Q1: __________

Q2: __________

Q3: __________

Nota: ________

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME3210 – Mecânica dos Sólidos I – P3 – 27/06/2018

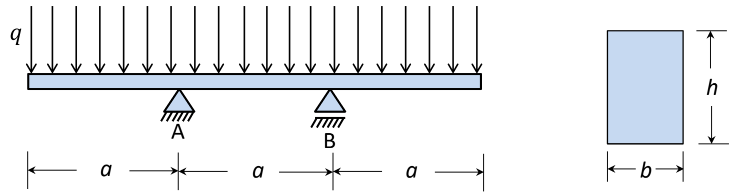
Duração: 120 minutos

Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos durante a prova!

Nome: ____________________________________ N.USP: __________ Assinatura: __________________

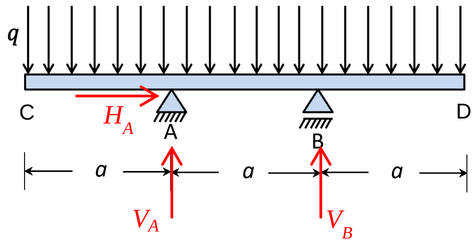
1ª Questão (3,0 pontos)

A viga prismática contínua da figura é biapoiada e está submetida a uma carga distribuída uniforme q. Sabendo que a seção transversal da viga é retangular, de altura h e largura b, pede-se calcular a máxima tensão normal e a máxima tensão de cisalhamento. *Justifique de forma clara todos seus cálculos e as passagens intermediárias que embasam sua solução!*



Solução:

O diagrama de corpo livre para a viga fica:



Das equações de equilíbrio da estática resultam:

$$H_A = 0$$

e

$$V_A = V_B = \frac{3qa}{2}$$

(0,5)

A força cortante e o momento fletor no trecho em balanço CA ficam:

$$V(x) = -qx \qquad 0 \leq x \leq a$$

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} \qquad 0 \leq x \leq a$$

E no trecho central AB ficam:

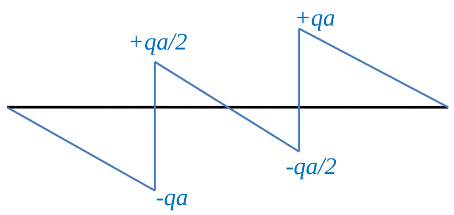
$$V(x) = -qx + \frac{3qa}{2} \qquad a \leq x \leq 2a$$

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{3qa}{2}(x-a) \qquad 0 \leq x \leq a$$

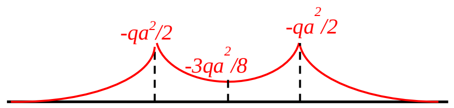
Para o trecho BD em balanço é possível a força cortante e o momento fletor internos ficam determinados pela simetria (análogos ao trecho em balanço CA).

Da análise das funções anteriores é imediato o traçado dos diagramas de esforços solicitantes:

(V)



(M)



(0,5)

Logo os valores máximos dos esforços solicitantes internos são (em módulo):

$$|V_{máx}| = qa$$

(0,5)

e

$$|M_{máx}| = \frac{qa^2}{2}$$

(0,5)

E as tensões máximas ficam dadas, em valor absoluto, por:

$$|\tau_{máx}| = \frac{3}{2}\frac{|V_{máx}|}{A} = \frac{3}{2}\frac{qa}{bh}$$

(0,5)

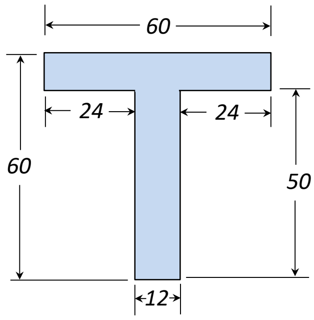
e

$$|\sigma_{máx}| = \frac{|M_{máx}|}{I}|y_{máx}| = \frac{qa^2}{2}.\frac{12}{bh^3}.\frac{h}{2} = 3\frac{q}{b}\left(\frac{a}{h}\right)^2$$

(0,5)

2ª Questão (3,5 pontos)

A figura representa a seção transversal de uma viga prismática. Esta viga é formada por um material cuja tensão normal de tração admissível é $\sigma_t = 300\text{MPa}$ e cuja tensão normal de compressão admissível é $\sigma_c = 200\text{MPa}$. Pede-se determinar qual é o momento fletor positivo admissível e qual é o momento fletor negativo admissível.

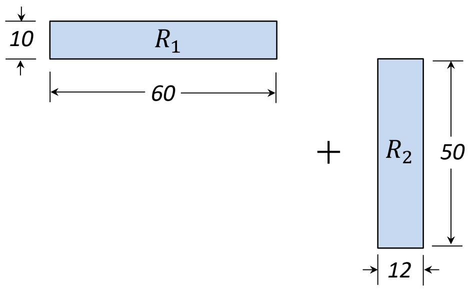


medidas em cm

Solução:

i) Cálculo das propriedades da seção transversal:

A seção transversal pode ser considerada como a soma de retângulos:



medidas em cm

Sendo A_1 a área de R_1, y_1 a coordenada de seu centroide em relação à sua base e I_1 o momento de inércia de R_1 em relação ao eixo horizontal que passa pelo seu centroide, então:

$$A_1 = 60 * 10 = 600\ cm^2$$

$$y_1 = 55cm$$

$$I_1 = \frac{60 * 10^3}{12} = 5.000cm^4$$

Sendo A_2 a área de R_2, y_2 a coordenada de seu centroide em relação à sua base e I_2 o momento de inércia de R_2 em relação ao eixo horizontal que passa pelo seu centroide, então:

$$A_2 = 50 * 12 = 600\ cm^2$$

$$y_2 = 25cm$$

$$I_2 = \frac{12 * 50^3}{12} = 125.000cm^4$$

A coordenada vertical do centroide da seção transversal será:

$$\bar{y} = \frac{A_1 * y_1 + A_2 * y_2}{A_1 + A_2}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{600 * 55 + 600 * 25}{600 + 600} = 40cm$$

(0,5)

E o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo horizontal que passa pelo seu centroide será, usando o teorema dos eixos paralelos:

$$I = I_1 + A_1 * (y_1 - \bar{y})^2 + (I_2 + A_2 * (y_2 - \bar{y})^2)$$

$$\Rightarrow I = 5000 + 600 * (55 - 40)^2 + (125.000 + 600 * (25 - 40)^2)$$

$$\Rightarrow I = 400.000cm^4 = 0{,}004m^4$$

(1,0)

Para um momento fletor positivo, a maior tensão de tração ocorrerá na face inferior da viga, assim,

$$M \leq \frac{\sigma_t * I}{\bar{y}} = \frac{300 * 10^3 * 0{,}004}{0{,}4} = 3000kN.m$$

e a maior tensão de compressão ocorrerá na face superior, então:

$$M \leq \frac{\sigma_c * I}{0{,}06 - \bar{y}} = \frac{200 * 10^3 * 0{,}004}{0{,}2} = 4000kN.m$$

Portanto o momento fletor positivo admissível será:

$$M_{adm} = 3000kN.m$$

(1,0)

Para um momento fletor negativo, a maior tensão de compressão ocorrerá na face inferior da viga, assim,

$$M \leq \frac{\sigma_c * I}{\bar{y}} = \frac{200 * 10^3 * 0{,}004}{0{,}4} = 2000kN.m$$

e a maior tensão de tração ocorrerá na face superior, então:

$$M \leq \frac{\sigma_t * I}{0{,}06 - \bar{y}} = \frac{300 * 10^3 * 0{,}004}{0{,}2} = 6000kN.m$$

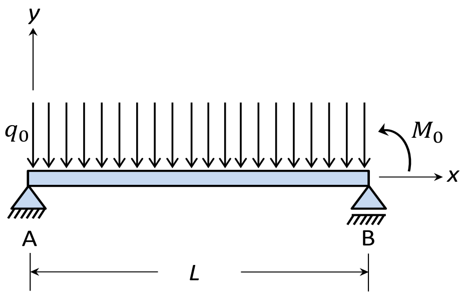
Portanto o momento fletor negativo admissível será, em módulo:

$$M_{adm} = 2000kN.m$$

(1,0)

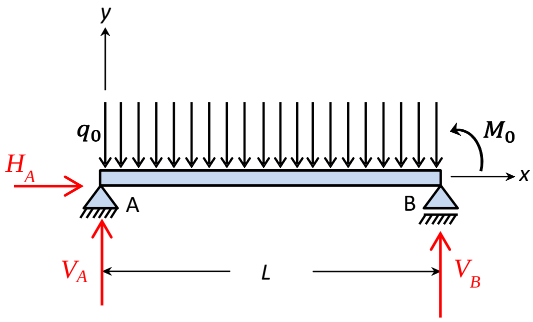
3ª Questão (3,5 pontos)

A viga prismática biapoiada da figura tem comprimento L e rigidez flexional EI. Esta viga está submetida a uma carga distribuída uniforme de intensidade q_0 e a um momento M_0 aplicado em B. Pede-se determinar as rotações das extremidades A e B da viga, provocadas pela aplicação desses esforços.



Solução:

O diagrama de corpo livre da estrutura fica:



Das equações de equilíbrio resultam:

$$H_A = 0$$

$$V_B.L + M_o = \frac{q_o L^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad V_B = \frac{q_o L}{2} - \frac{M_o}{L}$$

$$V_A + V_B = q_o L$$

Logo:

$$V_A = \frac{q_o L}{2} + \frac{M_o}{L}$$

(0,5 pto)

A solução do problema pode ser feita a partir da equação diferencial de 2ª ou de 4ª ordem.

Utilizando a equação diferencial de 2ª ordem, teremos:

$$EI.v''(x) = M(x) = V_A.x - \frac{q_o x^2}{2}$$

Ou seja:

$$EI.v''(x) = \left(\frac{q_o L}{2} + \frac{M_o}{L}\right)x - \frac{q_o x^2}{2}$$

Integrando:

$$EI.v'(x) = \left(\frac{q_o L}{2} + \frac{M_o}{L}\right)\frac{x^2}{2} - \frac{q_o x^3}{6} + C_1$$

Integrando novamente: (1,0 pto)

$$EI.v(x) = \left(\frac{q_oL}{2} + \frac{M_o}{L}\right)\frac{x^3}{6} - \frac{q_ox^4}{24} + C_1x + C_2$$

As constantes de integração C_1 e C_2 são obtidas a partir das condições de contorno essenciais, a saber:

$$v(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = 0$$

e (1,0 pto)

$$v(L) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_1 = -\frac{M_oL}{6} - \frac{q_oL^3}{24}$$

Logo:

$$EI.v'(x) = \left(\frac{q_oL}{2} + \frac{M_o}{L}\right)\frac{x^2}{2} - \frac{q_ox^3}{6} - \frac{M_oL}{6} - \frac{q_oL^3}{24}$$

De onde resultam:

$$\theta_A = v'(0) = -\frac{1}{EI}\left(\frac{M_oL}{6} + \frac{q_oL^3}{24}\right)$$

e (1,0 pto)

$$\theta_B = v'(L) = +\frac{1}{EI}\left(\frac{M_oL}{3} + \frac{q_oL^3}{24}\right)$$