Universidade de São Paulo
Instituto de Física
4323201 Física Experimental A

E2 Colisão bidimensional

Serão examinadas a conservação do momento linear e a da energia cinética em uma colisão entre dois corpos.

1. Momento linear

O momento linear de um objeto, $\vec{p}$, é definido como o produto da massa, *m*, pela velocidade, $\vec{v}$, do objeto:

$$\vec{p} = m\vec{v}\,. \qquad (1.1)$$

O momento linear é uma quantidade vetorial. Ao definir o momento linear em um espaço tridimensional, é necessário especificar seus três componentes nas direções *x*, *y* e *z*: $\vec{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$.

2. Conservação do momento linear

Considere um sistema de dois objetos 1 e 2 interagindo mutuamente. A força que o objeto 2 exerce sobre o objeto 1 é chamada de $\vec{F}_{12}$; similarmente, a força que o objeto 1 exerce sobre o objeto 2, $\vec{F}_{21}$. Da segunda lei de Newton, as equações de movimento são:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1^{ex}, \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2^{ex}. \qquad (2.1)$$

onde $\vec{F}_i^{ex}$ é a força externa exercida com a origem fora do sistema sobre o objeto *i*.

Segundo a terceira lei de Newton (ação/reação),

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0\,. \qquad (2.2)$$

Somando duas equações em (2.1) e usando a equação (2.2), temos:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = \frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}_{1,ext} + \vec{F}_{2,ext}\,. \qquad (2.3)$$

A equação (2.3) indica que a taxa de variação do momento linear total, $\vec{P}$, é igual à força externa resultante exercida sobre o sistema. Quando o sistema está isolado, a força externa é nula. Portanto,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 . \tag{2.4}$$

Consequentemente, o momento linear total num sistema isolado se conserva.

3. Energia cinética e Energia potencial

Outra quantidade importante que descreve o sistema é a energia cinética. A energia cinética para um objeto em movimento é definida por $\frac{1}{2}mv^2$, onde $v \equiv |\vec{v}| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$.

A energia cinética total do sistema isolado de dois objetos, K, é dada por:

$$K = \frac{1}{2}\frac{{\vec{p}_1}^2}{m_1} + \frac{1}{2}\frac{{\vec{p}_2}^2}{m_2} . \tag{3.1}$$

A derivada da equação (3.1) em relação ao tempo é:

$$\frac{d}{dt}K = \frac{\vec{p}_1}{m_1} \cdot \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{\vec{p}}{m_2} \cdot \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{v}_1 \cdot \vec{F}_{12} + \vec{v}_2 \cdot \vec{F}_{21} . \tag{3.2}$$

Como no caso da força gravitacional, o trabalho feito por uma força conservativa sobre um objeto em movimento independe da trajetória do objeto. Caso $\vec{F}_{12}$ e $\vec{F}_{21}$ sejam conservativas, o potencial exercido entre os dois objetos 1 e 2 deve ser uma função da diferença entre as posições dos dois objetos, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, e expresso por $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, significando que o espaço é uniforme. As forças são dadas por:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_1}, \quad \vec{F}_{21} = -\frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_2} . \tag{3.3}$$

Substituindo a equação (3.3) na equação (3.2), temos:

$$\frac{d}{dt}K = -\frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_1} - \frac{d\vec{r}_2}{dt} \cdot \frac{\partial U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\partial \vec{r}_2} = -\frac{d}{dt}U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) . \tag{3.4}$$

$$\frac{d}{dt}\left[K + U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right] = 0 . \tag{3.5}$$

A soma da energia cinética com a energia potencial de um sistema é chamada de energia mecânica, $E_{\text{mec}} = K + U$, e se conserva. A força entre os objetos não é necessariamente conservativa e neste caso a energia cinética diminui. De maneira similar, quando existirem as forças externas conservativas, haverá a conservação da energia mecânica também.

4. Colisão e Coeficiente de restituição

Considere uma colisão unidimensional entre dois objetos 1 e 2 com as respectivas massas, m_1 e m_2, e velocidades antes e depois da colisão, v_1 e v_2; v_1' e v_2'. Há a conservação do momento linear durante a colisão:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' . \quad (4.1)$$

Com esta equação e as velocidades v_1 e v_2 conhecidas, é ainda impossível determinar as outras velocidades v_1' e v_2'. Para isso, é preciso utilizar o chamado coeficiente de restituição que caracteriza o tipo de colisão.

Introduzindo a diferença na velocidade antes e depois da colisão, $\Delta v = v_1 - v_2$ e $\Delta v' = v_1' - v_2'$, respectivamente, o coeficiente de restituição, e, é definido como:

$$e = -\frac{\Delta v'}{\Delta v} \quad (0 \le \mathrm{e} \le 1). \quad (4.2)$$

Das equações (4.1) e (4.2), temos:

$$v_1' = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_1' + m_2 v_2' - m_2 v_2'}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2' + m_2 \cdot \Delta v'}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_2 \cdot \Delta v'}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - e \frac{m_2}{m_1 + m_2} \Delta v . \quad (4.3)$$

De maneira similar,

$$v_2' = \frac{m_1 v_2' + m_2 v_2' + m_1 v_1' - m_1 v_1'}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 \cdot \Delta v'}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + e \frac{m_1}{m_1 + m_2} \Delta v . \quad (4.4)$$

Usando as equações (4.2) a (4.4), a diferença na energia cinética antes e depois da colisão, ΔK, é dada por:

$$\Delta K = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1^{\,2} + m_2 v_2^{\,2}\right) - \frac{1}{2}\left(m_1 v_1'^{\,2} + m_2 v_2'^{\,2}\right) \qquad = \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\Delta v)^2\left(1 - e^2\right). \qquad (4.5)$$

Quando $e = 1$ (colisão elástica), a energia cinética total se conserva. Caso $e < 1$ (colisão inelástica), a energia cinética se reduz após a colisão. Parte da energia cinética se transforma em outras formas de energia (calor, som, vibrações, etc.). Especialmente, quando $e = 0$ (colisão perfeitamente inelástica), há perda máxima da energia cinética total na colisão e os corpos permanecerão unidos após a colisão em consequência de $\Delta v' = 0$.

5. Parte prática

Os materiais a serem usados são: um trilho sendo que parte do trilho fica curvada e a outra, um plano horizontal, duas esferas metálicas, uma folha de papel A4, uma folha de papel carbono, uma balança digital, um paquímetro e dois esquadros.

5.1 Sem colisão

Considere que uma partícula com a massa m_1 desce sobre uma rampa de altura h com a velocidade inicial nula e chega ao fim da rampa com velocidade v. A energia potencial, U, da partícula que está na altura h, devido à força gravitacional, é dada por:

$$U = m_1 g h. \qquad (5.1)$$

Quando essa partícula chega ao fim da rampa, a energia cinética, K, é

$$K = \frac{1}{2} m_1 v^2 . \qquad (5.2)$$

Se considerarmos a conservação da energia mecânica,

$$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v^2 , \tag{5.3}$$

$$v = \sqrt{2gh} . \tag{5.4}$$

Se substituirmos a partícula por uma esfera dura com massa m_1 e raio r, a esfera desce rolando sobre o trilho curvado de uma altura h em relação ao plano horizontal do trilho e chega ao fim do trilho com a velocidade, v_1 [veja a Figura 1(a)]. Considerando a energia cinética de rotação da esfera, a energia cinética total é dada por:

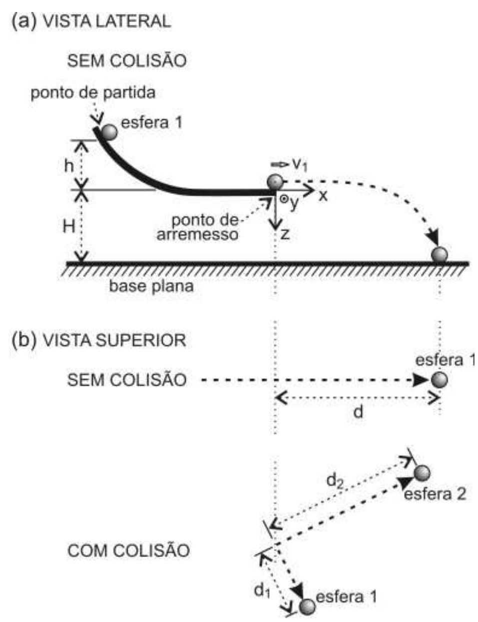

Figura 1. Queda de esfera e colisão. (a) Vista lateral de queda de esfera; (b) Vista superior sem e com colisão.

$$K = \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 .$$

$$= \frac{1}{2} m_1 {v_1}^2 + \frac{1}{2} I\left(\frac{v_1}{r}\right)^2 \tag{5.5}$$

onde I e ω são o momento de inércia e a velocidade angular da esfera, respectivamente.

A conservação de energia mecânica se torna:

$$m_1 gh = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{I}{r^2}\right){v_1}^2 . \tag{5.6}$$

O momento de inércia, I, da esfera pode ser calculado como:

$$I = \frac{2}{5} m_1 r^2 . \tag{5.7}$$

Usando as equações (5.6) e (5.7), a velocidade da esfera é dada por:

$$v_1 = \sqrt{\frac{10}{7} gh} = \sqrt{\frac{5}{7}} \cdot \sqrt{2gh} = 0.845v . \tag{5.8}$$

Esta equação indica que a velocidade da esfera fica 84,5% da velocidade da partícula sem rotação.

A esfera tendo a velocidade v_1 na direção horizontal (direção x) ao fim do trilho será arremessada a partir da extremidade de trilho que fica à altura de H (direção z) em relação à base plana (veja a Figura 1). O ponto de arremesso da esfera será tomado como a origem das coordenadas tridimensionais (0, 0, 0) e a posição de alcance da esfera na base, (d, 0, H). As equações cinemáticas que descrevem o movimento de queda livre da esfera são:

$$d = v_1 \cdot \Delta t , \tag{5.9}$$

$$H = \frac{1}{2} g \cdot (\Delta t)^2 . \tag{5.10}$$

onde Δt é o tempo de queda.

Usando a equação (5.10) o tempo de queda Δt será determinado medindo-se a altura de queda da esfera H e utilizando o valor da aceleração de gravidade local g. Além disso, a velocidade v_1 pode ser determinada pela equação (5.9) com os dados obtidos.

5.2 Com colisão

A esfera tendo a velocidade horizontal v_1 será arremessada colidindo com a outra esfera (alvo) em repouso com a massa m_2. Neste instante, supõe-se que a energia cinética de rotação da esfera incidente seja mantida e a esfera alvo não gire após a colisão. Desprezando a resistência do ar, cada esfera se move tridimensionalmente, isto é, executam um movimento uniforme nas direções x e y e um movimento de queda livre na direção z (Figura 1).

Considere o movimento uniforme de cada esfera apenas no plano xy. A Figura 1(b) mostra que as distâncias de alcance, vistas de cima, para a esfera incidente e a esfera alvo são d_1 e d_2, respectivamente.

Se não existir nenhuma força externa neste movimento, haverá a conservação do momento linear:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2' . \tag{5.11}$$

onde $\vec{v}_1'$ e $\vec{v}_2'$ são os componentes dos vetores velocidade da esfera incidente e da esfera alvo no plano *xy*, respectivamente.

Além disso, se a colisão for elástica, haverá também a conservação da energia cinética:

$$\frac{1}{2}m_1 {v_1}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 . \qquad (5.12)$$

.