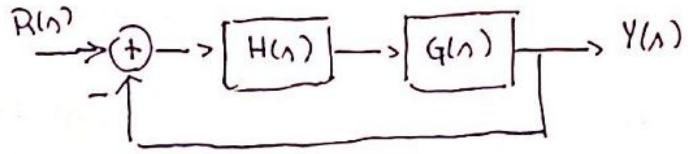
Exercícios sobre construção de Lugar das Raízes (LR) ①

Ex: 1 Seja o seguinte sistema de controle em malha fechada



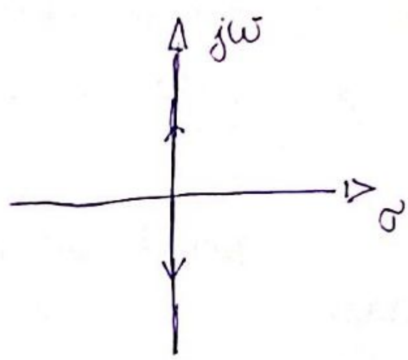
onde $G(s) = \frac{1}{s^2}$ e $H(s) = K_p$.

Esboce o LR para esse sistema

Equação característica $1 + K_p \frac{1}{s^2} = 0 \Rightarrow s^2 = -1/K_p \Rightarrow$

$s = \pm \sqrt{1/K_p}\, j$

Dessa forma conclue-se que o L.R coincide com o eixo $j\omega$



Ex: 2 Substituindo o controlador proporcional por um controlador PD $H(s) = K_p + K_D s$

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

como não existe uma constante multiplicativa podemos fazer $K = K_D$ e $K_P/K_D = 1$ dessa forma $H(s) = K(1+s)$

A equação característica pode ser escrita como:

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(1+s)}{s^2} = \frac{s^2 + Ks + K}{s^2}$$

malha aberta $G(s).H(s) = \frac{K(1+s)}{s^2}$

I-) ∃ dois pólos em malha aberta → ∃ duas partes de L.R. ②

II-) L.R no eixo real

$\exists LR \quad -\infty < s \leq 0$

III-) Assíntotas

$n = 2$ grau do polinômio denominador
$m = 1$ grau do polinômio numerador

$$\text{ângulo} = \frac{\pm 180°(2k+1)}{n-m} \Rightarrow p\ k=0, \frac{\pm 180°}{2-1} = \pm 180°$$

↳ tanto faz considerar + ou −

ângulo = 180°

III-) Cruzamento do LR e eixo $j\omega$

$$1 + G(s)H(s) = \frac{s^2 + Ks + K}{s^2}$$

precisamos considerar apenas o numerador

Tabulação de Routh

$$\begin{array}{lll} s^2 & 1 & K \\ s^1 & K & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

como por hipótese $K > 0$ não há possibilidade de mudanças de sinal na 1ª coluna logo o sistema é sempre estável para $K > 0$

IV-) Pontos de chegada no eixo real (locais de pólos múltiplos)

Necessário calcular $\frac{dK}{ds} = 0$

$$1 + G(s)H(s) = \frac{s^2 + Ks + K}{s^2} \Rightarrow$$ considerando apenas o denominador

$$s^2 + Ks + K = 0 \Rightarrow K(s+1) = -s^2 \Rightarrow$$

$$K = \frac{-s^2}{s+1} \Rightarrow \frac{dK}{ds} = \frac{-2s(s+1) + s^2 \times 1}{(s+1)^2} = \frac{-s^2 - 2s}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dK}{ds} = -s(s+2) = 0 \Rightarrow \text{Soluções} \begin{cases} s = 0 \\ s = -2 \end{cases}$$

A solução $s=0$ é óbvia a outra solução $s=-2$ é plausível pois espera-se que após a saída do eixo real o LR retorne ao eixo real pois as assíntotas coincidem com o eixo real.

IV -) Ângulo de partida dos pólos $s_1 = s_2 = 0$

No livro do Ogata o ângulo de partida é colocado como

$$\text{ângulo de partida} = 180^\circ - \sum \begin{matrix}\text{ângulo em}\\ \text{relação aos}\\ \text{outros pólos}\end{matrix} + \sum \begin{matrix}\text{ângulo em}\\ \text{relação aos}\\ \text{zeros}\end{matrix}$$

no entanto quando existem pólos múltiplos deve-se fazer:

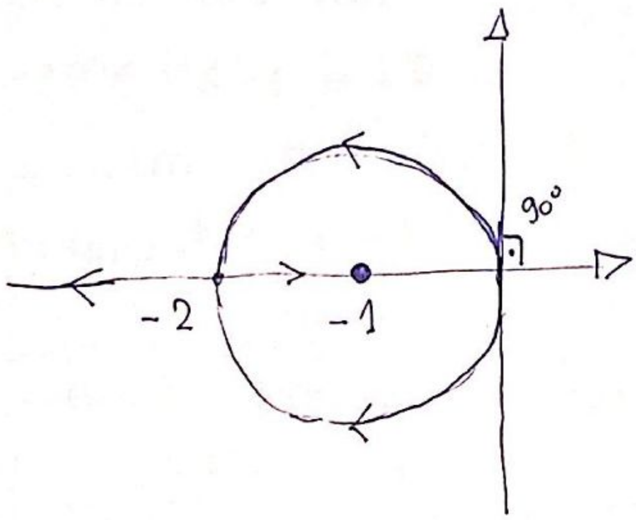
$$\text{multiplicidade} * \text{ângulo de partida} = 180^\circ - \sum \begin{matrix}\text{ângulo em}\\ \text{relação aos}\\ \text{outros pólos}\end{matrix} + \sum \begin{matrix}\text{ângulo em}\\ \text{relação aos}\\ \text{zeros}\end{matrix}$$

Dessa forma: $2 * \text{ângulo} = 180^\circ - 0 + 0 \Rightarrow$

$$\text{ângulo de partida} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Obviamente pelas informações até aqui calculadas ainda não são suficientes para desenhar o L.R com precisão.

Sabemos por conhecimento a priori que esse arranjo de pólos e zeros produz um círculo centrado no zero do sistema.



obs: em relação ao exercício anterior a colocação do zero desloca todo o L.R para esquerda tornando o sistema estável

Exercício 3

um controlador P.D. descrito como no exercício 2 pode não funcionar bem na prática devido a operação de diferenciação

usualmente a seguinte variação é utilizada

$$H(s) = K_P + \frac{K_D s}{s/p + 1}$$

acrescenta-se um filtro de 1ª ordem

fazendo-se $K = K_P + pK_D$ e $z = p \cdot K_P/K$ obtemos

$$H(s) = K \frac{(s+z)}{(s+p)}$$

fazendo $z=1$ $p=12$ obtemos:

$$G(s).H(s) = \frac{K(s+1)}{(s+12)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

e

$$1+G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{(s+12)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

I-) O L.R possui 3 partes duas começando em $s=0$ e uma começando em $s=-12$

II-) LR no eixo real

$$-12 \leq s \leq -1 \in LR$$

III-) Existem $n-m = 3-1 = 2$ assíntotas

$$\text{ângulo} = \frac{\pm 180°(2k+1)}{n-m} = \pm 90°$$

cálculo do ponto de intersecção das assíntotas

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{zeros}}{n-m} = \frac{-12-(-1)}{3-1} = \frac{-11}{2} = -5.5$$

IV) Ângulo de partida

$$2 * \Theta = 180° - \sum \underset{\text{as pólos}}{\text{âng em relação}} + \sum \underset{\text{aos zeros}}{\text{âng em relação}} \Rightarrow$$

$$\Theta = \frac{180° - 0 + 0}{2} = 90°$$

V) Cruzamento do L.R com o eixo $j\omega$

$$1 + G(s).H(s) = 1 + \frac{K(s+1)}{(s+12)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{s^2(s+12) + K(s+1)}{s^2(s+12)}$$

considerando o numerador apenas

$$s^3 + 12s^2 + Ks + K = 0$$

s^3	1	K
s^2	12	K
s^1	$\frac{12K - K}{12}$	0
s^0	K	

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 11K > 0 \\ K > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow K > 0$$

não existe a possibilidade do sistema ser instável com a variação de K logo não há cruzamento com o eixo $j\omega$

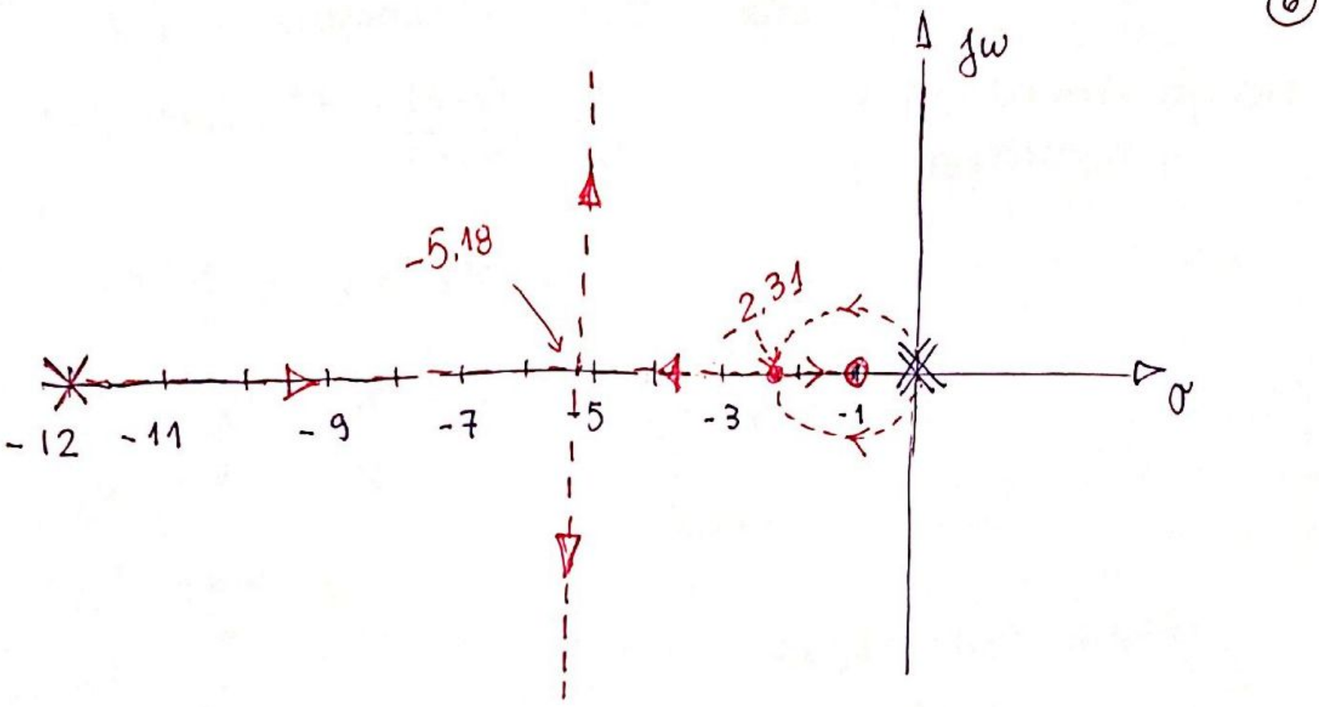
VI) Ponto de chegada ou de partida no eixo real (pólos múltiplos)

$$s^3 + 12s^2 + Ks + K = 0 \Rightarrow K(s+1) = -s^3 - 12s^2$$

$$K = \frac{-(s^3 + 12s^2)}{(s+1)} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{-2s^3 - 15s^2 - 24s}{(s+1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{-s(2s^2 + 15s + 24)}{(s+1)^2}$$

$$\text{Soluções} \begin{cases} s = 0 \\ s = -2{,}31 \\ s = -5{,}185 \end{cases}$$



obs: repare que agora $s=-1$ não é centro de um círculo

Exercício 4 $\quad G(s) = 1/s^2$

faz-se agora $p=4$ => $H(s) = K\dfrac{(s+z)}{(s+p)} = K\dfrac{(s+1)}{(s+4)}$

I) O LR possui 3 partes

II) O segmento $-4 \leq s \leq -1 \in LR$

III) Assíntotas

ângulo $= \dfrac{\pm 180°(2k+1)}{n-m} = \pm 90°$

intersecção das assíntotas

$\sigma a = \dfrac{\Sigma \text{pólos} - \Sigma \text{zeros}}{n-m} = \dfrac{-4-(-1)}{2} = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5$

IV) Ângulo de partida

$\theta = 90°$

V) Cruzamento com eixo real

$1+G(s)H(s)$ $\quad 1+\frac{K(s+1)}{(s+4)}\cdot\frac{1}{s^2}=0$ => considerando apenas o numerador

$$s^3+4s^2+Ks+K=0$$

s^3	1	K
s^2	4	K
s^1	$\frac{4K-K}{4}$	0
s^0	K	

$\frac{3K}{4}>0$

$K>0$

não existe cruzamento com eixo real

VI) Pontos de chegada ou saída do eixo real (pólos múltiplos)

$1+\frac{K(s+1)}{(s+4)}\cdot\frac{1}{s^2}=0$ numerador

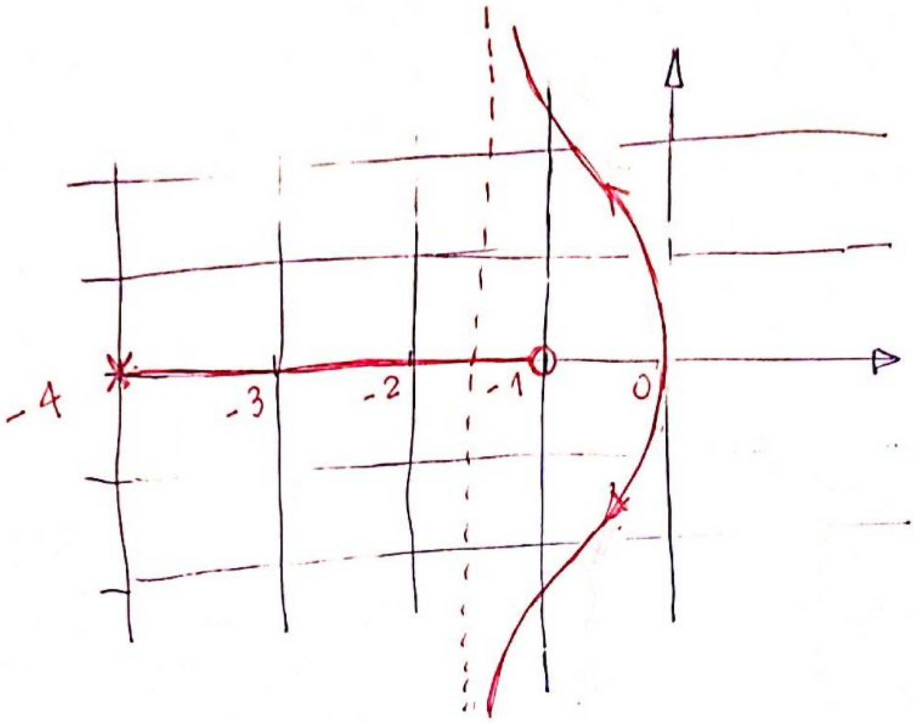
$s^3+4s^2+Ks+K=0$

$$K=-\frac{(s^3+4s^2)}{(s+1)}$$

$$\frac{dK}{ds}=-\frac{s(2s^2+7s+8)}{(s+1)^2}=0$$

Soluções $\begin{cases} s=0 \\ s=-1{,}75\pm0{,}97j \end{cases}$

A solução $s=0$ é óbvia porém os pólos complexos conjugados não são uma solução possível.


-4
-3
-2
-1
0