Nome: ____________________

NUSP: ____________________

PMR-2360 - Controle e Automação I
1a. Prova - 07 de Outubro de 2008
Duração da prova - 80 minutos
Solução da PROVA 1

[Q. 1] (10.0pt) Um sistema contendo um motor de corrente contínua e uma carga está representado na Figura 1. Após simplificações, como por exemplo, a não consideração dos efeitos da indutância de armadura L_a do motor, a função de transferência que relaciona o ângulo de deslocamento da armadura $\theta_m(t)$ e a tensão de armadura $e_a(t)$ pode ser escrita como:

$$\frac{\Theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_t/(R_a J_m)}{s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_t K_b}{R_a}\right)\right]}. \tag{1}$$

Onde:

- $\Theta_m(s)$: a posição angular da armadura na variável de Laplace s, corresponde a $\theta_m(t)$ no domínio do tempo.
- $E_a(s)$: tensão de armadura na variável de Laplace s, corresponde a $e_a(t)$ no domínio do tempo.
- R_a: resistência de armadura.
- K_t: constante de torque.
- K_b: constante de força contra eletromotriz.
- J_m: é a inércia total do sistema referida à armadura do motor, o que inclui a inércia da armadura J_a e a inércia da carga J_L. Podemos escrever:

  $$J_m = J_a + J_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2, \tag{2}$$

  onde N_1 é o número de dentes da engrenagem 1 e N_2 é o número de dentes da engrenagem 2.
- D_m: é o amortecimento viscoso total referida à armadura, o que inclui o amortecimento da armadura D_a e o amortecimento da carga D_L. Obviamente, podemos escrever:

  $$D_m = D_a + D_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2. \tag{3}$$

Sabe-se que:

- $\frac{K_t}{R_a} = 5$N-m/AΩ,
- $K_b = 2$V-s/rad,
- $J_a = 5$Kg-m^2,
- $D_a = 2$N-ms/rad,
- $N_1 = 100$,
- $N_2 = 1000$,
- $J_L = 700$Kg-m^2,
- $D_L = 800$N-ms/rad.

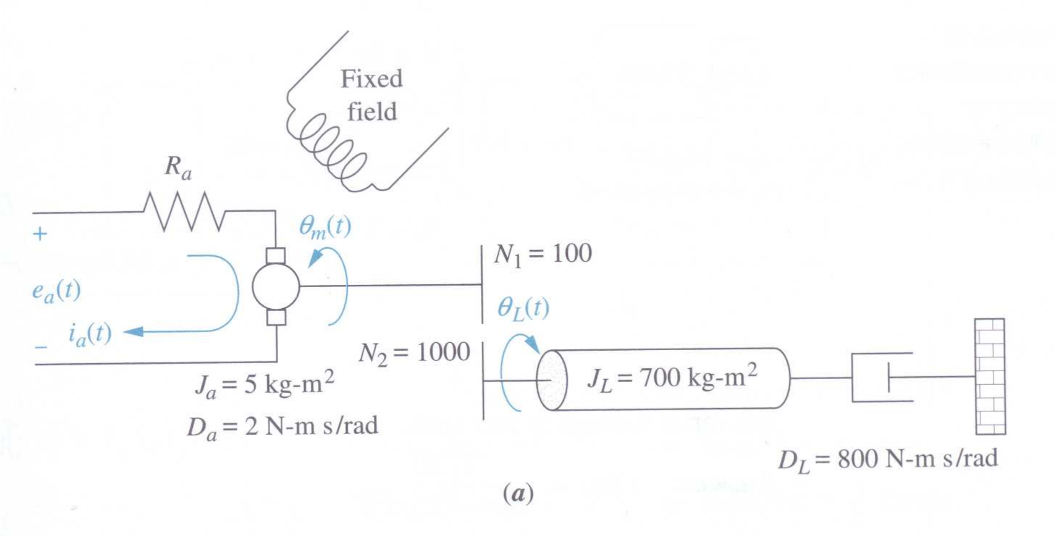


Figura 1: Motor CC e carga associada.

(a) (1.0pt) Calcule a função de transferência da posição angular da carga $\theta_L(t)$ em função da tensão de armadura $e_a(t)$, ou seja,

$$\frac{\Theta_L(s)}{E_a(s)}. \tag{4}$$

Resposta:

Obviamente a posição angular da carga $\Theta_L(s)$ está relacionada à posição angular do motor $\Theta_m(s)$ através das relações de engrenagens N_1/N_2, logo:

$$\frac{\Theta_L(s)}{E_a(s)} = \frac{N_1}{N_2}\frac{\Theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{N_1}{N_2}\frac{K_t/(R_a J_m)}{s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_t K_b}{R_a}\right)\right]}. \tag{5}$$

$$J_m = J_a + J_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2, \tag{6}$$

$$= 5 + 700\left(\frac{100}{1000}\right)^2, \tag{7}$$

$$= 12. \tag{8}$$

$$D_m = D_a + D_L\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2. \tag{9}$$

$$= 2 + 800\left(\frac{100}{1000}\right)^2, \tag{10}$$

$$= 10. \tag{11}$$

$$\frac{\Theta_L(s)}{E_a(s)} = \frac{N_1}{N_2}\frac{K_t/(R_a J_m)}{s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_t K_b}{R_a}\right)\right]}. \tag{12}$$

$$= \frac{100}{1000}\frac{0.417}{s\left[s + \frac{1}{12}(10 + 5 \times 2)\right]}, \tag{13}$$

$$= \frac{0.0417}{s(s + 1.667)}. \tag{14}$$

(b) (5.0pt) Deseja-se projetar um sistema de controle em malha fechada (como ilustrado na figura abaixo) com um controlador do tipo proporcional $H(s) = K_p$. Deseja-se controlar a posição angular da carga $\theta_L(t)$. Para tal situação, pede-se:

i. (1.0pt) Calcule a faixa de valores de K_p para que o sistema em malha fechada seja estável.
Resposta:

A equação característica do sistema pode ser escrita como:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + K_p \frac{0.0417}{s(s+1.667)} = \frac{s(s+1.667) + 0.0417K_p}{s(s+1.667)}. \tag{15}$$

Como só nos interessa as raízes da equação então podemos escrever:

$$1 + G(s)H(s) = s^2 + 1.667s + 0.0417K_p. \tag{16}$$

Utilizando a tabulação de Routh-Hurwitz obtemos:

s^2	1	$0.0417K_p$
s^1	1.667	0
s^0	$\frac{0.0417K_p \times 1.667 - 1\times 0}{1.667} = 0.0417K_p$	0

Logo, para que o sistema seja estável:

$$0.0417K_p > 0 \tag{17}$$
$$K_p > 0 \tag{18}$$

ii. (2.0pt) Este controlador, permite simultaneamente obter erro estático e_{ss} nulo para uma entrada do tipo degrau $R(s) = A/s$ ($r(t) = A$) e para um distúrbio do tipo degrau $D(s) = B/s$ ($d(t) = B$) ? Argumente matematicamente.
Resposta:
Podemos escrever a função de transferência do erro como:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}D(s). \tag{19}$$

O primeiro termo pode ser calculado com $D(s) = 0$ e o segundo termo com $R(s) = 0$. Para $R(s) = 0$ temos $E(s) = -Y(s)$
Sabemos que $e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$.

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s), \tag{20}$$
$$= \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{1 + G(s)H(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}D(s)\right], \tag{21}$$
$$= \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{1 + \frac{N_1}{N_2}\frac{K_t/(R_aJ_m)}{s\left[s+\frac{1}{J_m}\left(D_m+\frac{K_tK_b}{R_a}\right)\right]}K_p}\frac{A}{s} - \frac{\frac{N_1}{N_2}\frac{K_t/(R_aJ_m)}{s\left[s+\frac{1}{J_m}\left(D_m+\frac{K_tK_b}{R_a}\right)\right]}}{1 + \frac{N_1}{N_2}\frac{K_t/(R_aJ_m)}{s\left[s+\frac{1}{J_m}\left(D_m+\frac{K_tK_b}{R_a}\right)\right]}K_p}\frac{B}{s}\right], \tag{22}$$
$$= \lim_{s\to 0} s\left[\frac{s\left[s+\frac{1}{J_m}\left(D_m+\frac{K_tK_b}{R_a}\right)\right]}{s\left[s+\frac{1}{J_m}\left(D_m+\frac{K_tK_b}{R_a}\right)\right] + \frac{N_1}{N_2}\frac{K_t}{R_aJ_m}K_p}\frac{A}{s} - \frac{\frac{N_1}{N_2}K_t/(R_aJ_m)}{s\left[s+\frac{1}{J_m}\left(D_m+\frac{K_tK_b}{R_a}\right)\right] + \frac{N_1}{N_2}K_t/(R_aJ_m)K_p}\frac{B}{s}\right] \tag{23}$$
$$= 0 - \frac{B}{K_p}, \tag{24}$$
$$= -\frac{B}{K_p}. \tag{25}$$

Logo, não é possível para o controlador proporcional $H(s) = K_p$ anular simultaneamente o erro devido a $R(s) = A/s$ e a $D(s) = B/s$.

iii. (2.0pt) Deseja-se projetar um sistema de controle, **utilizando o lugar das raízes**, que possua tempo de subida t_r e tempo de assentamento t_s os menores possíveis e que possua máximo sobresinal M_p nulo. Calcule o valor de K_p.
Resposta:

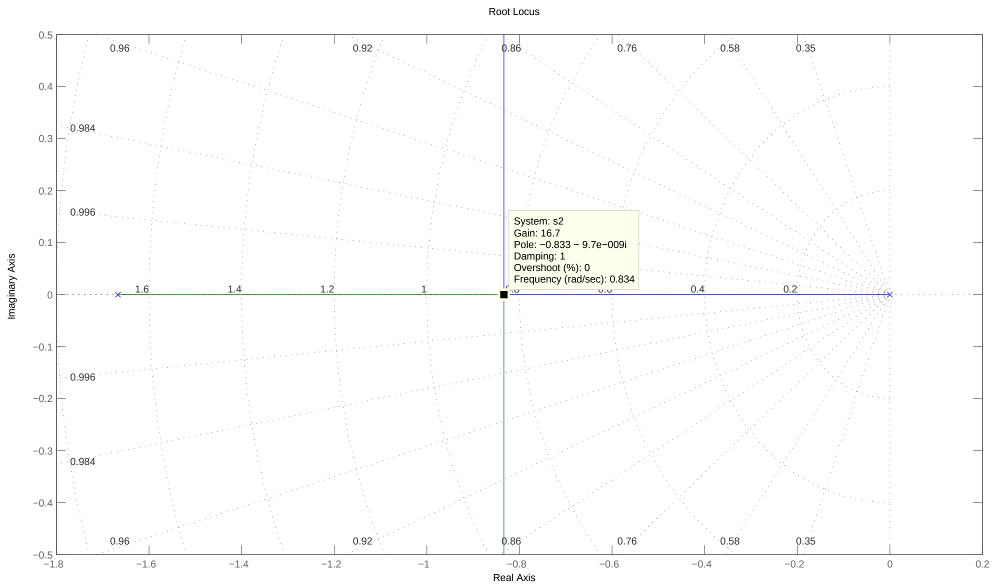


Figura 2: Lugar das raízes.

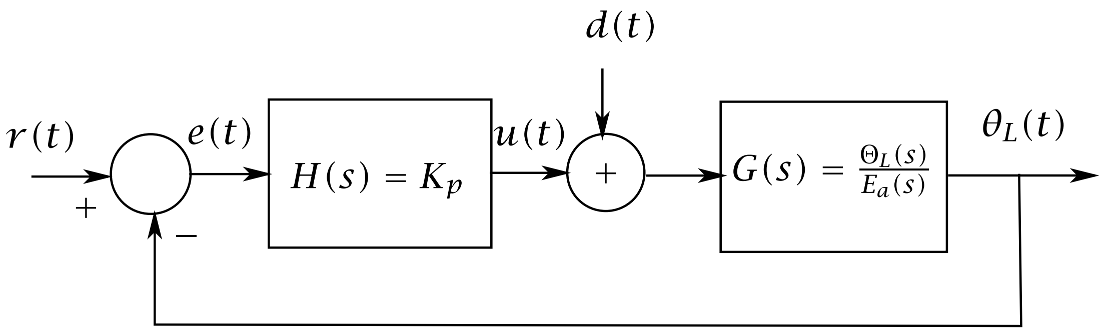
Para um sistema de 2a. ordem padrão o sistema com os menores t_r e t_s e com M_p nulo é o sistema com amortecimento crítico $\zeta = 1$. Neste caso, as duas raízes são reais e iguais. Ou seja, neste caso temos $s_{1,2} = -1.667/2 = -0.8335$.
Sabemos que a condição de módulo pode ser escrita como:

$$|G(s)H(s)| = 1 \Rightarrow \tag{26}$$

$$\left|\frac{K_p 0.0417}{s(s+1.667)}\right|_{s=-0.8335} = 1 \Rightarrow \tag{27}$$

$$\left|\frac{K_p 0.0417}{-0.6947}\right| = 1 \Rightarrow \tag{28}$$

$$K_p = 16.66. \tag{29}$$



(c) (2.0pt) Observou-se, entretanto, que a inércia J_L da carga é variável no tempo, $J_L \in [300, 1000]$. Considerando o valor da constante proporcional K_p calculado no ítem anterior, calcule a faixa de valores das seguintes grandezas, tempo de assentamento t_s, tempo de subida t_r e Máximo Sobresinal M_p quando a inércia J_L varia na faixa de valores especificada.

(d) (2.0pt) Considerando que a inércia da carga J_L varia na faixa especificada por, $J_L \in [300, 1000]$, calcule a faixa de valores para a constante proporcional K_p tal que o máximo sobresinal M_p do sistema em malha fechada seja sempre nulo.