



PME3210 – Mecânica dos Sólidos I – P1 – 11/04/2018

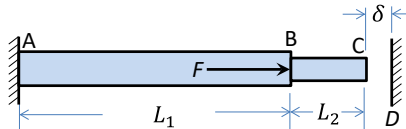
Duração: 100 minutos

Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos durante a prova!

Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____

1ª Questão (4,0 pontos)

A barra escalonada da figura é formada por dois trechos prismáticos. A seção transversal do trecho AB tem área $A_1 = 12\text{mm}^2$ e a seção transversal do trecho BC tem área $A_2 = 5\text{mm}^2$. Os dois trechos são formados pelo mesmo material de comportamento elástico linear e módulo de elasticidade $E = 75\text{GPa}$. No ponto B está aplicada uma força F com o sentido indicado. Antes da aplicação dessa força, o trecho AB tem comprimento $L_1 = 3,6\text{m}$, o trecho BC tem comprimento $L_2 = 1,0\text{m}$ e existe uma folga $\delta = 1,2\text{mm}$ entre a extremidade C da barra e o batente rígido D . A tensão de tração máxima suportada pelo material é $\sigma_t = 150\text{MPa}$ e a tensão de compressão máxima suportada é $\sigma_c = 270\text{MPa}$. Pedese determinar o fator de segurança quando $F = 1800\text{N}$.



Resolução:

Dois situações podem ocorrer, dependendo da intensidade da força F :

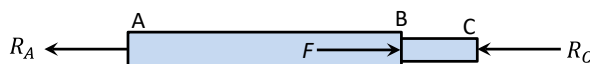
- i) a intensidade da força F não é suficiente para fechar a folga. Nesse caso o problema é isostático e
- ii) a intensidade da força F é suficiente para fechar a folga. Nesse caso o problema é hiperestático.

Então o primeiro passo é determinar a força $\bar{F}$ necessária para fechar a folga:

$$\bar{F} = \frac{EA_1}{L_1} \delta = 300\text{N}$$

Portanto estamos no caso ii e o problema deve ser considerado como hiperestático e resolvido como tal:

i) DCL:



ii) Equação de equilíbrio:

$$R_A + R_C = F$$

iii) Compatibilidade de deslocamentos:

$$\delta_{AB} + \delta_{BC} = \delta$$

(Nota: escrever $\delta_{AB} + \delta_{BC} = 0$ invalida a solução, pois seria outro problema que não o proposto no enunciado)



iv) Relações entre forças e deslocamentos:

$$\delta_{AB} = \frac{N_{AB} L_1}{EA_1}$$

$$\delta_{BC} = \frac{N_{BC} L_2}{EA_2}$$

v) Como $N_{AB} = R_A$ e $N_{BC} = -R_B$, resolvendo o sistema obtemos:

$$N_{AB} = 900 \text{ (tração)}$$

$$N_{BC} = -900N \text{ (compressão)}$$

vi) A tensão normal atuante no trecho AB será:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_1} = 75 \text{ MPa (tração)}$$

vii) A tensão normal atuante no trecho BC será:

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_2} = -180 \text{ MPa (compressão)}$$

viii) O fator de segurança à tração será, então,

$$(FS)_t = \frac{\sigma_t}{\sigma_{AB}} = 2$$

ix) O fator de segurança à compressão será,

$$(FS)_c = \frac{\sigma_c}{|\sigma_{BC}|} = 1,5$$

x) O fator de segurança da estrutura será:

$$FS = \min\{(FS)_t, (FS)_c\} = 1,5$$

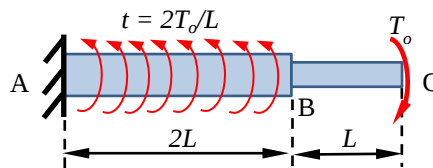
(A solução apresentada não é a única solução possível para o problema)



2ª Questão (4,0 pontos)

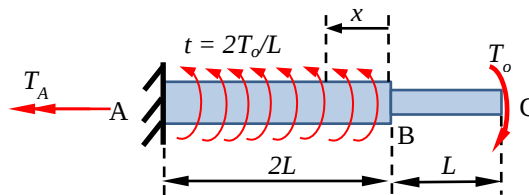
A barra ABC indicada na figura possui seções circulares cheias com diâmetros $\sqrt{2}d$ (no trecho AB) e d (no trecho BC). A barra encontra-se engastada em A e livre em C e os comprimentos dos trechos AB e BC são, respectivamente, $2L$ e L . Admitindo que o material tenha comportamento elástico-linear e o módulo de cisalhamento seja G , determine:

- a) A reação de apoio para o carregamento aplicado (indique sua magnitude e o sentido correto de atuação em um diagrama de corpo livre final);
- b) O diagrama final de esforços solicitantes (expresse-os apenas em função de T_o);
- c) O ângulo de giro da seção C em relação à seção A;
- d) A máxima tensão de cisalhamento na estrutura e seu local de ocorrência.



Resolução:

a) Designando por T_A o momento de torção no engaste A (conforme indicado no D.C.L. abaixo) e impondo o equilíbrio de momentos (em torno do eixo axial da barra), teremos:



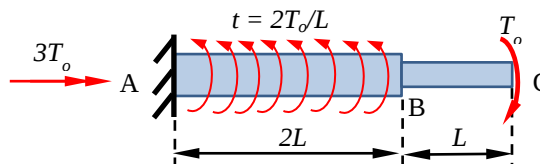
$$-T_A - \int_0^{2L} \left(\frac{2T_o}{L} \right) dx + T_o = 0$$

$$T_A + 4T_o = T_o$$

$$T_A = -3T_o$$

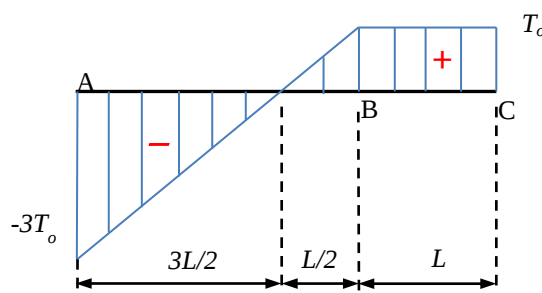
(0,5 pts)

O sinal negativo indica que o sentido arbitrado para o torque de reação no D.C.L. acima deve ser invertido. Logo, o D.C.L. final (e correto) é:



(0,5 pts)

b) O diagrama de esforços solicitantes final fica dado por:



(1,0 pts)



c) O ângulo de giro da seção C em relação à seção A é dado por:

$$\phi_{C,A} = \phi_{C,B} + \phi_{B,A} = +\frac{T_o L}{GI_{p,CB}} + \int_0^{2L} \frac{T(x)}{GI_{p,BA}} dx$$

Onde o momento de torção nas seções transversais do trecho AB fica dado por:

$$T(x) = T_o - t \cdot x = T_o \left(1 - 2\frac{x}{L}\right)$$

Sendo a coordenada x medida a partir da seção B em direção à seção A (ver figura na página anterior). Assim obtemos:

$$\phi_{C,A} = \frac{T_o L}{GI_{p,CB}} + \frac{T_o}{GI_{p,BA}} \int_0^{2L} \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) dx$$

E lembrando que:

$$I_{p,CB} = \frac{\pi d^4}{32} \quad e \quad I_{p,BA} = \frac{\pi(\sqrt{2}d)^4}{32} = \frac{\pi d^4}{8}$$

Virá após simplificações:

$$\phi_{C,A} = 16 \frac{T_o L}{G\pi d^4}$$

(1,0 pto)

d) A máxima tensão de cisalhamento no trecho BC será na parte periférica de qualquer seção transversal deste trecho, valendo:

$$|\tau_{máx,BC}| = \frac{T_o}{I_{p,CB}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{16T_o}{\pi d^3}$$

(0,5 pto)

Já a máxima tensão de cisalhamento no trecho AB ocorrerá nos pontos periféricos da seção A (onde o momento de torção tem o valor máximo), valendo:

$$|\tau_{máx,AB}| = \frac{3T_o}{I_{p,BA}} \cdot \frac{(\sqrt{2}d)}{2} = \frac{12\sqrt{2}T_o}{\pi d^3} \cong \frac{17T_o}{\pi d^3}$$

(0,5 pto)

Logo:

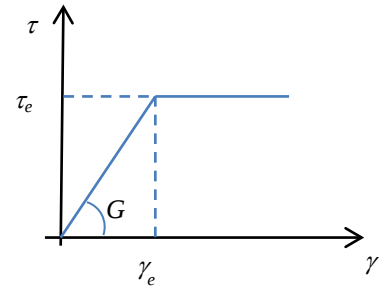
$$|\tau_{máx}| \cong \frac{17T_o}{\pi d^3}$$



3ª Questão (2,0 pontos)

Considere uma barra AB prismática de seção circular cheia com diâmetro d e comprimento total L . A extremidade A encontra-se livre e a extremidade B está engastada. O material possui comportamento elástico-perfeitamente plástico cujo diagrama ($\tau \times \gamma$) está indicado ao lado. São dados: d, L, G, τ_e . Pede-se:

- Determine o valor do momento de torção (T) a ser aplicado na seção A de tal forma que a metade da área de toda a seção transversal fique plastificada;
- Determine neste caso o ângulo de giro da seção A em relação à seção B.



Resolução:

- Seja $r_o = d/2$ o raio externo da barra de seção circular cheia.

Seja r_i o raio na interface que separa o núcleo (ainda no regime elástico-linear) da parte mais externa que atingiu o regime plástico.

Como a metade da área deve ser plastificada, então:

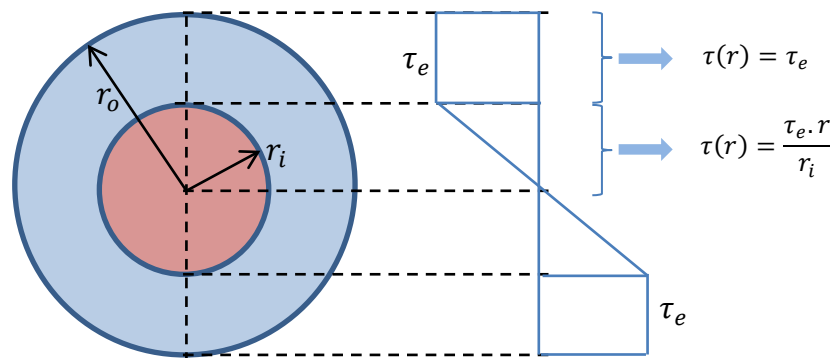
$$A_p = \frac{\pi r_o^2}{2} = \pi r_i^2$$

O que leva a:

$$r_i = \frac{\sqrt{2}}{2} r_o = \frac{\sqrt{2}}{4} d$$

(0,5 pto)

Sendo o material elástico-perfeitamente plástico, o diagrama de tensão cisalhante na seção fica:



(0,5 pto)

E o momento de torção total suportado pela seção transversal associado a este diagrama fica dado por:

$$T = T_e + T_p$$

Onde T_e e T_p são as parcelas do momento associadas ao núcleo (elástico) e à periferia (plástica), respectivamente, sendo dados por:

$$T_e = \int_0^{r_i} \tau(r) \cdot r \cdot 2\pi r \cdot dr = \int_0^{r_i} \left(\frac{\tau_e \cdot r}{r_i} \right) \cdot r \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{\pi \tau_e r_i^3}{2}$$
$$T_p = \int_{r_i}^{r_o} \tau(r) \cdot r \cdot 2\pi r \cdot dr = \int_{r_i}^{r_o} \tau_e \cdot r \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{2\pi \tau_e (r_o^3 - r_i^3)}{3}$$

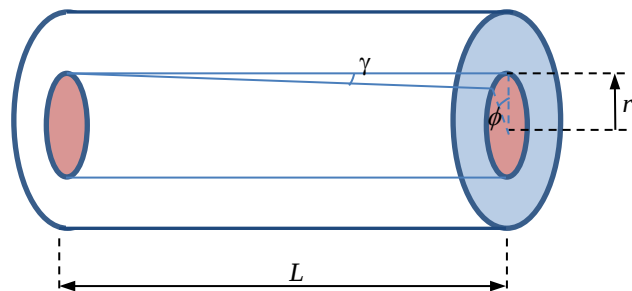


Resutando, após as simplificações:

$$T = \frac{(16 - \sqrt{2})}{24} \pi \tau_e r_o^3 = \frac{(16 - \sqrt{2})}{192} \pi \tau_e d^3$$

(0,5 pts)

b) Observando a fibra mais externa da região elástica (ou seja, aquela que dista r_i do centro de torção), teremos:



$$\phi \cdot r_i = \gamma_e \cdot L = \frac{\tau_e}{G} \cdot L$$

Logo:

$$\phi = \frac{\tau_e}{G} \cdot \frac{L}{r_i} = 2\sqrt{2} \left(\frac{\tau_e}{G} \cdot \frac{L}{d} \right)$$

(0,5 pts)

Ou, de modo alternativo, aplicando a fórmula que nos permite calcular o ângulo de giro (mas tomando apenas a parte correspondente ao núcleo elástico):

$$\phi = \frac{T_e \cdot L}{G \cdot I_{p,e}} = \left(\frac{\pi \tau_e r_i^3}{2} \right) \cdot \frac{L}{G} \cdot \frac{2}{\pi r_i^4}$$

Levando a:

$$\phi = \frac{\tau_e}{G} \cdot \frac{L}{r_i} = 2\sqrt{2} \left(\frac{\tau_e}{G} \cdot \frac{L}{d} \right)$$

Como indicado acima!