

Instituto de Física da USP

LABORATÓRIO DE FÍSICA B (4323202)

E2 – Circuito RC

1. Introdução

Será examinado um circuito simples consistindo em um resistor e um capacitor em série. Aplicando uma voltagem de onda quadrada ao circuito, a constante de tempo que caracteriza o decaimento da voltagem no capacitor pode ser determinada usando um osciloscópio e comparada com o valor esperado. Por outro lado, aplicando uma voltagem com forma de onda senoidal ao circuito e variando sua frequência, pode ser determinada também essa constante de tempo de outra maneira independente. Para analisar o circuito, serão usadas algumas fórmulas derivadas das leis de Ohm e de Kirchhoff, e a idéia de impedância complexa. A apostilha detalha estes conceitos.

2. Capacitor

Capacitores são um dos componentes de circuitos usados comumente em dispositivos eletrônicos modernos, tais como computadores, calculadoras e telefones celulares. Quando dois condutores elétricos estão pertos, forma-se o capacitor. Se ambos os lados de um capacitor estiverem conectados através uma bateria de voltagem V_0 e depois desconectados da bateria, cada lado do capacitor carregará uma carga (um lado com a carga $+Q_0$ e o outro com $-Q_0$):

$$Q_0 = CV_0, \quad (2.1)$$

onde C é a capacitância do capacitor.

Se os dois lados deste capacitor carregado estiverem conectados por um fio condutor, haverá uma descarga do capacitor, passando pelo fio uma corrente com uma grande amplitude, por um período de tempo muito curto. Se for usada uma resistência R ao invés de um fio condutor para conectar ambos os lados do capacitor carregado, o capacitor descarregará mais devagar. A carga e a voltagem no capacitor diminuem exponencialmente em função do tempo com uma constante de tempo, $\tau = RC$.

3. Descarga de capacitor carregado no circuito RC

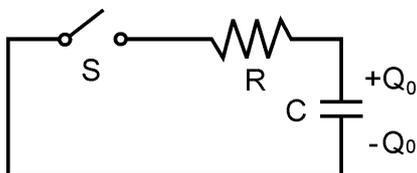


Figura 1. Circuito RC.

Considere um circuito RC em série mostrado na Figura 1. O capacitor já está carregado totalmente. Ao fechar a chave S, uma corrente I flui através do resistor enquanto o capacitor descarrega. Segundo as leis de Ohm e de Kirchhoff:

$$V_R + V_C = IR + q/C = 0, \quad (3.1)$$

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (3.2)$$

onde V_R e V_C são as voltagens no resistor e no capacitor, respectivamente; I é a corrente e q é a carga elétrica armazenada no capacitor. Substituindo a equação (3.2) na equação (3.1):

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} = -\frac{q}{\tau}. \quad (3.3)$$

Note que $\tau = RC$ possui a unidade de tempo.

Com a condição inicial, isto é, $q = Q_0$ a $t = 0$, a solução da equação diferencial acima é:

$$q = Q_0 \exp(-t/\tau). \quad (3.4)$$

Portanto, a voltagem V_C é dada por:

$$V_C = \frac{q}{C} = \frac{Q_0}{C} \exp(-t/\tau) = V_0 \exp(-t/\tau). \quad (3.5)$$

E o logaritmo natural de ambos os lados da equação é:

$$\ln(V_C) = \ln(V_0) + (-1/\tau) \cdot t. \quad (3.6)$$

Conforme a equação acima pode ser determinado o valor de τ através da inclinação da reta ajustada no gráfico de $\ln(V_C)$ em função do tempo t .

4. Impedância no circuito AC

Considere uma voltagem senoidal, $V = V_m \cos(\omega t)$, onde V_m é a amplitude de voltagem e ω é a frequência angular. Se esta voltagem é aplicada a um circuito, a corrente que passa pelo circuito é dada de forma, $I = I_m \cos(\omega t - \phi)$, onde I_m e ϕ são a amplitude de corrente e a fase (ou o ângulo de fase), respectivamente. A fase ϕ indica a relação de fase entre a voltagem e a corrente, e a amplitude I_m e a fase ϕ são determinadas pela voltagem e pela natureza do circuito. As relações mencionadas acima podem ser combinadas convenientemente com as partes reais das seguintes quantidades complexas:

$$\widehat{V} = V_m \exp(j\omega t), \quad \widehat{I} = I_m \exp[j(\omega t - \phi)], \quad (4.1)$$

onde a notação de chapéu representa a quantidade complexa e j é a unidade complexa.

A impedância, \widehat{Z} , é definida com a razão da voltagem complexa em relação à corrente complexa:

$$\widehat{Z} = \frac{\widehat{V}}{\widehat{I}} = \frac{V_m}{I_m} \exp(j\phi). \quad (4.2)$$

Tanto a voltagem quanto a corrente complexas obedecem à relação linear que é uma generalização da lei de Ohm. A parte real da impedância é chamada a resistência e a parte imaginária, a reatância.

4.1 Resistor

A corrente em um resistor é dada pela lei de Ohm e a impedância dele, \hat{Z}_R , é exatamente igual à resistência, isto é:

$$\underline{\hat{Z}_R} = R. \quad (4.3)$$

\hat{Z}_R é um número real e a corrente que passa pelo resistor está em fase com a voltagem aplicada.

4.2. Capacitor

Para capacitor,

$$V_C = q/C, \quad dV_C/dt = I/C. \quad (4.4)$$

Substituindo a voltagem e a corrente complexas:

$$j\omega\hat{V}_C = \hat{I}/C, \quad \hat{V}_C = \hat{I}/(j\omega C). \quad (4.5)$$

Portanto, a impedância de um capacitor é dada por:

$$\underline{\hat{Z}_C} = 1/(j\omega C). \quad (4.6)$$

Esta impedância é um número imaginário e dependente da frequência. Note que quanto maior a frequência, menor a impedância do capacitor.

4.3 Indutor

Para um indutor,

$$V_L = L(di/dt). \quad (4.7)$$

Substituindo a voltagem e a corrente complexas:

$$\hat{V}_L = (j\omega L)\hat{I}. \quad (4.8)$$

Portanto, a impedância de um indutor é dada por:

$$\underline{\hat{Z}_L} = j\omega L. \quad (4.9)$$

Lembre-se que quanto maior a frequência, maior a impedância do indutor.

5. Circuito RC no domínio de frequência

Na seção 3 foi examinada somente a descarga do capacitor carregado no circuito RC. Agora considere o circuito RC conectado a um gerador de áudio com uma voltagem de onda senoidal. Usando a lei de Kirchhoff:

$$\widehat{V}_G + \widehat{V}_R + \widehat{V}_C = 0, \quad (5.1)$$

onde \widehat{V}_G , \widehat{V}_R e \widehat{V}_C são, respectivamente, as voltagens na saída do gerador, no resistor e no capacitor. A corrente \widehat{I} é a mesma para todos os componentes. A voltagem sobre o resistor (ou capacitor) é dada pelo produto da corrente e a impedância do resistor (ou capacitor). Substituindo essas voltagens na equação (5.1):

$$\begin{aligned} \widehat{V}_G - \widehat{I}(\widehat{Z}_R + \widehat{Z}_C) &= 0, \\ \widehat{V}_G &= \widehat{I}(\widehat{Z}_R + \widehat{Z}_C). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Portanto, a corrente é dada por:

$$\widehat{I} = \frac{\widehat{V}_G}{\widehat{Z}_R + \widehat{Z}_C} = \frac{\widehat{V}_G}{R + \frac{1}{j\omega C}}. \quad (5.3)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \widehat{V}_C &= \widehat{I} \left(\frac{1}{j\omega C} \right) = \frac{\widehat{V}_G}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{\widehat{V}_G}{1 + j\omega RC} = \frac{\widehat{V}_G}{1 + j\omega\tau}, \\ \frac{\widehat{V}_C}{\widehat{V}_G} &= \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \exp(j\Delta\phi), \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde a diferença de fase de \widehat{V}_C em relação a \widehat{V}_G , $\Delta\phi$, é dada por $\Delta\phi = -\arctan(\omega\tau)$. Portanto, \widehat{V}_C está sempre atrasada em relação a \widehat{V}_G . O atraso de tempo, Δt , é dado por $\Delta\phi = \omega\Delta t$ em radianos a partir da relação: $T/\Delta t = 2\pi/\Delta\phi$, onde T é o período de oscilação.

A razão da amplitude de V_C relativa à de V_G é dada por:

$$\left| \widehat{V}_C / \widehat{V}_G \right| = \left| \widehat{V}_C \right| / \left| \widehat{V}_G \right| = V_C / V_G = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}. \quad (5.5)$$

Esta razão é chamada de ganho e pode ser expressa em “decibel (dB)” definida por $20\log(V_C/V_G)$ na engenharia.

O circuito acima funciona como um filtro passa-baixa. Quando $\omega\tau = 1$, a frequência correspondente é chamada frequência de corte f_c , dada por $f_c = 1/(2\pi CR)$. Um filtro passa-baixa deixa passar apenas os sinais que possuem frequências menores do que f_c . A partir de f_c o ganho do circuito diminui com uma atenuação de 20 dB/década.

Apêndice:

Tabela 1. Código de cores dos resistores.

Cor	1a faixa	2a faixa	3a faixa Multiplicador	4a faixa Tolerância
Preto	–	0	$\times 10^0$	–
Marrom	1	1	$\times 10^1$	1%
Vermelho	2	2	$\times 10^2$	2%
Laranja	3	3	$\times 10^3$	–
Amarelo	4	4	$\times 10^4$	–
Verde	5	5	$\times 10^5$	–
Azul	6	6	$\times 10^6$	–
Violeta	7	7	–	–
Cinza	8	8	–	–
Branco	9	9	–	–
Ouro	–	–	–	5%
Prata	–	–	–	10%