredondando o valor em alguma casa decimal) e se multiplica tudo pela potência de dez adequada. Por exemplo, o comprimento de um fio vale 14269513 mm ou é da ordem de $1{,}43 \times 10^{7}$ mm. Note que usamos apenas dois algarismos após a vírgula, sendo que o último foi arredondado para "cima" uma vez que 1,4269 está mais próximo de 1,43 que de 1,42. A regra de arredondamento aqui proposta é a de arredondar o último dígito para "cima" caso o próximo dígito seja ≥5, mantendo-o no caso contrário[3]. Note que ao truncar e arredondar as casas decimais, perdemos muito da informação inicial, mas isso pode ser remediado usando quantos algarismos forem necessários depois da vírgula. Por exemplo, $1{,}4269513 \times 10^{7}$ mm reproduz o valor com toda a precisão inicial.

[1] Em física e engenharia é comum adotar um desvio padrão para o intervalo de confiança. Em outras áreas, tais como epidemiologia, saúde e ciências médicas, dois ou até três desvios padrão são bastante comuns.

[2] Deve-se evitar o termo erro para a incerteza. Se uma medida tem um erro, este deve ser corrigido!

[3] Existem outras regras de arredondamento, mais complicadas, um pouco mais precisas, mas nenhuma é exata. A regra aqui proposta é também adotada pela maioria das calculadoras e algoritmos em computadores.

Denomina-se *algarismo significativo* o número de algarismos que compõem o valor de uma grandeza, **excluindo eventuais zeros à esquerda** usados para acerto de unidades. Mas atenção: ZEROS À DIREITA SÃO SIGNIFICATIVOS. Na tabela a seguir, um mesmo valor do raio de uma roda é escrito com diferente número de algarismos significativos.

raio (mm)	significativos
57,896	5
$5{,}79 \times 10^1$	3
$5{,}789600 \times 10^1$	7
$0{,}6 \times 10^2$	1

A escolha de quantos significativos serão usados no valor da grandeza depende da grandeza, do processo de medida e do instrumento utilizado. Na realidade, o número de algarismos significativos de uma grandeza é determinado pela sua incerteza.

O NÚMERO DE ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS DE UMA GRANDEZA É DETERMINADO PELA SUA INCERTEZA

Para a **expressão da incerteza** adaptaremos a convenção sugerida por Vuolo (1992).

Um outro exemplo é ilustrado a seguir: Suponha que se deseje medir o tamanho do besouro na Figura 1.1

Figura 1.1. Medindo o tamanho de um besouro.

Uma vez decidido o que caracteriza o tamanho do besouro, qual das alternativas abaixo melhor caracteriza a medida do tamanho do besouro?

a) Entre 0 e 1 cm
b) Entre 1 e 2 cm
c) Entre 1,5 e 1,6 cm
d) Entre 1,54 e 1,56 cm
e) Entre 1,546 e 1,547 cm

Acertou quem optou pela alternativa d). Isso porque, na leitura de uma escala, o algarismo significativo mais à direita de um número deve sempre ser o duvidoso (não esqueça: o algarismo duvidoso é significativo!). Resumindo: Qualquer medida por comparação entre um objeto e uma escala deve incluir além dos dígitos exatos (1,5 nesse caso) uma estimativa do dígito duvidoso. Uma vez que a régua foi marcada em milímetros você deve estimar o comprimento fracionário (em décimos de mm) que melhor expressa a medida. Você pode não precisar se vale 1,54, 1,55 ou mesmo 1,56. **Essa é a expressão da sua incerteza**.

Só para confirmar: Qual o diâmetro da moeda na Figura 1.2?

Figura 1.2. Medindo o diâmetro de uma moeda.

a) Entre 0 e 2 cm
b) Entre 1 e 2 cm
c) Entre 1,9 e 2,0 cm
d) Entre 1,92 e 1,94 cm
e) Entre 1,935 e 1,945 cm

No exemplo acima podemos afirmar que a metade da menor divisão é uma estimativa da nossa incerteza: portanto o diâmetro da moeda pode ser expresso como:

1,93 ± 0,05 cm
1,93(5) cm

1.2.1. EXPRESSÃO DA INCERTEZA.

Como devemos expressar a incerteza de uma medida? Ou, posto de outra forma: **quantos algarismos significativos** devem ter a incerteza de uma medida? Usaremos a seguinte convenção[4]:

- Se o primeiro dígito significativo da incerteza for menor que 3, usaremos DOIS significativos.
- Caso o primeiro dígito significativo da incerteza for maior ou igual a 3, podemos usar UM ou DOIS algarismos significativos para a incerteza;

*Resumindo: qualquer que seja **o caso sempre** podemos usar dois significativos para expressar a incerteza. Mas atenção: quando a incerteza for resultado de uma estimativa ou apenas indicativa, tal como a metade da menor divisão de um instrumento, sugerimos usar apenas UM dígito significativo. Não tem sentido, por exemplo, expressar a incerteza de uma régua milimetrada com DOIS significativos (0,50mm), basta escrever 0,5mm.*

1.2.2. EXPRESSÃO DA GRANDEZA

- Usar a mesma potência de dez tanto para o valor da grandeza como para sua incerteza;
- O número de algarismos significativos da incerteza é dado pela regra 1.2.1. acima;
- O número de dígitos depois da vírgula na incerteza tem que ser o mesmo que no mensurando;
- A notação científica pode ser usada para melhor legibilidade.

Veja alguns exemplos abaixo. Note o casamento do número de casas decimais na incerteza e no valor do mensurando.

notação errada	notação correta
5,30 ± 0,0572	5,30 ± 0,06
124,5 ± 11	125 ± 11
0,00002002 ± 0,0000005	$(200 \pm 5)\text{x}10^{-7}$
$(45 \pm 2{,}6)\text{x}10^{1}$	$(45 \pm 3)\ \text{x}\ 10^{1}$

1.3. Conceitos básicos para expressão de incertezas

O texto a seguir é uma adaptação do Guia para Expressão da Incerteza de Medição publicada pelo INMETRO (1998). Infelizmente, normas metrológicas são um assunto um tanto burocrático, mas também é parte da linguagem científica que precisamos dominar. Não houve de modo algum a pretensão de exaurir o

[4] Conforme Vuolo (1992) e Inmetro (1998).

assunto. Ao leitor interessado em aprofundar seus conhecimentos ou ansioso por outros exemplos, recomendamos fortemente consultar a referência citada.

1.3.1. Medição

O objetivo de uma **medição** é determinar o **valor** do **mensurando**, isto é, o valor da **grandeza específica** a ser medida. Uma medição começa, portanto, com uma especificação apropriada do mensurando, do **método de medição** e do **procedimento de medição**.

Medição: conjunto de operações que têm por objetivo determinar o valor de uma grandeza.

Valor (de uma grandeza): expressão quantitativa de uma grandeza específica, geralmente sob a forma de uma unidade multiplicada por um número. *Exemplo: comprimento de uma barra: 5,34m*

Mensurando: grandeza específica submetida à medição. *Exemplo: temperatura de fusão da glicerina.*

Grandeza (mensurável): atributo de um fenômeno, corpo ou substância que pode ser qualitativamente distinguido e quantitativamente determinado. O termo "grandeza" pode se referir a uma grandeza em sentido geral (*comprimento, tempo, massa.*) ou **grandeza específica** (*comprimento de uma barra, resistência elétrica de um fio*). Os símbolos das grandezas estão definidos na norma ISO 31.

Método de medição: sequência lógica de operações, descritas genericamente, usadas na execução das medições. *Exemplos: método de substituição, método diferencial, método de "zero"...*

Procedimento de medição: conjunto de operações, descritas especificamente, usadas na execução de medições particulares de acordo com um dado método. *Um procedimento (de medição) deve ser um documento com detalhes suficientes para permitir que um observador execute a medição sem informações* ***adicionais.***

1.3.2. Resultado de uma medição

Em geral, o **resultado de uma medição** é somente uma aproximação ou **estimativa** do valor do mensurando e, assim, só é completo quando acompanhado pela declaração de **incerteza** dessa estimativa. Em muitos casos, o resultado de uma medição é determinado com base em séries ou conjunto de observações obtidas sob **condições de repetitividade**.

Resultado de uma medição: valor atribuído a um mensurando obtido por medição. Deve-se indicar claramente se o resultado se refere à *indicação*, se é um *resultado corrigido* ou *não corrigido* e se corresponde ao *valor médio de várias medições*. A expressão completa do resultado de uma medição inclui informações sobre a incerteza da medição.

Estimativa: valor de uma estatística (*uma conta*) utilizada para estimar um parâmetro (*uma média, por exemplo*) da totalidade de ítens (*em geral infinito*), obtido como resultado de uma operação sobre uma amostra *(em geral um conjunto limitado de dados*) supondo um determinado modelo estatístico de distribuição (*distribuição norma, por exemplo*).

Incerteza (de medição): parâmetro associado ao resultado de uma medição que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando. Entende-se que o resultado de uma medição é a melhor estimativa do valor de um mensurando e que todos os componentes da incerteza, incluindo aqueles resultantes dos efeitos sistemáticos, contribuem para a dispersão.

Repetitividade (de resultados de medições): grau de concordância entre os resultados de medições sucessivas de um mesmo mensurando, efetuadas sob as mesmas condições de medição.
Condições de repetitividade incluem:
- mesmo procedimento de medição
- mesmo observador
- mesmo instrumento de medição sob as mesmas condições
- mesmo local
- repetição em curto período de tempo

1.3.3. Erros e incertezas

Deve-se atentar e distinguir com cuidado os termos "*erro*" e "*incerteza*". Esses termos não são sinônimos; ao contrário, representam conceitos completamente diferentes. Não devem ser confundidos nem mal empregados.

Erro

Uma medição tem imperfeições que dão origem a um **erro** no resultado da medição. O erro costuma ser classificado em dois componentes: **erro aleatório** e **erro sistemático**. O erro aleatório tem origem em variações imprevisíveis também chamadas efeitos aleatórios. Essses efeitos são a causa de variações em observações repetidas do mensurando. O erro aleatório não pode ser compensado, mas pode ser reduzido aumentando o número de observações. Apesar de frequentemente citado, o desvio padrão da média não é o erro aleatório da média. Representa, sim, uma medida da incerteza da média devido aos efeitos aleatórios. O erro sistemático, em geral, não pode ser eliminado, mas pode eventualmente ser reduzido ou, <u>caso seja identificado</u>, deve ser corrigido.

1.4. Estatísticas

Quando se trabalha com vários resultados em condições de repetitividade de uma medição, usam-se algumas estatísticas para resumir e consolidar as informações obtidas. Por exemplo: ao tentar determinar o tempo de queda de um corpo, um aluno mediu uma única vez o evento. Tendo a incerteza do aparelho utilizado, poderíamos ter uma idéia do acerto do aluno. <u>Mas a incerteza cobre apenas o erro do aparelho e não a do aluno ou mesmo do procedimento experimental</u>.

O problema que se coloca é: Como determinar a incerteza de uma medida?

COMO DETERMINAR A INCERTEZA DE UMA MEDIDA?

Uma abordagem alternativa para este problema é medir várias vezes o mesmo tempo e calcular a *média*. A variabilidade de cada medida é dada pelo *desvio padrão* e a variabilidade da média (caso se obtenham várias médias) será dada pelo *desvio padrão da média*[5].

O problema é que para obter o valor mais provável a partir de médias, determinar desvios padrão e desvio padrão de médias exige que se façam INFINITAS medidas e definitivamente não temos tempo para

[5] É comum encontrar a afirmação de que se fazem muitas medidas de uma mesma grandeza para melhorar um resultado. Isto é falso. A incerteza de um processo de medida é uma <u>característica do processo</u> expresso pelo desvio padrão, que independe do número de medidas (para n grande, típicamente n>10). É verdade que ao realizar muitas medidas pode-se obter um valor médio mais próximo do valor mais provável, uma vez que o desvio padrão da média (que expressa a incerteza da média) varia com $1/\sqrt{n}$. Entretanto, raramente se usa essa abordagem em medidas diretas (não estocásticas). Na prática, quando se deseja uma medida com incerteza menor, procura-se simplesmente um procedimento ou um instrumento melhor (um micrômetro no lugar de um paquímetro, por exemplo). A verdadeira razão de se repetir uma medida várias vezes é para estimar seu desvio padrão.

isso! Vamos, portanto, ESTIMAR o valor mais provável, o desvio padrão e o desvio padrão da média para um conjunto pequeno de medidas. O desenvolvimento teórico e a justificativa para esse procedimento podem ser encontrados em qualquer livro texto básico de estatística, como o de Helene e Vanin (1981).

A média, o desvio padrão e o desvio padrão da média, para um conjunto finito com *n* dados podem ser estimados aplicando as equações abaixo.

média de uma amostra com *n* valores:

$$m = \frac{1}{n}\sum x_i \qquad (1.1)$$

desvio padrão de uma amostra:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(x_i - m\right)^2} \qquad (1.2)$$

desvio padrão da média com *n* valores:

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{\left(n-1\right)n}\sum\left(x_i - m\right)^2} = \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (1.3)$$

Uma maneira gráfica de analisar estatisticamente esses dados é através de um histograma ou gráfico de barras. Neste tipo de gráfico, para uma visualização mais direta, o eixo x é divido em intervalos iguais que se chamam celas.

Há 3 grandezas que podem ser graficadas na forma de histograma: a *freqüência absoluta*, f_a, a *freqüência relativa*, f_r, e a *densidade de probabilidade, dp*. A freqüência absoluta é o gráfico onde o eixo y representa a quantidade absoluta de termos dentro de uma cela. Freqüência relativa tem no eixo y a fração da quantidade de termos dentro de uma cela. No gráfico de densidade de probabilidade $dP = f_r/\Delta x$, grafica-se no eixo y o resultado da divisão de f_r pelo tamanho da cela, Δx. Neste caso, a área do gráfico é a probabilidade de ocorrer o valor contido na cela ou intervalo (daí o nome densidade de probabilidade). Este último tem a vantagem de independer do tamanho da cela, valendo até mesmo para histogramas com tamanho de cela variável, pois a área total é sempre unitária! Veja o exemplo a seguir:

Tabela 1: Tempos de queda de um corpo. (ms)

4.93	0.77	7.01
2.21	6.00	5.17
4.12	5.40	2.56
3.83		

Tabela 2: Análise estatística dos tempos.

Cela	Intervalo	f_a	$f_r = f_a/n$	$dp = f_r/\Delta x$
1	0,00 ⊢— 2,00	1	0,10	0,05
2	2,00 ⊢— 4,00	3	0,30	0,15
3	4,00 ⊢— 6,00	4	0,40	0,20
4	6,00 ⊢— 8,00	2	0,20	0,10

Note que n = 10 é a quantidade de dados, e o intervalo é representado por um símbolo que, no caso, exclui o valor máximo da cela.

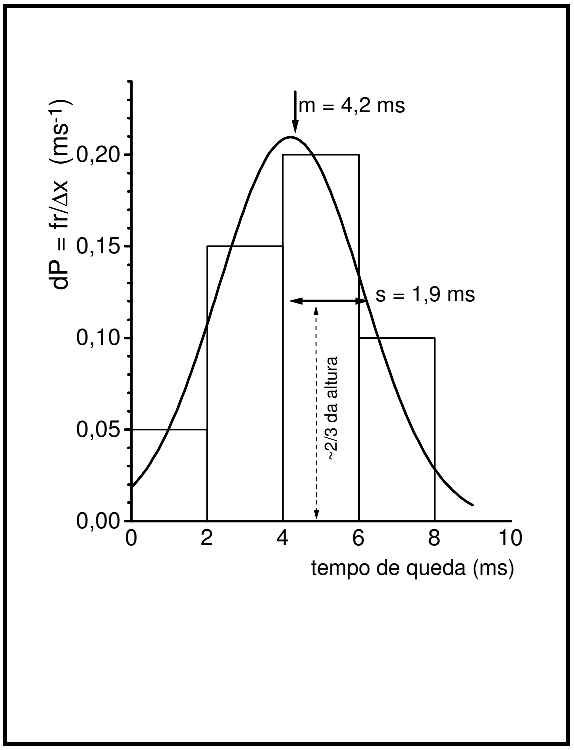


Figura 1.3. Histograma dos tempos de queda de um corpo.

O histograma dos dados na Tabela 1 está na Figura 1.3 acima. Note que a escala do eixo y está em unidades de densidade de probabilidade, que tem unidades de ms^{-1}. Para valores aleatórios distribuídos de acordo com a lei Normal com média μ e desvio padrão σ, o histograma de dP pode ser modelado por uma curva contínua, também denominada Gaussiana, dada por:

$$dP = \left(\frac{f_r}{\Delta x}\right) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-0,5*(x-m)^2}{s^2}\right) \qquad (1.4)$$

onde m é a estimativa da média e s é a estimativa do desvio padrão. Neste histograma, ajustamos uma curva e estimamos sua tendência central, m, ou seja, a média e sua largura, s, o desvio padrão.

O desvio padrão pode ser estimado graficamente, calculando o valor de x para o qual |x-m| = s. Neste caso, a equação (1.4) vale:

$$dP(|x-m|=s) = Y_o \exp\left(\frac{-0,5*(s)^2}{s^2}\right) \qquad (1.5)$$

onde Yo é a altura do máximo da curva. Isso implica que o desvio padrão pode ser estimado graficamente como a metade da largura total de uma gaussiana medida aproximadamente a 2/3 da altura, pois

$$dP_s = Y_o \exp(-0.5) = 0.61\, Y_o \approx \frac{2}{3} Y_o \qquad (1.6)$$

Note também que a área do histograma da Figura 1.1. é unitária, assim como a área da gaussiana.

1.5. Referências e bibliografia

Diretório Central dos Estudantes. *Normalização de trabalhos acadêmicos & referências bibliográficas.* 2ª. Ed. Pontifícia Universidade Católica de Campinas. - (1998). 52p

Fernandes, Normando C. O laboratório de projetos: inúmeras variações sobre o mesmo tema. *Preprint IFUSP*/ P-564. (1986).

Frota, Maurício Nogueira, Ohayon, Pierre. eds. *Padrões e Unidades de Medida - Referências Metrológicas da França e do Brasil.* INMETRO - Rio de Janeiro: Qualitymark Ed. 1999. 120p

Helene, Otaviano A.M. e Vanin, Vito R. *Tratamento estatístico de dados em física experimental*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 1981.

INMETRO, SBM. *Guia para expressão da incerteza de medição*. ABNT, Rio de Janeiro. (1998). 120p

Referências Bibliográficas de Multimeios e Documentos Eletrônicos. Pontifícia Universidade Católica de Campinas. Projeto Disque-Biblio, (1998) 19p.

Saad, Fuad Daher, Yamamura, Paulo; Watanabe, Kazuo . *Introdução a interpretação gráfica de dados, gráficos e equações*. 25p. IFUSP (sem data).

Vuolo, José Henrique. *Fundamentos da teoria de erros*. Ed. Edgard Blücher, São Paulo, SP. 2a Ed. 1992.

Yamamura, Paulo e Watanabe, Kazuo *Instrumentos de Medição in Manuais Didáticos de Física*. 18p. IFUSP (sem data).

2. PROPAGAÇÃO DE ERROS E INCERTEZAS

2.1. Introdução

Um *processo de medida* tem sempre por objetivo determinar o *valor médio verdadeiro,* y_{mv}, de uma *grandeza,* cujo *valor verdadeiro* é y_v. Acontece que, em geral, o valor verdadeiro nos é desconhecido, e para se obter o valor médio verdadeiro, são necessárias infinitas medidas!

Dessa forma, para um conjunto de medidas, $\{y_1, y_2, y_3, ...y_n\}$, o valor médio verdadeiro é dado por:

$$y_{mv} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \qquad (2.1)$$

Como em geral y_{mv} é um valor inacessível, usam-se *estimativas*: a média dada pela equação 1.1, a estimativa do desvio padrão (eq. 1.2) e do desvio padrão da média (eq. 1.3).

Relembremos alguns termos novos que usaremos com frequência:

MENSURANDO: Grandeza a ser determinada num processo de medição.

VALOR VERDADEIRO: Valor consistente com a definição de uma determinada quantidade. Em princípio, apenas obtido num processo de medida perfeito.

INCERTEZA: Parâmetro associado ao resultado de uma medida que caracteriza a dispersão dos valores que podem satisfatoriamente ser atribuídos ao mensurando. Reflete o desconhecimento do valor exato do mensurando.

ERRO: É a diferença entre a medida e o valor verdadeiro. Quanto menor o erro maior a exatidão (acurácia).

ERRO SISTEMÁTICO: Erro constante característico do processo ou instrumento.

ERRO PADRÃO: Desvio padrão dos valores médios em relação ao valor verdadeiro.

A grande diferença entre a incerteza e o erro (seja ele qual for) é que o erro pode, em princípio, ser 'corrigido' enquanto a incerteza é um intervalo de confiança das medidas. Logo, caso sua experiência tenha um erro, existe uma falha no procedimento que pode e deve ser corrigido.

Exemplo 1. Medida da tensão de uma pilha:

Neste exemplo, pretendemos determinar o valor mais provável e a respectiva incerteza da tensão de uma pilha. Usaremos um voltímetro cuja incerteza nominal (fornecida pelo fabricante) é de 1σ = 0,25% do valor indicado. A incerteza do processo de medida deve, portanto, ser combinada com a incerteza do fabricante, para gerar o resultado procurado. Algumas fórmulas utilizadas serão explicadas adiante. Retorne ao exemplo assim que terminar a leitura deste capítulo. As medidas realizadas estão na Tabela 2.1.

Tabela 2.1. Tensão de uma pilha medida com voltímetro (incerteza nominal 0,25%)

n	U (volt)	Incerteza nominal (V)
1	1,572	0,004
2	1,568	0,004
3	1,586	0,004
4	1,573	0,004
5	1,578	0,004
6	1,581	0,004

Antes, um comentário: a tabela 2.1 acima tem três colunas. A última contém a incerteza nominal das medidas que, como vemos, não varia ao longo das medidas. A tabela poderia ter apenas 2 colunas e a incerteza das medidas ser incorporada no título da coluna 2. A nova tabela ficaria como no exemplo abaixo, tabela 2.1b.

Tabela 2.1b. Tensão de uma pilha medida com voltímetro (incerteza nominal 0,25%)

n	U ± 0,004 (V)
1	1,572
2	1,568
3	1,586
4	1,573
5	1,578
6	1,581

Vamos aos cálculos. Note que em cálculos intermediários usamos um dígito significativo a mais, para apenas no final expressarmos o valor da medição conforme as normas discutidas no capítulo anterior.

Valor médio:

$$\overline{U} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} U_i = 1{,}5763 \text{ V}$$

Desvio padrão das medidas:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6-1}\sum_{i=1}^{6}(V_i - 1{,}5763)^2} = 0{,}0066 \text{ V}$$

Desvio padrão do valor médio:

$$\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}0066}{\sqrt{6}} = 0{,}0027 \text{ V}$$

Incerteza nominal do voltímetro (0,25% da medida)

$$L_r = \left(\frac{0{,}25}{100}\right) 1{,}5763 = 0{,}0039 \text{ V}$$

Verifique que o desvio padrão das medidas (na realidade do processo de medição) é maior que a incerteza nominal do voltímetro. Isso era esperado, pois, na composição da incerteza do processo de medidas, a incerteza do voltímetro é apenas um dos componentes. Uma única medida, por exemplo, a primeira medida na Tabela 2.1b, pode ser expressa como:

$$\boxed{U_1 = (1{,}572 \pm 0{,}007)\text{V}}$$

A incerteza de nossa medida difere da incerteza nominal citada na tabela 2.1. Tivemos que fazer uma série de medidas para determinar o NOSSO desvio padrão.
Uma vez que realizamos uma série de 6 medidas, podemos expressar nosso resultado de forma mais precisa, usando o valor médio das seis medidas e seu desvio padrão (o desvio padrão da média). Portanto nosso resultado ficaria assim:

$$\boxed{\overline{U} = (1{,}5763 \pm 0{,}0027)\text{V}}$$

Este resultado está ótimo para desenvolver nossos estudos e verificar alguma dependência da tensão da pilha com outras grandezas. Mas o nosso voltímetro pode ter um <u>*erro de calibração*</u>. Explicando: Na fábrica são produzidos milhares de voltímetros. Em média todos iguais. Mas no varejo, ao comparar os valores medidos por diferentes voltímetros, um indica um valor um pouco maior, outro um pouco menor... Como então comparar medidas feitas com <u>voltímetros diferentes</u>? Temos que retornar ao manual do aparelho e procurar a incerteza de calibração do mesmo, ou seja, o desvio padrão de calibração dos voltímetros. Em geral (mas não necessariamente) a incerteza do instrumento e o desvio padrão de calibração são semelhantes. Seria um desperdício se assim não fosse. (*Quem compraria um aparelho muito preciso e caro mal calibrado? Por que calibrar cuidadosamente um aparelho vagabundo?*). Podemos supor então que o desvio padrão de calibração do voltímetro é da mesma ordem que sua incerteza nominal. Dessa forma é possível que instrumentos diferentes indiquem valores diferentes para uma mesma medida, nesse nosso caso, com um desvio padrão de 0,004V. Caso tenhamos em nosso laboratório mais que um voltímetro do mesmo modelo, temos que incorporar esse “desvio padrão de calibração” em nosso resultado. Isso pode ser feito por meio de uma soma quadrática, denominada de erro padrão, em que se compõe quadraticamente o desvio padrão da média com o desvio padrão de calibração do instrumento:

Erro padrão:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_m^2 + L_r^2} = 0{,}0048\text{V}$$

Finalizando, o valor mais provável da tensão da pilha pode ser representado por:

$$\boxed{\overline{U}_P = (1{,}5763 \pm 0{,}0048)\text{V}}$$

Afinal, qual o valor que devemos usar? Depende. Para comparar séries de medidas no mesmo instrumento, podemos usar a média $\overline{U}$ e o desvio padrão da média. Para comparar medidas entre si, basta o desvio padrão. Para comparar medidas em instrumentos diferentes, precisamos do erro padrão.

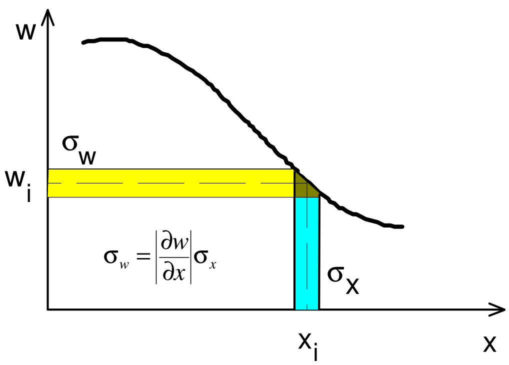
2.2. PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

Muitas vezes usaremos o valor do mensurando numa equação para determinar uma outra grandeza qualquer. O que fazer com a incerteza associada? Para o mensurando temos a incerteza do processo de medida, enquanto que para grandezas determinadas através de fórmulas temos a incerteza propagada.

2.2.1. Cálculo da propagação de incertezas

O problema pode ser posto da seguinte maneira: dada uma função w = w(x, y, z) onde x, y, z são grandezas experimentais com incertezas dadas por σ_x, σ_y, σ_z e independentes entre si, quanto vale σ_w ? A independência entre σ_x, σ_y, σ_z é necessária para a validade das fórmulas a seguir, mas não será discutida por enquanto.

Para simplificar suponha w apenas função de x. No gráfico abaixo está representando *w(x)*.



A incerteza de w, neste gráfico, pode ser obtida pela simples projeção da incerteza de x. Para pequenos intervalos no eixo x, temos em primeira ordem:

$$\sigma_w = \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|\sigma_x \qquad (2.2)$$

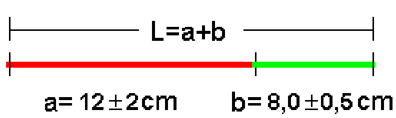
Para várias variáveis independentes entre si, podemos escrever uma fórmula geral (visualize uma soma de catetos em n dimensões):

$$\sigma_w^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \ldots \quad (2.3)$$

Acompanhe os exemplos a seguir:

A) Adição de valores experimentais

Considere a soma de dois segmentos:



A incerteza no segmento soma pode ser calculada aplicando a equação (2.3):

$$\sigma_L^2 = \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2$$
$$= \; 1.\sigma_a^2 + 1.\sigma_b^2$$

que resulta:

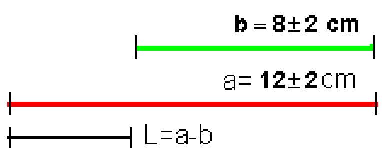
$$\sigma_L^2 = 2^2 + 0{,}5^2 = 4{,}25$$
$$\sigma_L = 2{,}06\,cm$$

Logo

L = (20,0 ± 2,1) cm

B) Subtração de valores experimentais

Seguindo o mesmo esquema do exemplo anterior, a incerteza associada à subtração de duas grandezas experimentais é dada por:



Novamente, usando a equação (2.3):

$$\sigma_L^2 = \left(\frac{\partial L}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2$$
$$= 1.\sigma_a^2 + 1.\sigma_b^2$$

resulta:

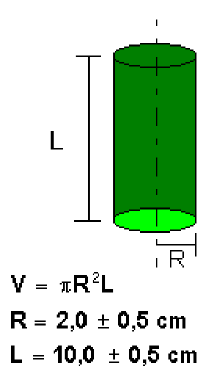
$$\sigma_L^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$
$$\sigma_L = 2{,}8\,cm$$

Logo **L = (4,0 ± 2,8) cm**

Note que, na **soma**, tanto a grandeza como a incerteza aumentaram, mas na **diferença** de duas grandezas experimentais, apesar do resultado ser menor em módulo, a incerteza final é maior que a das partes.

C) Multiplicação de grandezas experimentais: volume de um cilindro

Vamos agora determinar o volume do cilindro na figura abaixo em que se mediram o raio e a altura.



Propagaremos as incertezas em todos os termos do produto: π, R e L.

$$\sigma_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)^2 \sigma_\pi^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)^2 \sigma_L^2$$
$$= (R^2 L)^2 \sigma_\pi^2 + (\pi 2RL)^2 \sigma_R^2 + (\pi R^2)\sigma_L^2$$

dividindo por V^2

$$\frac{\sigma_V^2}{V^2} = \frac{(R^2 L)^2 \sigma_\pi^2 + (\pi 2RL)^2 \sigma_R^2 + (\pi R^2)\sigma_L^2}{(\pi R^2 L)^2}$$
$$\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2$$

Calculando cada um dos termos acima usando os valores fornecidso na figura:

$$\left(\frac{\sigma_\pi}{\pi}\right) = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$2\left(\frac{\sigma_R}{R}\right) = \frac{1}{2{,}0} \qquad \text{(ii)}$$

e

$$\left(\frac{\sigma_L}{L}\right) = \frac{0{,}5}{10{,}0} \qquad \text{(iii)}$$

Somando i, ii e iii em quadratura:

$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{0^2 + 0{,}5^2 + 0{,}05^2} = 0{,}5025$$

MUITO IMPORTANTE: Na equação acima, de propagação de incertezas na multiplicação e divisão, obtivemos a incerteza relativa σ_V / V . NÃO ESQUEÇA DE MULTIPLICÁ-LA PELO RESULTADO (*V*) PARA OBTER A INCERTEZA ABSOLUTA. Multiplicando σ_V por V e ajustando o número de algarismos significativos...

$$\sigma_V = 0{,}5025 \times V = 0{,}5025 \times 125{,}7 = 63$$

O resultado do volume do cilindro vale:

V = (126 ± 63) cm^3

ou ainda

V = (13 ± 6) x 10 cm^3

Os resultados acima são mais gerais do que parece à primeira vista. Para as quatro operações, podem ser resumidos como segue:

Na soma ou subtração, a <u>incerteza absoluta</u> do resultado é a soma em quadratura das incertezas absolutas.

Na multiplicação ou divisão, a <u>incerteza relativa</u> do resultado é dada pela soma em quadratura das incertezas relativas dos operandos (não esqueça de converter a incerteza relativa em absoluta).

NOTA: por *soma em quadratura* entende-se a raiz quadrada da soma dos quadrados...

No Quadro 2.1, a seguir, estão resumidos os principais casos de propagação de incertezas. Uma importante regra prática pode ser obtida se notarmos que o resultado de propagação de incertezas não precisa ser feito com precisão numérica maior que cerca de 5%. Logo:

Qualquer termo *menor que 1/3 do maior termo* na soma em quadratura pouco contribui no resultado final e, em geral, pode ser desprezado.

Exemplificando: Volte para o exemplo A, a soma de dois segmentos: Lá calculamos o resultado de :

$$\sigma_L^2 = 2^2 + 0{,}5^2 = 4{,}25$$

observe que $0{,}5^2 << 2^2$, ou seja, se desprezarmos o termo menor, o resultado seria 4,00, que arredondado para um significativo resultaria $\sigma_L = 2\ cm$, não muito diferente do resultado anterior, 2,1 cm.

Algebricamente: sejam x_1 e x_2 os termos de uma soma em quadratura com $x_2 = k\ x_1$. A soma em quadratura resulta:

$$S = \sqrt{x_1^2(1+k^2)} \qquad (2.3)$$

Seja agora

$$S' = \sqrt{x_2^2} \qquad (2.4)$$

em que se desprezou x_1 uma vez que k>1. Note que S > S′, uma vez que $x_2 > x_1$. Queremos saber, o menor valor de k de forma que S′ e S não difiram em mais que 5%. Queremos que

$$S - S' < 0.05 * S \ \ ou \ \ \frac{S'}{S} > 0.95 \qquad (2.5)$$

Com alguma manipulação algébrica se obtém

$$k > 3.0 \qquad (2.6)$$

Isto pode simplificar muito as contas pois, numa soma em quadratura, podemos simplesmente desprezar termos menores que 1/3 do maior. Isto permite, na maioria das vezes, um cálculo rápido, sem o uso de calculadora. Atente que <u>são os termos da soma em quadratura</u> que devem ser comparados, não as incertezas.

2.3. Representação de incertezas em um gráfico. Barras de erro.

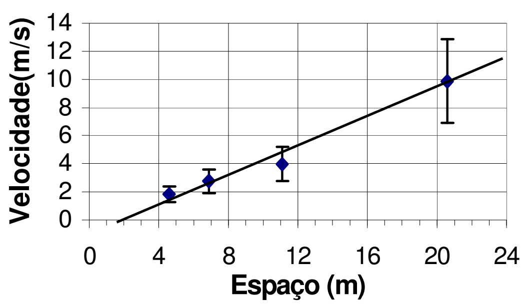
Já aprendemos a expressar incertezas quando escrevemos o resultado de uma medida. Num gráfico vamos expressar a incerteza de cada ponto experimental na forma de uma barra vertical (ou horizontal) que representará o intervalo de confiança definido pela incerteza da grandeza.

Exemplo: Representar dados da Tabela 2.2. em um gráfico.

Tabela 2.2. Espaços e velocidades de um corpo.

n	s ± 0,05 (m)	v (m/s)
1	4,60	1,84±0,55
2	6,90	2,76±0,82
3	11,10	3,99±1,20
4	20,60	9,88±2,96

Figura 2.1 Velocidades e posições de um corpo.



Note que a incerteza do espaço **não** foi colocada no gráfico, pois é menor que o ponto marcado. Neste gráfico também foi ajustada uma reta média que representa os pontos experimentais. A reta média pode ser traçada observando algumas regras simples:

- Procure passar a reta equilibradamente pelo maior número de pontos.
- A origem (0; 0) pode ou não ser um ponto experimental. Se for fisicamente justificável, trate-a como qualquer outro ponto experimental. Caso contrário, trace a melhor reta ignorando a origem.
- A reta deve estar contida na maioria das barras de incertezas.

Quadro 2.1. RESUMO DE FÓRMULAS PARA PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

w = w (x, y, ...)	Expressões para σ_W
w = x ± y **soma e subtração**	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$
w = axy **multiplicação**	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
w = a (y / x) **divisão**	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
w = x^m **potência simples**	$\left\|\frac{\sigma_w}{w}\right\| = \left\|m\frac{\sigma_x}{x}\right\|$
w = ax **multiplicação por constante**	$\left\|\frac{\sigma_w}{w}\right\| = \left\|\frac{\sigma_x}{x}\right\|$ **ou** $\sigma_w = \|a\|\sigma_x$
w = ax + b	$\left\|\frac{\sigma_w}{w}\right\| = \left\|\frac{\sigma_x}{x}\right\|$ **ou** $\sigma_w = \|a\|\sigma_x$
w = ax^{p}y^q	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
w = a sen(bx) **função qualquer** **<u>aplicar a definição</u>**	$\sigma_w = \|ab\cos(bx)\|\sigma_x$ $\quad$ bσ_x em radianos

3. Linearização de curvas

3.1 Introdução

Numa experiência, costumamos comparar os valores das medições com algum modelo físico, provavelmente expresso na forma de uma equação algébrica. Todavia, muitos fenômenos não são lineares, isto é, não podem ser descritos por uma reta. Nestes casos, modelar os pontos experimentais ou ajustar uma função qualquer aos pontos experimentais requer o uso de métodos numéricos avançados nem sempre disponíveis de forma imediata. Num primeiro momento, pode-se optar pela linearização da função em jogo. A linearização de uma função nada mais é que a transformação de uma função curvilínea (não linear) numa reta, ou seja, a conversão dos dados experimentais por meio de uma mudança de variáveis para uma relação linear que permita ajustar uma reta e determinar os seus coeficientes. Invertendo o procedimento de linearização, pode-se então determinar os parâmetros da função não linear procurada.

Exemplo: Para determinar a aceleração da gravidade, usamos os dados de um corpo em queda livre. Inicialmente preparamos uma tabela com os tempos e espaços e construímos o gráfico a seguir:

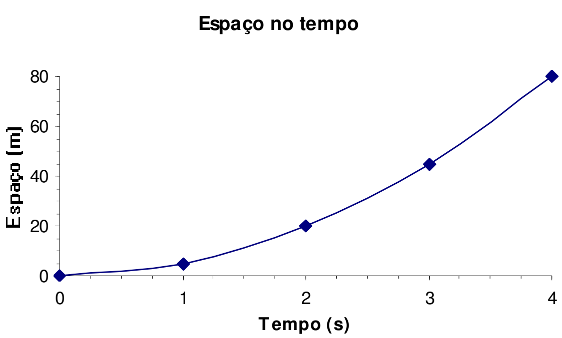


Figura 3.1. Espaços em função do tempo para um corpo em queda livre.

Neste tipo de gráfico, onde $s = s_0 + v_0.t + (a/2)t^2$, não é imediato determinar a aceleração do corpo. Mesmo supondo $v_0 = 0$ e $s_0 = 0$ (com o eixo y no sentido da aceleração) a expressão se converte em:

$$s = at^2/2 \qquad (3.1)$$

que ainda é uma função não linear em t. Se, ao invés de graficarmos "s x t" como na figura 3.2, graficarmos "s x $t^2/2$", teremos uma <u>reta:</u>

$$s = ax \qquad (3.2)$$

Onde a é o coeficiente angular da reta, conforme pode ser visto na figura 3.2. Logo:

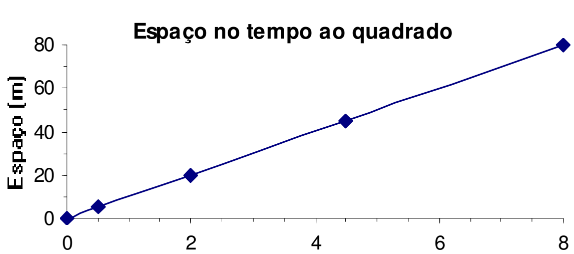


Figura 3.2. s(t^2/2) para um corpo em queda livre.

Pode ocorrer que as grandezas medidas sejam afetadas por um desvio constante. No exemplo acima, poderia ter ocorrido que o *tempo e/ou espaço inicial sejam diferentes de zero*. Esses desvios (inicialmente lineares), em geral introduzem <u>desvios não lineares</u> nas novas variáveis "linearizadas" e podem invalidar suas conclusões. Dada sua natureza, esses desvios costumam afetar mais os valores "pequenos" que os "grandes" e podem ser identificados na forma de desvio sistemático dos pontos experimentais da curva (linear) graficada.

Existem diversos outros métodos de linearização: Ainda se usa muito graficar o logaritmo das grandezas o que reduz potências em coeficientes angulares e coeficientes multiplicativos em lineares. Os papéis dilog e mono-log são uma forma prática de executar transformações log sem necessidade de cálculos. Outro método, que na prática reduz o grau da função, é graficar a derivada da função. Não há uma regra geral para linearização de funções. Prática e criatividade são alguns dos requisitos.

3.2 Funções tipo $y = ae^{bx}$

Funções exponenciais podem ser linearizadas aplicando o logaritmo em ambos os termos, que resulta:

$$\ln(y) = \ln(ae^{bx}) \qquad (3.3)$$

$$\ln(y) = \ln(a) + bx \qquad (3.4)$$

definindo $Y = \ln(y)$ e $A = \ln(a)$, temos:

$$Y = A + bx \qquad (3.5)$$

que é uma reta com coeficiente linear A e coeficiente angular b.

3.3. O papel gráfico logarítmico

Antes do uso generalizado de calculadoras, não era simples determinar o logarítmo de um número. Podia-se usar (e ainda se usa) o papel mono-logarítmico, cuja escala vertical, Y, é desenhada de tal forma que a distância linear até a origem (eixo x) é o **logaritmo decimal** do número indicado na escala. Dessa forma, o papel grafica automaticamente o log do número indicado.

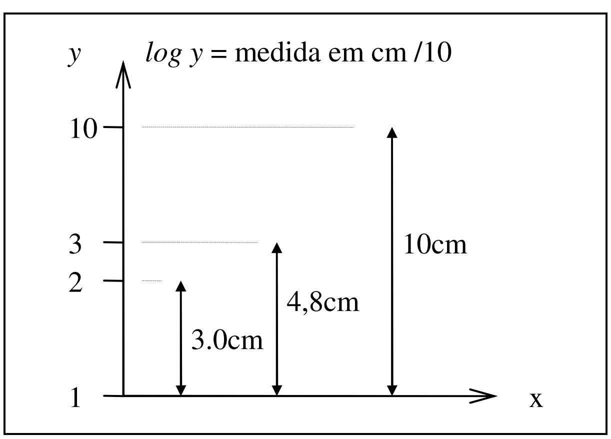


Figura 3.3. Escala mono-log. Neste caso, a escala, também denominada ciclo, é de 10cm para cada ordem de grandeza (fator 10). Outras escalas e vários ciclos são possíveis. (um exemplo: dado que log*(3)* = 0.477, temos que *10*.log*(3)* = *4.8*cm.)

O papel di-logarítmico (di-log) repete o eixo log também para o eixo das abcissas (eixo x) e é útil para linearizar potências simples, tais como $y = a\sqrt{bx}$ que será discutido a seguir.

3.3. Funções tipo $y = ax^b$

Potências simples do tipo ax^b também podem ser linearizadas aplicando o logaritmo em ambos os termos:

$$\log(y) = \log(a) + b\log(x) \qquad (3.6)$$

Levando novamente a uma reta com coeficiente angular b e coeficiente linear *log(a)*.

4. Interpolação de tabelas.

Ao consultar uma tabela, dessas publicadas em livros expecializados, é muito difícil encontrar exatamente o valor procurado. Se por exemplo estivermos procurando o índice de refração de um determinado material em função da temperatura, em geral ocorre que a temperatura desejada está entre dois valores tabelados. A solução é interpolar os dados da tabela. Existem vários métodos de interpolação de dados em tabelas: pode-se usar polinômios, funções logarítmicas, exponenciais, etc. Esses métodos podem ser encontrados em qualquer livro básico de métodos numéricos.

Ocorre que muitas dessas tabelas são compiladas de forma que uma simples interpolação linear seja suficientemente precisa, ou seja, o erro da interpolação linear é menor que a incerteza dos valores tabelados. Veja o exemplo abaixo:

Tabela 4.1. Pressão de vapor da água líquida.

Temperatura (ºC)	Pressão (Torr)
60	149,4
80	355,1
100	760
120	1489

Para determinar a pressão de vapor a 90ºC, pode-se interpolar linearmente a tabela entre os valores de 80 e 100ºC. A interpolação linear pode ser entendida como o ajuste de uma reta a DOIS pontos da tabela e a determinação de um valor intermediário não tabelado. A figura 4.1 exemplifica o procedimento graficamente.

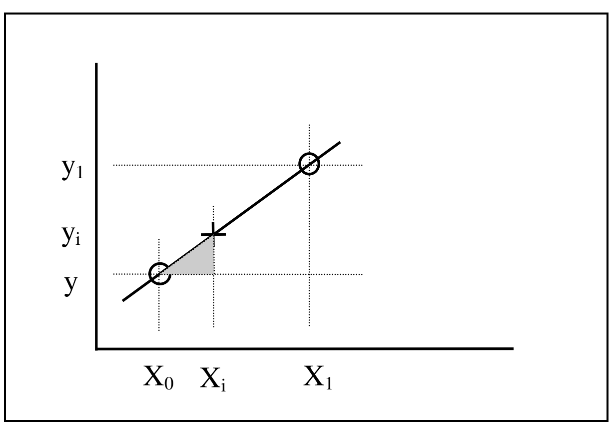


Figura 4.1. Representação gráfica de uma interpolação linear.

Sejam os pontos (x_o, y_o) e (x_1, y_1) dois pontos quaisquer consecutivos na tabela. Ajustando-lhes uma reta, pode-se escrever, para um ponto (x_i, y_i) intermediário.

$$\left(\frac{y_i - y_0}{x_i - x_0.}\right) = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) \qquad (4.1)$$

Isolando y_i temos:

$$y_i = y_0 + (x_i - x_0).\left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) \qquad (4.2)$$

que aplicada ao exemplo resulta:

$$y_{90} = 355 + (90 - 80).\left(\frac{760 - 355}{100 - 80}\right) \qquad (4.3)$$

que fornece o valor procurado:

P_{90} = 558 Torr.

4.1. Referências e fontes bibliográficas

Coraci P. Malta., FAP139, *Laboratório de Física 2*. IFUSP, 1997.Textos e descrição dos equipamentos do laboaratório didático do IFUSP.

Richard P. Feynman., Robert B. Leighton, e Matthew Sands. *Lectures on Physics*, Vol. 1. 1971.

Alvin Hudson, Rex Nelson. *University Physics*, 2nd Ed. Saunders College Publishing. 1990.