

Sistemas de Numeração

Anotações de Aula

Profs. Gomi/Marcos/Spina/Glauber

1 Objetivos deste tópico

Ao final do estudo deste tópico você saberá:

- Compreender a utilidade dos números na computação;
- Compreender o conceito de representação de números, especificamente o sistema de numeração posicional;
- Representar números em diferentes bases (bases decimal, binária, octal e hexadecimal);
- Converter a representação de um número de uma base para outra;
- Somar, subtrair, multiplicar e dividir nessas bases numéricas.

Leitura recomendada : seções do livro do Wakerly

- 2.1 Positional Number Systems;
- 2.2 Octal and Hexadecimal Numbers;
- 2.3 General Positional-Number-System Conversions;
- 2.4 Addition and Subtraction of Nondecimal Numbers;
- 2.8 Binary Multiplication;
- 2.9 Binary Division;

Keywords: positional number system, weight, base, radix, radix point, high-order digit, most significant digit, low-order digit, least significant digit, binary digit, bit, binary radix, MSB, LSB, octal number system, hexadecimal number system, hexadecimal digits A-F, binary to octal conversion, binary to hexadecimal conversion, octal or hexadecimal to binary conversion, nibble, 0x prefix, radix r to decimal conversion, nested expansion formula, decimal to radix r conversion, binary addition, binary subtraction, minuend, subtraend, difference, comparing numbers, hexadecimal addition, shift-and-add multiplication, unsigned binary multiplication, partial product, shift and subtract division, unsigned division, division overflow

2 Números

Números servem para representar:

1. Quantidade;
2. Tamanho;
3. Ordem;
4. Identificador.

3 Representação

- Como podemos representar números?
- Que critérios devemos usar para escolher uma representação adequada para números?
- Sistemas de representação posicional:

$$D = \sum_{i=-n}^{p-1} d_i \times r^i = d_{p-1} \times r^{p-1} + \dots + d_1 \times r^1 + d_0 \times r^0 + d_{-1} \times r^{-1} + \dots + d_{-n} \times r^{-n}$$

- D : número;
 - r : base ou *radix*;
 - d : dígito ($0 \leq d < r$);
 - p : quantidade de dígitos na parte inteira;
 - n : quantidade de dígitos na parte fracionária;
- Bases binária, octal e hexadecimal.
 - Conversão entre diferentes bases de representação de números.

4 Aritmética

- Adição: adendos, soma;
- Subtração: minuendo, subtraendo, diferença;
- Multiplicação: multiplicando, multiplicador, produto;
- Divisão: dividendo, divisor, quociente, resto;
- Algoritmos: shift and multiply, shift and subtract.

5 Exercícios

1. Converter $FFFF_{16}$ para a base 10. Apresente os cálculos realizados na conversão.
2. Qual é a menor base b inteira positiva em que o número 1000_{10} é representado por apenas 1 dígito em notação posicional? Sugira uma representação para o número 1001_{10} nesta base b . Justifique a sua resposta.
3. Classifique as afirmações a seguir como Verdadeira (V) ou Falsa (F):
 - (a) $7FE_{16} = 01111111110_2 = 3776_8$
 - (b) $100_{16} < 100_{10} < 100_8$
 - (c) $77_8 + 1_8 = 100_8$
 - (d) $13021_4 = (1 \times 10^{10} + 3 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0)_4$
 - (e) $E,BC_{16} = (14 \times 10^0 + 12 \times 10^{-1} + 11 \times 10^{-2})_{10}$
4. Seja uma base numérica com dígitos $\alpha, \beta, \delta, \lambda$, cuja tabela parcial de adição é apresentada na Figura 1. Calcule $\lambda\alpha\beta - \delta\delta\lambda$. Justifique a sua resposta apresentando os cálculos feitos.

	α	β	δ	λ
α	α	β	δ	λ
β	β	δ	λ	$\beta\alpha$
δ	δ	λ	$\beta\alpha$	$\beta\beta$
λ	λ	$\beta\alpha$	$\beta\beta$	$\beta\delta$

(Valor da coluna) + (Valor da linha) = valor da célula
 Exemplo: $\lambda + \beta = \beta\alpha$

Figura 1: Tabela parcial de adição

5. No livro Alice no País das Maravilhas, de Lewis Carroll, há o seguinte diálogo entre o coelho branco e a Alice, no capítulo dois:

“Vou testar se sei todas as coisas que costumava saber. Deixe-me ver: quatro vezes cinco é doze, e quatro vezes seis é treze, e quatro vezes sete é... Oh, puxa! Eu nunca chegarei a vinte desse jeito!”

Encontre as bases para as quais as duas primeiras multiplicações estão corretas no país das maravilhas.

No desafio que Alice está tentando resolver, o multiplicando e o multiplicador estão em base decimal, mas o resultado possui base incrementada de um valor fixo a cada tentativa (a diferença entre as bases encontradas no item anterior). Com estas informações, preencha a tabela da Figura 2 utilizando os símbolos necessários da base em análise.

4	x	5	=	12		Base
4	x	6	=	13		
4	x	7	=	14		
4	x	8	=			
4	x	9	=			
4	x	10	=			
4	x	11	=			
4	x	12	=			
4	x	13	=			

Figura 2: Tabela da Alice

Utilizando seu conhecimento sobre bases e sistemas de numeração posicionais, explique por que Alice nunca chegará ao “20”. Justifique sua resposta.

6. Chico foi suspenso por 10 dias por colar na prova de Sistemas Digitais e sua mãe o colocou de castigo em seu quarto. Para contar os dias, ele usou uma tática muito comum entre os encarcerados, que é fazer uma marca como a figura da parede do quarto. Cada marca representa um dia de suspensão e a cada quatro marcas ele desenhará a quinta cruzando as quatro anteriores para facilmente visualizar cinco dias. A Figura 3 mostra como estava a parede do quarto do Chico após o primeiro, segundo, terceiro, quarto e quinto dia de suspensão, respectivamente. Pode-se dizer que o Chico criou um sistema de representação numérica. Considere as afirmações sobre este sistema:
- (a) É posicional, pois a posição de cada marca influencia na quantidade representada;
 - (b) É incapaz de representar a quantidade zero, pois se a parede o quarto do Chico estiver vazia não é possível saber se ele está suspenso ou não;
 - (c) É incapaz de representar números fracionários da maneira tradicional, usando um ponto para distinguir a parte inteira da parte fracionária.

Quais são as afirmações que são corretas e incorretas?



Figura 3: Parede do Chico

7. Considere a equação $x^2 - 10x + 31 = 0$. Aline encontrou como soluções $x = 5$ e $x = 8$. Qual é a base que a Aline usou, considerando que ela resolveu a equação corretamente?

8. Sejam $A = 204_{N+1}$, $B = 102_N$, $C = 41_N$ e $D = 2_N$. Sabendo-se que $A - B - 4C + 4D^3 = -4$, determine o valor de N , justificando sua resposta. Dica: converta os números para a base 10, em função de N , e então realize os cálculos para determinar N .
9. Realize as seguintes operações com números inteiros positivos, nas bases indicadas:
- $\text{BEBAD}_{16} + \text{CA1D0}_{16}$, na base 16
 - $251_{16} \times 27_{16}$, na base 16
 - $73201_8 - 34032_8$, na base 8
 - $33_{10} / 6_{10}$, na base 2
10. Engenheiros Romanos também faziam contas. Veja como faziam em <http://turner.faculty.swau.edu/mathematics/materialslibrary/roman/>.
- Converta os números FF_{16} e A2_{16} para a representação dos números romanos. Apresente os cálculos realizados para efetuar a conversão.
 - Faça as seguintes operações em hexadecimal e com os métodos desenvolvidos para os números romanos:
 - $\text{FF} + \text{A2}$
 - $\text{FF} - \text{A2}$
 - $\text{FF} \times \text{A2}$
 - $\text{FF} / \text{A2}$
11. A primeira expedição para Marte encontrou apenas ruínas de uma civilização. A partir de artefatos e pinturas, os exploradores deduziram que os marcianos desta civilização eram seres com 4 pernas e com um tentáculo que terminavam com dedos para agarrar coisas. Após muito estudo, os exploradores foram capazes de traduzir a matemática marciana. Eles encontraram a seguinte equação:

$$5n^2 - 50n + 125 = 0 \text{ [Equação 1]}$$

com as soluções $n = 5$ e $n = 8$. O valor 5 parece ser correto, mas a resposta $n = 8$ exigiu uma análise adicional. Então os exploradores refletiram sobre a maneira com que os sistemas de numeração evoluíram na Terra e encontraram evidências que o sistema marciano teve uma história similar. Partindo da premissa que o sistema decimal reflete o fato dos seres humanos terem 10 dedos nas mãos, quantos dedos tinham os marcianos? Ou dito de outra forma, qual era a base b usada pelos marcianos? A Equação 1 está escrita na base marciana.

12. Faça as seguintes conversões:

- $1101011_2 = ?_{16}$
- $174003_8 = ?_2$
- $10110111_2 = ?_{16}$
- $67.24_8 = ?_2$

- e) $10100.1101_2 = ?_{16}$
 f) $F3A5_{16} = ?_2$
 g) $11011001_2 = ?_8$
 h) $AB3D_{16} = ?_2$
 i) $101111.0111_2 = ?_8$
 j) $15C.38_{16} = ?_2$
13. Converta os seguintes números octais em binário e hexadecimal:
- a) $1234_8 = ?_2 = ?_{16}$
 b) $174637_8 = ?_2 = ?_{16}$
 c) $365517_8 = ?_2 = ?_{16}$
 d) $2535321_8 = ?_2 = ?_{16}$
 e) $7436.11_8 = ?_2 = ?_{16}$
 f) $45316.7414_8 = ?_2 = ?_{16}$
14. Converta os seguintes números hexadecimais em binário e octal:
- a) $1023_{16} = ?_2 = ?_8$
 b) $7E6A_{16} = ?_2 = ?_8$
 c) $ABCD_{16} = ?_2 = ?_8$
 d) $C350_{16} = ?_2 = ?_8$
 e) $9E36.7A_{16} = ?_2 = ?_8$
 f) $DEAD.BEEF_{16} = ?_2 = ?_8$
15. Quais são os valores octais dos quatro bytes (8-bit) no número de 32 bits com representação octal 32107654321_8 ?
16. Converta os seguintes números em decimal:
- a) $1101011_2 = ?_{10}$
 b) $174003_8 = ?_{10}$
 c) $10110111_2 = ?_{10}$
 d) $67.24_8 = ?_{10}$
 e) $10100.1101_2 = ?_{10}$
 f) $F3A5_{16} = ?_{10}$
 g) $12010_3 = ?_{10}$
 h) $AB3D_{16} = ?_{10}$
 i) $7156_8 = ?_{10}$
 j) $15C.38_{16} = ?_{10}$
17. Faça as seguintes conversões entre sistemas numéricos:

- a) $125_{10} = ?_2$
- b) $3489_{10} = ?_8$
- c) $209_{10} = ?_2$
- d) $9714_{10} = ?_8$
- e) $132_{10} = ?_2$
- f) $23851_{10} = ?_{16}$
- g) $727_{10} = ?_5$
- h) $57190_{10} = ?_{16}$
- i) $1435_{10} = ?_8$
- j) $65113_{10} = ?_{16}$

18. Some os seguintes pares de números binários:

$$\text{a) } \begin{array}{r} 110011 \\ + 11010 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{r} 100111 \\ + 101010 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{c) } \begin{array}{r} 11100011 \\ + 1011101 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{d) } \begin{array}{r} 1100110 \\ + 1111001 \\ \hline \end{array}$$

19. Repita o exercício anterior usando subtração ao invés de adição.

20. Some os seguintes pares de números octais:

$$\text{a) } \begin{array}{r} 1776 \\ + 1432 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{array}{r} 57734 \\ + 1066 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{c) } \begin{array}{r} 252757 \\ + 465521 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{d) } \begin{array}{r} 511042 \\ + 57647 \\ \hline \end{array}$$

21. Some os seguintes pares de números hexadecimais:

$$\begin{array}{r} \text{a)} \quad 1776 \\ + \quad 1432 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b)} \quad 4F1A5 \\ + \quad B8D5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c)} \quad F35B \\ + \quad 27E6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{d)} \quad 1B90F \\ + \quad C44E \\ \hline \end{array}$$

22. Escreva as representações de 8 bits com magnitude e sinal, complemento de dois e complemento de um para os seguintes números decimais: +25, +120, +82, -42, -6, -111.

23. Indique se ocorre ou não *overflow* quando se somam os seguintes números de 8 bits em complemento de dois:

$$\begin{array}{r} \text{a)} \quad 11010100 \\ + \quad 11101011 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b)} \quad 10111111 \\ + \quad 11011111 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c)} \quad 01011101 \\ + \quad 00110001 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{d)} \quad 01100001 \\ + \quad 00011111 \\ \hline \end{array}$$