Um resumo das regras gerais para a construção do lugar das raízes

Newton Maruyama

Equações básicas

- Inicialmente deve-se partir da equação característica:

$$1 + G(s)H(s) = 0. \tag{1}$$

- Esta equação deve agora ser rearranjada da seguinte forma:

$$1 + K\frac{(s+z_1)(s+z_2)+\ldots+(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)+\ldots+(s+p_n)} = 0, \tag{2}$$

onde $K > 0$.

Equações básicas

- Como $G(s)H(s)$ é um número complexo, podemos escrever as seguintes equações:

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^o (2 * k + 1)(k = 0, 1, 2, \ldots) \quad (3)$$

$$|G(s)H(s)| = 1. \quad (4)$$

Passo 1: pólos e zeros de $G(s)H(s)$

- O LR começa em pólos de malha aberta e termina em zeros (zeros finitos ou infinitos[a].);
- Note que o lugar das raízes é sempre simétrico em relação ao eixo real no plano s;
- pólos complexos e zeros complexos são sempre pares conjugados.

---

[a]um sistema possui um número de zeros no infinito equivalente ao excesso de pólos, ou seja, $n - m$

Passo 1: continuação ...

- Os pontos de partida do LR são pólos em malha aberta e correspondem a $K = 0$;
- Isto pode ser observado pela condição do módulo, $|G(s)H(s)| = 1$ fazendo o valor de K tender a zero:

$$\lim_{K \to 0} \left| \frac{(s+z_1)(s+z_2)+\ldots+(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)+\ldots+(s+p_n)} \right| = \lim_{K \to 0} \frac{1}{K} = \infty. \quad (5)$$

Passo 1: continuação ...

- Quando K aumenta para infinito, cada lugar das raízes deve-se aproximar de um zero da função de transferência em malha aberta finito ou infinito no plano s.
- Isto pode ser concluído através da observação da seguinte equação:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(s+z_1)(s+z_2)+\ldots+(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)+\ldots+(s+p_n)} \right| = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} = 0. \quad (6)$$

Passo 1: continuação ...

- O LR terá tantos pedaços quanto forem o número de raízes da equação característica.
- Se o número de raízes em malha aberta é igual ao número de raízes em malha fechada (eventualmente em malha fechada pólos e zeros podem se cancelar) o número de pedaços terminando em zeros finitos é igual ao número m de zeros em malha aberta.
- Os $n - m$ pedaços restantes terminam no infinito, tangenciando as assíntotas.

Passo 2: LR no eixo real

- O lugar das raízes no eixo real é determinado através dos pólos e zeros em malha aberta que estão sobre o mesmo.
- Os pólos e zeros complexos conjugados de malha aberta não tem influência sobre o lugar das raízes no eixo real porque a contribuição à condição do ângulo de pólos e zeros complexos conjugados é de 360^o.

Passo 2: continuação ...

- Cada porção do lugar das raízes no eixo real, se estende de um pólo ou zero em malha aberta para outro pólo ou zero em malha aberta.
- Ao se escolher um ponto de teste s no eixo real, se o número de pólos e zeros reais à direita do ponto de teste for ímpar então este ponto faz parte do lugar das raízes.

Passo3: assíntotas do LR

- Se o ponto de teste está localizado longe da origem então o ângulo de cada pólo complexo pode ser considerado o mesmo;
- As assíntotas podem ser calculadas através da seguinte equação:

$$\text{ângulo das assíntotas} = \frac{\pm 180^o (2k+1)}{n-m} \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Onde:

- $n =$ número de pólos finitos de $G(s)H(s)$,
- $m =$ número de zeros finitos de $G(s)H(s)$.

Passo 3: continuação ...

- O ponto de intersecção das assíntotas σ_a pode ser calculado como a seguir. Considerando a equação característica do sistema em malha fechada:

$$1 + G(s)H(s) = 0. \tag{8}$$

Que pode ser escrito também como:

$$1 + K\frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0} = 0, \tag{9}$$

Passo 3: continuação ...

- para valores grandes de s podemos considerar apenas os termos de maior ordem. Dessa forma podemos escrever:

$$1 + K\frac{s^m}{s^n} = 0. \tag{10}$$

Desta aproximação resultam $n - m$ assíntotas com início em $s = 0$.

Passo 3: continuação ...

- Uma aproximação mais razoável é considerar que as assíntotas cruzam o eixo real num ponto denominado σ_a:

$$1 + K\frac{1}{(s-\sigma_a)^{n-m}} = 0. \tag{11}$$

Expandindo o denominador e tomando os dois termos de maior grau resulta em:

$$1 + K\frac{1}{s^{n-m} + (n-m)\sigma_a^{n-m-1}} = 0. \tag{12}$$

Passo 3: continuação ...

- Voltando à Equação 9, dividindo o denominador pelo numerador obtemos:

$$1 + K\frac{1}{\frac{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0}{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_0}} = 0, \tag{13}$$

A divisão dos polinômios:

$$\frac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}, \tag{14}$$

Passo 3: continuação ...

- considerando os dois primeiros termos do numerador e denominador é dada por:

$$\frac{s^n + a_{n-1}s^{n-1}}{s^m + b_{m-1}s^{m-1}} = s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} + \frac{(a_{m-1} - b_{m-1})b_{m-1}s^{n-1}}{s^m + b_{m-1}s^{m-1}}. \quad (15)$$

Passo 3: continuação ...

- Desprezando a parte correspondente ao resto da divisão, a equação característica pode então ser escrita como:

$$1 + K\frac{1}{s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1}} = 0. \qquad (16)$$

Passo 3: continuação ...

- Comparando as Equações 12 e 16 obtemos:

$$a_{n-1} - b_{m-1} = (n-m)\sigma_a, \tag{17}$$

então:

$$\sigma_a = \frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n-m}. \tag{18}$$

Onde:

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= \sum \text{pólos em malha aberta}, \\ b_{m-1} &= \sum \text{zeros em malha aberta}. \end{aligned} \tag{19}$$

Passo 4: ponto de partida e chegada no eixo real

- Se o LR se encontra entre duas raízes de malha aberta no eixo real então existe pelo menos um ponto de partida entre os dois pólos;
- Se lugar das raízes se encontra entre dois zeros de malha aberta (um dos zeros pode estar em $-\infty$) então sempre existirá pelo menos um ponto de chegada entre os dois zeros;
- Se o lugar das raízes se encontra entre um pólo de malha aberta e um zero (finito ou infinito) no eixo real, então pode não existir um ponto de chegada ou partida, ou podem existir ambos.

Passo 4: continuação ...

- Inicialmente escrevemos a equação característica da seguinte forma:

$$f(s) = B(s) + KA(s) = 0, \tag{20}$$

onde $A(s)$ e $B(s)$ não contêm K. Devemos notar que $F(s)$ tem múltiplas raízes onde:

$$\frac{df(s)}{ds} = 0. \tag{21}$$

Passo 4: continuação ...

- Isto pode ser comprovado observando a seguinte equação característica onde s_1 é uma raiz com multiplicidade r. Então $f(s)$ pode ser escrito como:

$$f(s) = (s - s_1)^r (s - s_2) \ldots (s - s_n). \qquad (22)$$

- Se esta equação for diferenciada com respeito a s e calculada no ponto s_1, então:

$$\left. \frac{df(s)}{ds} \right|_{s=s_1} = 0. \qquad (23)$$

Isto significa que os pólos múltiplos satisfazem a Equação 23.

Passo 4: continuação ...

- Vamos agora diferenciar a Equação 20,

$$\frac{df(s)}{ds} = B'(s) + KA'(s) = 0, \tag{24}$$

onde:

$$A'(s) = \frac{dA(s)}{ds}, \tag{25}$$

e

$$B'(s) = \frac{dB(s)}{ds}. \tag{26}$$

Passo 4: continuação ...

- O valor particular K que possui raízes múltiplas é obtido através da Equação 24 como:

$$K = -\frac{B'(s)}{A'(s)}. \tag{27}$$

Substituindo o valor de K dado pela Equação 27 na Equação 20 obtemos:

$$f(s) = B(s) - \frac{B'(s)}{A'(s)}A(s) = 0, \tag{28}$$

ou

Passo 4: continuação ...

- $$B(s)A'(s) - B'(s)A(s) = 0. \tag{29}$$

  Se esta equação for resolvida para s a raiz múltipla pode ser encontrada.
- Por outro lado, da Equação 20 obtemos:

$$K = -\frac{B(s)}{A(s)}, \tag{30}$$

Passo 4: continuação ...

- Calculando a derivada obtemos:

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)}. \tag{31}$$

- Se para esta equação for imposto que $dK/ds = 0$ então obtemos a mesma equação que a Equação 29.

Passo 4: continuação ...

- Desta forma os pontos de chegada ou partida podem ser determinados através da equação:

$$\frac{dK}{ds} = -\left(B'(s)A(s) - B(s)A'(s)\right) = 0. \tag{32}$$

- Deve-se notar que nem todas as raízes que satisfazem esta equação são pontos de partida ou de chegada.

Passo 5: ângulo de partida ou chegada

- O ângulo de partida sempre se refere a um pólo complexo e um ângulo de chegada sempre se refere a um zero complexo de malha aberta.
- Para se determinar o ângulo de partida ou chegada, deve-se fazer a suposição que para um teste nas vizinhanças de um pólo (ou zero) a soma das contribuições angulares dos outros pólos e zeros pode ser considerada constante.

Passo 5: continuação ...

- Desta forma, o ângulo de partida e chegada podem ser calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\text{Ângulo de partida de um pólo complexo} = 180^o \\
&\; - \text{soma dos ângulos dos outros pólos em relação} \\
&\quad \text{ao pólo em questão} \\
&\; + \text{soma dos ângulos dos zeros em relação} \\
&\quad \text{ao pólo em questão.}
\end{aligned} \tag{33}$$

e

Passo 5: continuação ...

-

$$\begin{aligned}&\text{Ângulo de chegada em um zero complexo} = 180^o\\&\ -\text{ soma dos ângulos dos outros zeros em relação}\\&\quad\text{ao zero em questão}\\&\ +\text{ soma dos ângulos dos pólos em relação}\\&\quad\text{ao zero em questão.}\end{aligned} \tag{34}$$

Passo 6: cruzamento com o eixo $j\omega$

- Os pontos onde o lugar das raízes cruza o eixo imaginário pode ser determinado através do critério de estabilidade de Routh-Hurwitz;
- O ponto onde o lugar das raízes cruza o eixo imaginário corresponde a um valor de K tal que torna o sistema instável.

Passo 6: continuação ...

- Deve-se utilizar a Tabulação de Routh e determinar o valor limite de K que faz com que o primeira coluna esteja no limite de uma troca de sinal, ou seja, impor que o elemento da primeira coluna que esteja em função de K seja nulo.
- Calculado o valor de K, facilmente determina-se os pontos do lugar das raízes que cruzam o eixo imaginário, em geral utilizando a equação auxiliar na linha correspondente ao termo s^2 na Tabulação de Routh.

Passo 7: determinar o LR em torno da origem

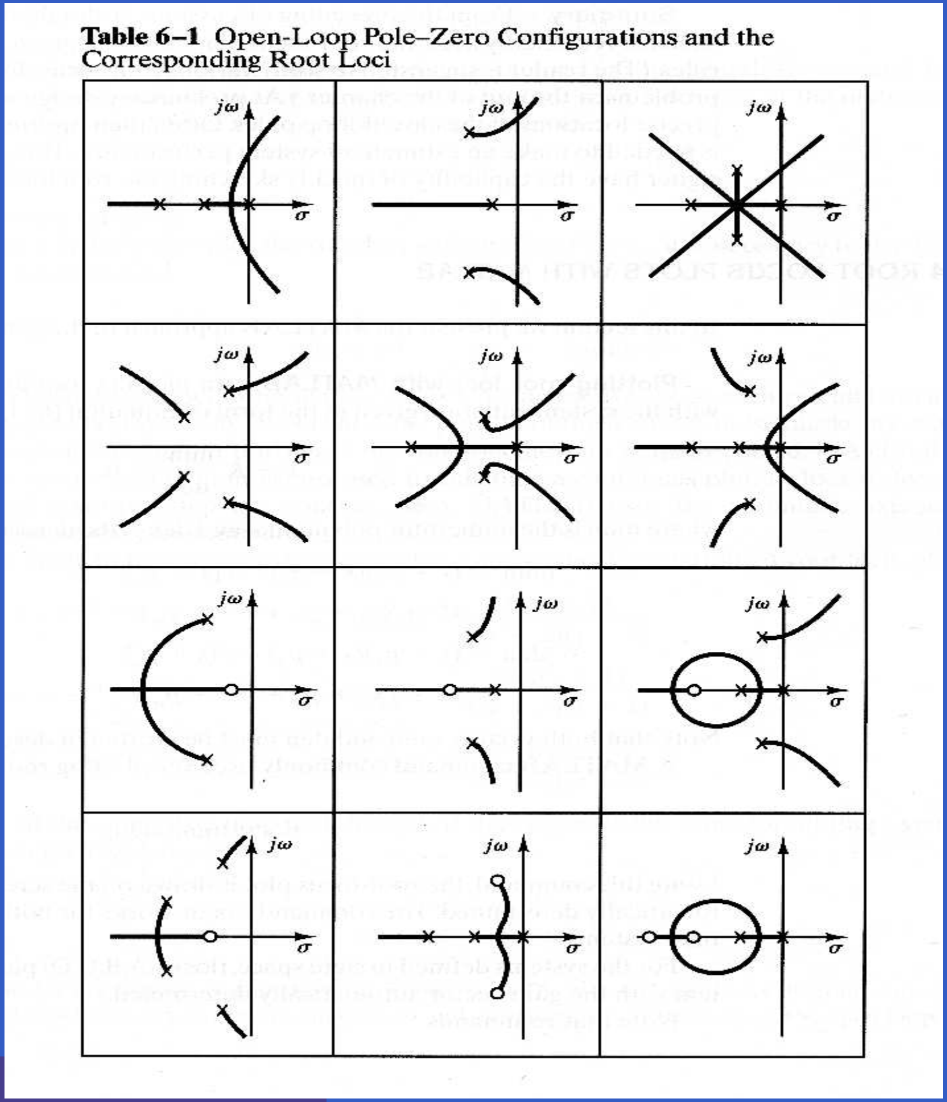
- Aqui, deve-se realizar um trabalho *braçal*, determinado-se o lugar das raízes utilizando vários pontos de teste e a informação acumalada nos ítens anteriores.

Passo 8: Escolher pólos e calcular K

- Obviamente, qualquer ponto do lugar das raízes deve sastisfazer a condição de módulo;
- Desta forma, se for conhecida a localização de um pólo em malha fechada o ganho K pode ser calculado através da seguinte equação:

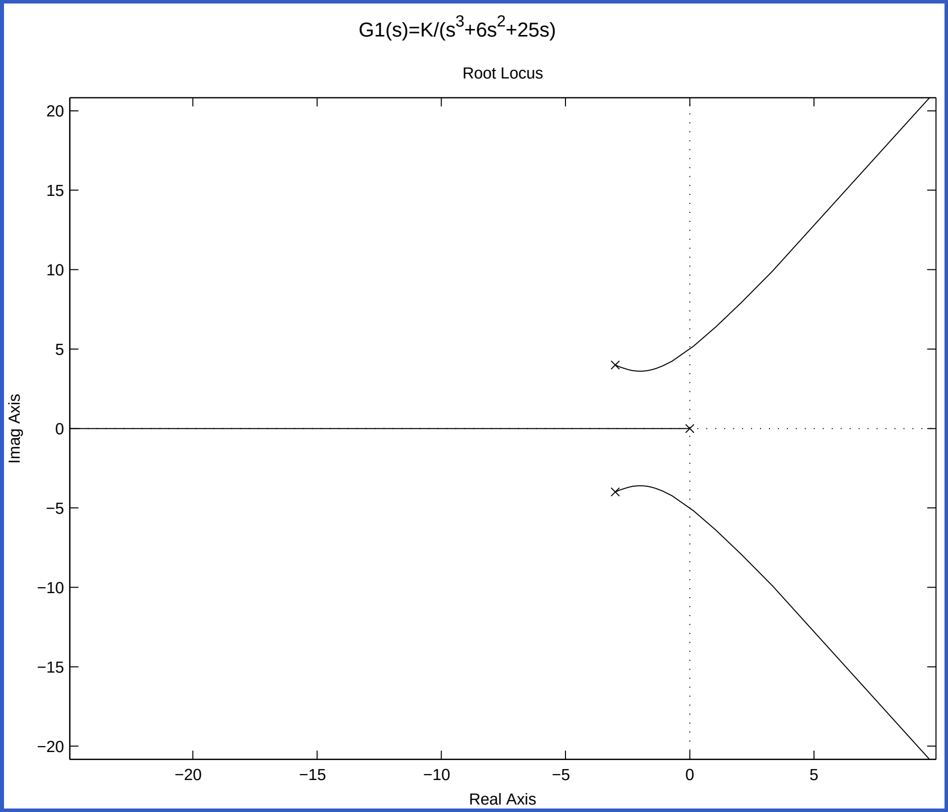
$$K = \frac{\prod_{i=1}^{n} |s_c - s_i|}{\prod_{k=1}^{m} |s_c - z_k|} \tag{35}$$

Tabela com arranjos típicos de LR



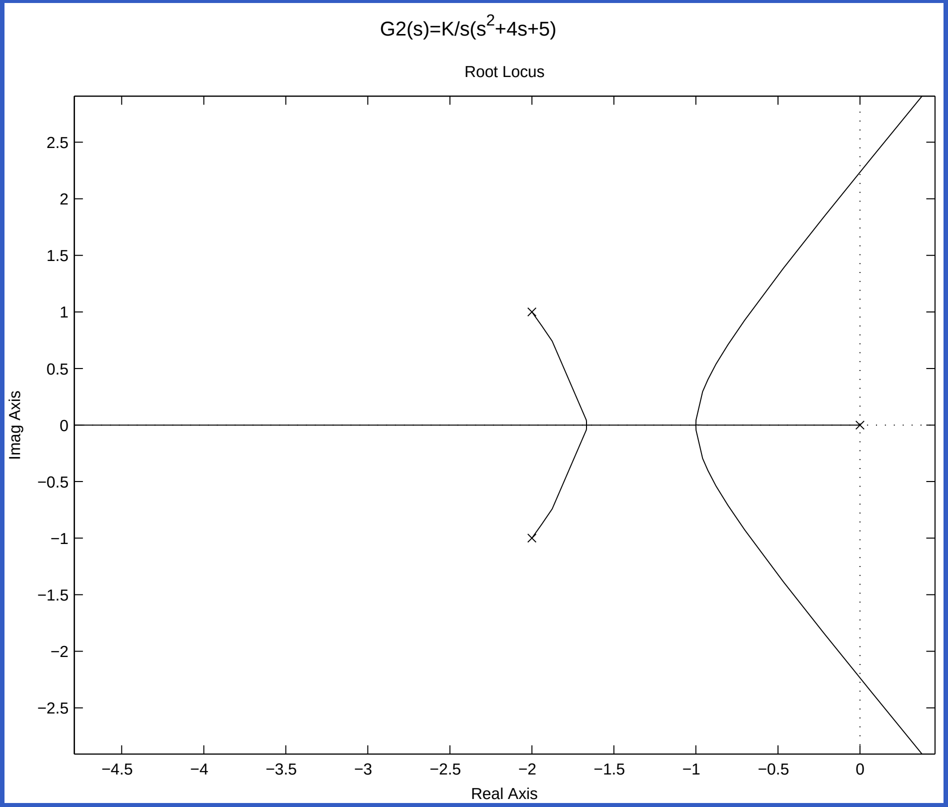
Exemplo 1

$$G(S)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + 6s + 25)} \quad (36)$$



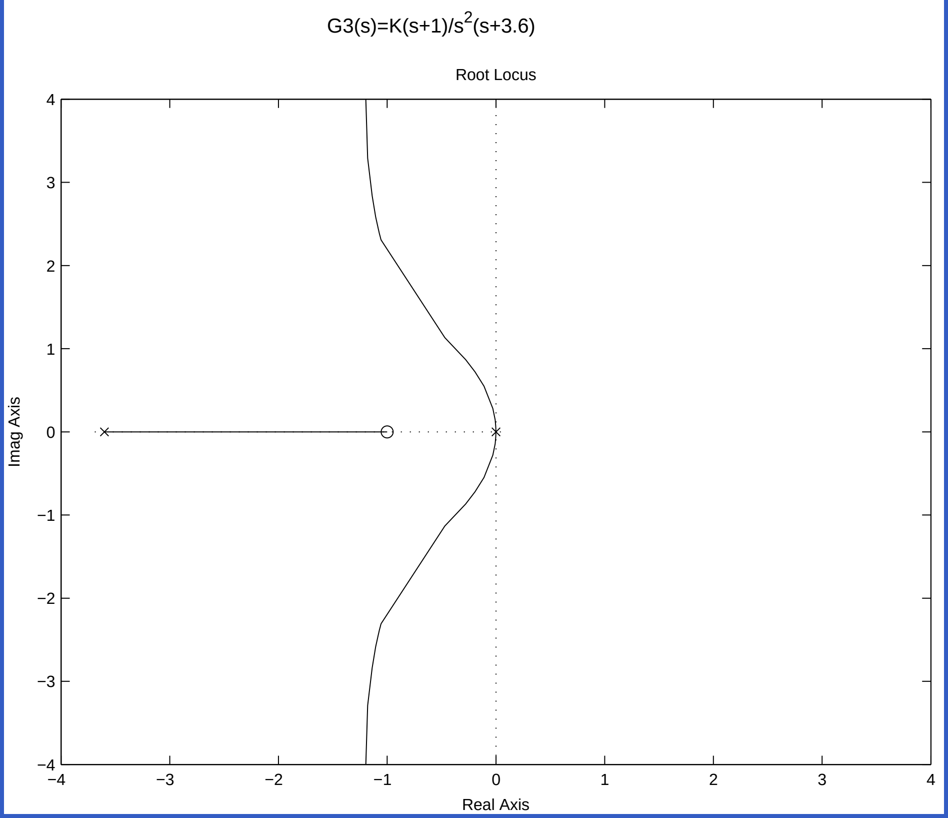
Exemplo 2

$$G(S)H(s) = \frac{K}{s(s^2 + 4s + 5)} \qquad (37)$$



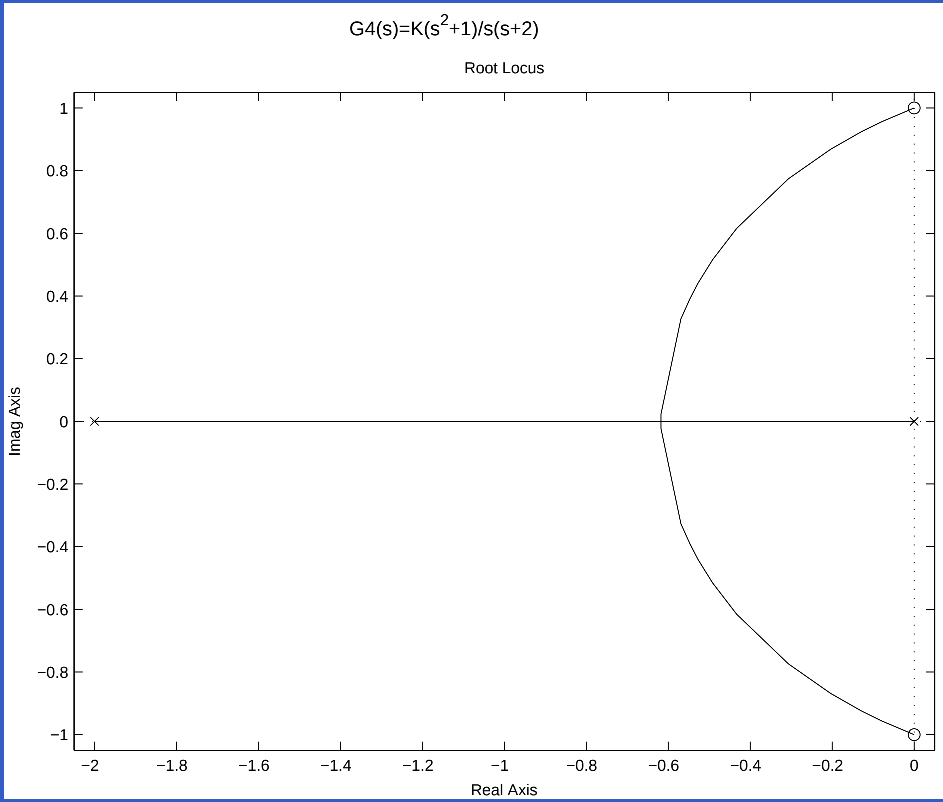
Exemplo 3

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+3.6)} \tag{38}$$



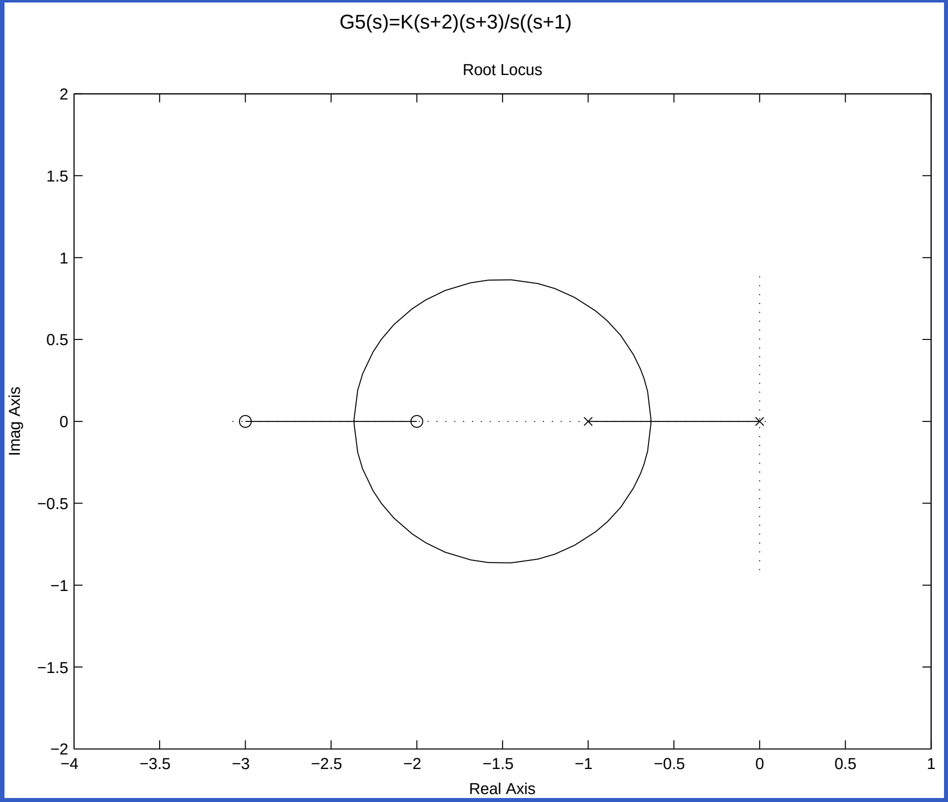
Exemplo 4

$$G(S)H(s) = \frac{K(s^2+1)}{s(s+2)} \tag{39}$$



Exemplo 5

$$G(S)H(s) = \frac{K(s+2)(s+3)}{s(s+1)} \tag{40}$$



Adição de pólos

- A adição de um pólo na função de transferência em malha aberta tem o efeito de deslocar o lugar das raízes para a direita, diminuindo a estabilidade relativa e aumentando o tempo de acomodação do sistema.
- Lembre-se que a adiçao de um controle integral adiciona um pólo na origem tornando o sistema menos estável. A Figura 1 ilustra o efeito da adição de um pólo para um sistema originalmente com um único pólo, e também o efeito da adição de dois pólos.

Adição de pólos

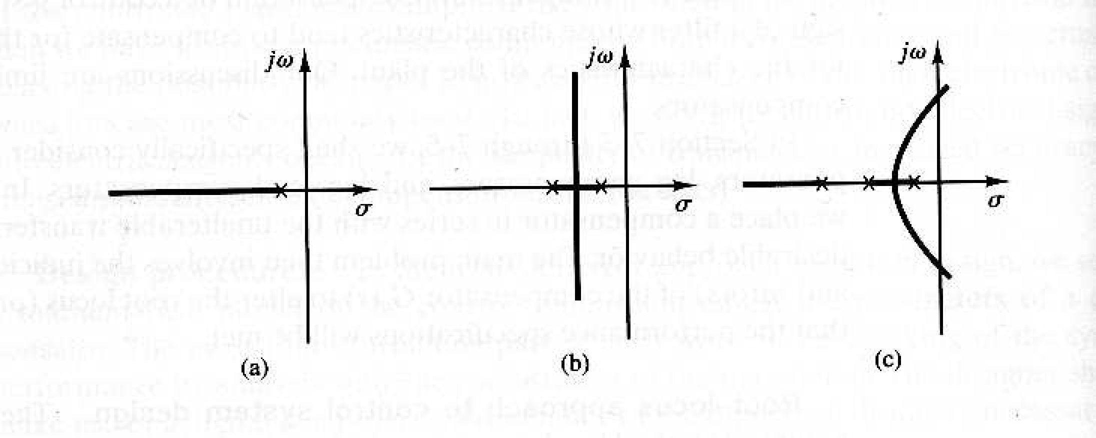


Figura 1: (a) Lugar das raízes para um sistema com um único pólo. (b) Lugar das raízes para um sistema com dois pólos. (c) Lugar das raízes para um sistema com três pólos.

Adição de zeros

- A adição de um zero na função de transferência de malha aberta tem o efeito de deslocar o lugar das raízes para a esquerda, aumentando a estabilidade relativa e diminuindo o tempo de acomodação do sistema;
- Fisicamente, a adição de um zero corresponde a introdução de uma ação de controle derivativa. O efeito desta ação de controle proporciona uma ação antecipatória no sistema além de uma resposta transitória rápida.

Adição de zeros

- A Figura ??-(a) ilustra um sistema que é estável para ganhos pequenos e instável para ganhos grandes;
- As Figuras ??-(b), (c) e (d) mostram o gráfico de lugar das raízes quando um zero é adicionado à função de transferência de malha aberta;
- Note que quando um zero é adicionado ao sistema da Figura ??-(a) o sistema se torna estável para qualquer valor de ganho.

Adição de zeros