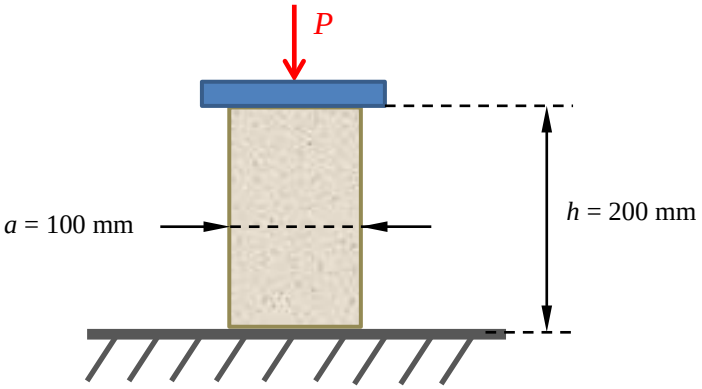
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Q1: _____
Q2: _____
Q3: _____
Nota: _____

PME3210 – Mecânica dos Sólidos I – Prova Substitutiva – 04/07/2018
Duração: 120 minutos
Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos durante a prova!

Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____

1ª Questão (3,0 pontos)
Um bloco maciço de dimensões $h \times a \times b$ (sendo: h = 200 mm, a = 100 mm, b = 50 mm) é comprimido por uma força P como ilustrado na figura. Considerando que a máxima tensão de compressão para o material é de 40 MPa e a máxima tensão de cisalhamento é de 10 MPa, determine o máximo valor da força que pode ser aplicada ao bloco antes da falha e identifique o modo de falha neste caso. *Justifique de modo claro suas respostas!*



Solução:

Para que a tensão de compressão aplicada sobre o bloco (em módulo) não supere a tensão de compressão admissível (de 40 MPa) devemos ter:

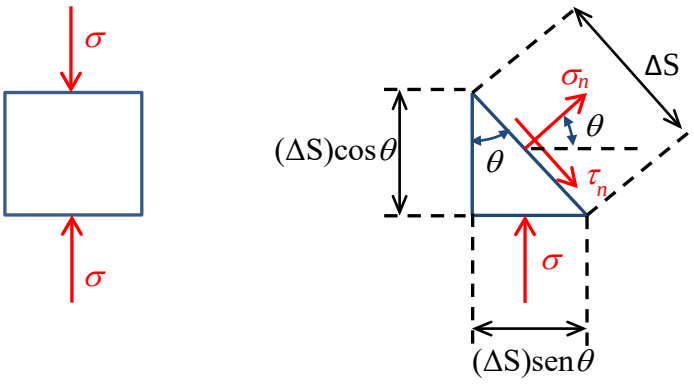
$$|\sigma| = \frac{P}{ab} < \sigma_{c,adm} \quad \Leftrightarrow \quad P < \sigma_{c,adm}(ab)$$

Resultando para este 1º critério:

$$P_{1,máx} = 40 \times 100 \times 50 = 200\ kN$$

(1,0)

O estado tensional em cada ponto do bloco para este carregamento fica dado pela figura (a) (abaixo à esquerda):



(a) (b)

Para investigar tensões em outros planos, que não o plano da seção transversal, fazemos uso da figura (b) da página anterior (à direita). Vê-se que, dependendo do valor do ângulo θ que define a direção do versor normal ao plano inclinado, podemos ter neste plano uma componente de tensão normal (de valor σ_n) e uma componente de tensão cisalhante (de valor τ_n). Denotando por ΔS o comprimento da face inclinada, teremos as seguintes equações de equilíbrio de forças nas direções horizontal e vertical:

$$(\sigma_n \Delta S)cos\theta + (\tau_n \Delta S)sen\theta = 0$$

e

$$(\sigma_n \Delta S)sen\theta - (\tau_n \Delta S)cos\theta \ + \sigma(\Delta S sen\theta) \ = 0$$

Simplificando e resolvendo para σ_n e τ_n virá:

$$\sigma_n = -\sigma(sen\theta)^2$$

e

$$\tau_n = \sigma sen\theta cos\theta = \frac{\sigma}{2} sen(2\theta)$$

Vemos, portanto, que a máxima tensão normal (de compressão) será obtida, como esperado, para $\theta = \pi/2$ (ou seja, para o plano inclinado que coincide com a seção transversal), enquanto a máxima tensão cisalhante ocorrerá quando $|sen(2\theta)| = 1$ (ou seja, para $\theta = \pm\pi/4$) e, em valor absoluto, teremos:

$$(\tau_n)_{máx} = \frac{\sigma}{2} = \frac{P}{2ab}$$

Assim, o segundo critério impõe a condição:

$$(\tau_n)_{máx} = \frac{P}{2ab} < \tau_{adm} \quad \Leftrightarrow \quad P < 2\tau_{adm}(ab)$$

Ou seja:

$$P_{2,máx} = 2 \times 10 \times 100 \times 50 = 100\ kN$$

(1,0)

Logo:

$$P_{máx} = mín\{P_{1,máx}, P_{2,máx}\} = 100\ kN$$

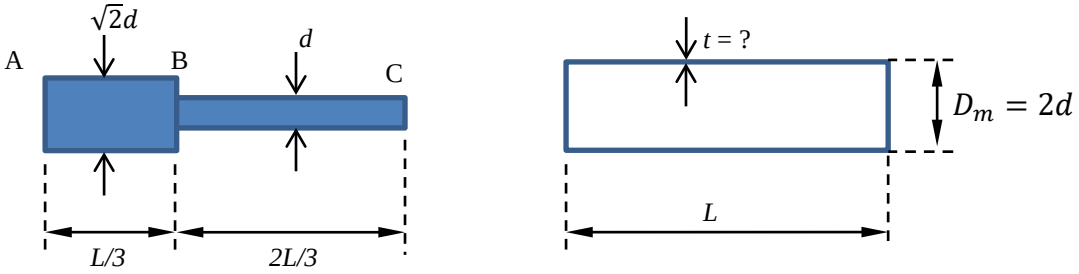
(0,5)

A falha, se a carga de compressão superar o valor teórico de 100 kN, será por cisalhamento segundo um plano inclinado a 45° em relação ao plano da seção transversal.

(0,5)

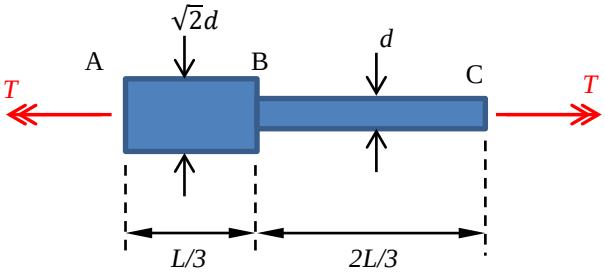
2ª Questão (3,0 pontos)

A figura abaixo mostra dois eixos que serão submetidos ao mesmo torque *T*. O eixo (1) possui seções transversais circulares maciças e é composto de dois segmentos: o segmento AB possui comprimento $L/3$ e diâmetro $\sqrt{2}d$, e o segmento BC possui comprimento $2L/3$ e diâmetro *d*. O eixo (2) é feito do mesmo material do eixo (1) e possui o mesmo comprimento total *L*. Admitindo que o eixo (2) seja um tubo de parede fina e que seu diâmetro médio (a ser considerado nos cálculos) seja $D_m = 2d$, determine a espessura *t* que deve ser utilizada no eixo (2) para que a rigidez torcional dos dois eixos seja a mesma.



Solução:

Para determinar a rigidez torcional do eixo (1), consideremos o torque *T* aplicado às extremidades do eixo e determinemos o ângulo de giro entre as seções A e C:



$$\phi_{AC} = \phi_{AB} + \phi_{BC} = \frac{T(L/3)}{G\pi(\sqrt{2}d)^4/32} + \frac{T(2L/3)}{G\pi d^4/32}$$

$$\phi_{AC} = \frac{8}{3}\frac{TL}{G\pi d^4} + \frac{64}{3}\frac{TL}{G\pi d^4} = 24\frac{TL}{G\pi d^4}$$

(1,0)

Logo a rigidez torcional do eixo (1) é:

$$K_{t1} = \frac{T}{\phi_{AC}} = \frac{1}{24}\frac{G\pi d^4}{L}$$

Aplicando o mesmo torque para o eixo (2), teremos o seguinte ângulo de giro entre as extremidades:

$$\phi_{AC} = \frac{TL}{GJ}$$

Onde o momento polar de inércia calculado para um tubo de parede fina é simplesmente:

$$J = R^2(2\pi Rt) = 2\pi R^3 t = 2\pi\left(\frac{D_m}{2}\right)^3 t = 2\pi d^3 t$$

Logo:

$$\phi_{AC} = \frac{1}{2}\frac{TL}{G\pi d^3 t}$$

(1,0)

E, assim, a rigidez torcional do eixo (2) fica dada por:

$$K_{t2} = \frac{T}{\phi_{AC}} = 2\frac{G\pi d^3 t}{L}$$

Impondo a igualdade entre os valores de rigidez torcional (considerando o mesmo material), virá:

$$2\frac{G\pi d^3 t}{L} = \frac{1}{24}\frac{G\pi d^4}{L}$$

Levando a:

$$t = \frac{d}{48}$$

(1,0)

3ª Questão (4,0 pontos)

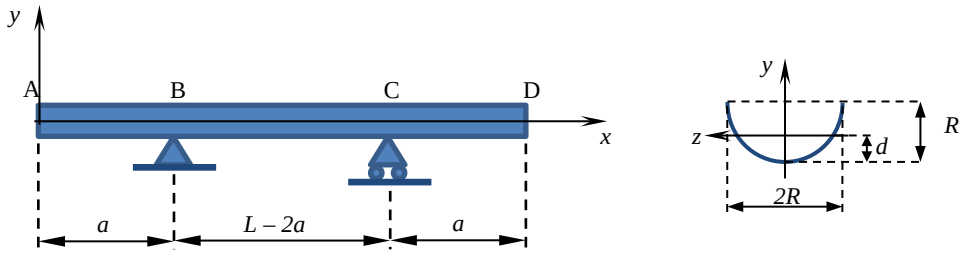
A estrutura indicada na figura, de comprimento total $L = 4000\,mm$, possui seção transversal semicircular de parede fina (sendo $t = 5\,mm$ e $R = 200mm$) e está simplesmente apoiada nos pontos B e C que são equidistantes das extremidades A e D. Considere que a tensão admissível do material (tanto à tração quanto à compressão) seja $\sigma_{adm} = 50\,MPa$. A calha assim formada (com as extremidades A e D fechadas) será preenchida com água até o nível máximo. Considerando apenas o carregamento devido ao peso próprio da calha (despreze o peso das tampas usadas nas extremidades A e D no cálculo do peso próprio da estrutura) e do líquido que ela contém, determine o valor da distância a para a qual o coeficiente de segurança da estrutura (com relação à tensão admissível fornecida) seja o maior possível. *Justifique adequadamente seus cálculos!*

Obs: Adote, em seus cálculos, a aproximação: $\pi \cong 3$.

Dados adicionais: $\gamma_a = 10\,kN/m^3$ = peso específico (aproximado) da água;

$\gamma_c = 80\,kN/m^3$ = peso específico (aproximado) do material da calha.

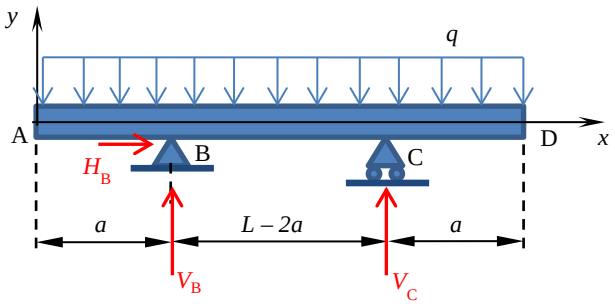
$d = R\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \cong \frac{R}{3}$ = distância do centroide ao ponto mais inferior da seção



Solução:

A figura abaixo ilustra a viga, simplesmente apoiada nos pontos B e C, submetida ao carregamento uniformemente distribuído (decorrente do peso próprio do material e da água que preenche a calha) e às reações vinculares que equilibram o carregamento:

(0,5 pto)



O carregamento distribuído por unidade de comprimento é dado por:

$$q = \frac{\gamma_c \pi R t L + (\gamma_a \pi R^2 L)/2}{L} = \gamma_c \pi R t + \frac{\gamma_a \pi R^2}{2}$$

$$q = 80\pi(0{,}2)(5.10^{-3}) + \frac{10\pi(0{,}2)^2}{2}$$

$$q = 80\pi.10^{-3} + 200\pi.10^{-3} = 0{,}28\pi \cong 0{,}84\,kN/m$$

Das equações de equilíbrio da estática, obtemos diretamente: (0,5 pto)

$$H_A = 0 \qquad V_B = V_C = \frac{qL}{2}$$

Dada a simetria da estrutura e do carregamento basta analisar metade da estrutura. Desta forma, o momento fletor no trecho em balanço AB fica dado por:

$$M_1(x) = -\frac{qx^2}{2} \qquad (0 \le x \le a)$$

Em particular, para $x = a$: (0,5 pto)

$$M_1(a) = -\frac{qa^2}{2}$$

Já o momento no trecho central BC fica dado por:

$$M_2(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qL}{2}(x - a) \qquad (a \le x \le L - a)$$

Em particular, o momento fletor no meio do vão (onde a força cortante, por simetria, deve ser nula) é dado por: (0,5 pto)

$$M_2(L/2) = -\frac{qL^2}{8} + \frac{qL}{2}\left(\frac{L}{2} - a\right) = \frac{qL^2}{8} - \frac{qLa}{2}$$

Dependendo do valor atribuído à distância *a*, podemos ter como seções críticas tanto as seções próximas aos apoios B e C (onde o momento fletor é negativo) quanto a seção a meio vão (onde o momento fletor pode ser tanto negativo quanto positivo, a depender do valor de *a*). Analisando, inicialmente, as tensões máximas de tração e de compressão na seção B, observamos que a maior tensão será nos pontos mais afastados da linha neutra (tensões de tração), fornecendo:

$$\sigma_{máx,B} = \frac{qa^2}{2}\frac{(R - d)}{I_z}$$

Onde:

$$I_z = \frac{\pi}{2}R^3 t - A(R - d)^2$$

$$I_z = \frac{\pi}{2}R^3 t - \pi R t\left(\frac{2R}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{18}R^3 t \cong \frac{R^3 t}{6}$$

Logo:

$$\sigma_{máx,B} = \frac{qa^2}{2}\frac{(R - R/3)}{R^3 t/6} = 2\frac{q}{t}\frac{a^2}{R^2}$$

E o coeficiente de segurança com relação à tensão normal máxima será neste caso:

(0,5 pto)

$$(CS)_1 = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{máx,B}} = \frac{\sigma_{adm}.tR^2}{2qa^2}$$

Partindo, agora, para a análise da seção a meio vão (SMV), teremos (em valor absoluto):

$$\sigma_{máx,MV} = \left|\frac{qL^2}{8} - \frac{qLa}{2}\right| \frac{(R-d)}{I_z} = \frac{qL}{2}\left|\frac{L}{4} - a\right| . \frac{(R-d)}{I_z} \leq \sigma_{adm}$$

Como vimos antes:

$$\frac{(R-d)}{I_z} = \frac{(R-R/3)}{R^3t/6} = \frac{4}{tR^2}$$

Assim:

$$\sigma_{máx,MV} = \frac{2qL}{tR^2}\left|\frac{L}{4} - a\right|$$

E o coeficiente de segurança com relação à tensão normal máxima será neste caso:

(0,5 pto)

$$(CS)_2 = \frac{\sigma_{adm}}{\sigma_{máx,MV}} = \frac{2\sigma_{adm}.tR^2}{qL|L-4a|}$$

Para maximizar a eficiência estrutural, os coeficientes de segurança $(CS)_1$ e $(CS)_2$ devem ter o mesmo valor (caso contrário uma seção estaria mais segura do que a outra com relação à tensão admissível dada). Assim:

(0,5 pto)

$$\frac{\sigma_{adm}.tR^2}{2qa^2} = \frac{2\sigma_{adm}.tR^2}{qL|L-4a|} \quad \Leftrightarrow \quad L|L-4a| = 4a^2$$

Considerado, inicialmente, que $L \geq 4a$, virá:

$$L(L-4a) = 4a^2 \;\Leftrightarrow\; 4a^2 + 4aL - L^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = -\frac{L}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}L$$

Naturalmente a única opção válida é:

(0,5 pto)

$$a = \frac{(\sqrt{2}-1)}{2}L$$

Que naturalmente satisfaz a hipótese inicial de que $L \geq 4a$.

Considerado, por outro lado, que $L \leq 4a$, virá:

$$L(4a-L) = 4a^2 \;\Leftrightarrow\; 4a^2 - 4aL + L^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{L}{2}$$

O que não satisfaz a hipótese inicial de que $L \leq 4a$.

Logo, devemos ter:

$$a = \frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2} L$$

E o coeficiente de segurança será neste caso:

$$(CS)_1 = \frac{2\sigma_{adm}.t}{q\left(\sqrt{2} - 1\right)^2} . \left(\frac{R}{L}\right)^2$$

Numericamente, considerando os valores e as aproximações feitas:

$$(CS)_1 \cong 8{,}67$$

Apenas para efeito de comparação, tomando $a = 0$, teríamos como coeficiente de segurança:

$$CS = mín\{(CS)_1, (CS)_2\} = \frac{2\sigma_{adm}.tR^2}{qL^2} \cong 1{,}49$$

Nota: Observe que muitos dos cálculos aqui indicados não eram necessários para responder a única pergunta feita no problema, a saber, o valor de a que leva ao maior coeficiente de segurança possível. Este valor (de a) não depende da intensidade do carregamento aplicado (desde, é claro, que o material permaneça no regime elástico-linear e que a hipótese de linearidade geométrica continue sendo satisfeita), nem do momento de inércia da seção transversal. Contudo, o coeficiente de segurança final (não solicitado no enunciado) irá, logicamente, depender destes e de outros parâmetros.