PSI-3260 Aplicações de Álgebra Linear

Experiência 7

Autovalores e Autovetores 2 – Parte Computacional

1 Análise do crescimento de população de borboletas

Na primeira experiência sobre decomposição de uma matriz em autovalores e autovetores, comentamos que essa decomposição possibilita a análise de diversos sistemas práticos. Especificamente, vimos que a partir da equação diferencial que descreve um circuito elétrico podemos chegar a sua representação de estados. A atualização dos estados sofre o efeito não só da entrada aplicada ao circuito, mas também da matriz de estados $\mathbf{A}$, cujos elementos contêm informações dos parâmetros do circuito, como resistências, capacitâncias, indutâncias, transresistências, trasncondutâncias e ganhos de tensão e/ou corrente. Os autovalores e autovetores dessa matriz ajudam a prever o comportamento do circuito elétrico.

Na parte preparatória deste segunda experiência, vimos que os conceitos de autovalores e autovetores também desempenham um papel importante na solução de equação diferenças. Na parte de aplicação, vamos usar esses conceitos para analisar o crescimento da população da subfamília Miletinae de borboletas. Essas borboletas são agentes de polinização e as suas lagartas se alimentam de insetos nefastos às plantas. Cabe notar que graças à polinização das borboletas, entre outros insetos, as plantas espermatófitas possuem uma grande variedade de formas, tamanhos cores e texturas. A seguir, descrevemos brevemente o ciclo reprodutivo das borboletas e posteriormente vamos analisar a evolução da sua população em diversas faixas etárias. O modelo empregado aqui é o mesmo usado pelos demógrafos para descrever o comportamento aproximado da população do sexo feminino de certas espécies. Devido à forma da matriz de transição de estados da equação de diferenças, ele é chamado de modelo de Leslie.

1.1 O cenário da aplicação

A polinização das plantas geralmente ocorre quando células reprodutivas masculinas (grãos de pólen) de uma flor são transferidas ao receptor feminino de outra flor da mesma espécie, ou, em alguns casos para o seu próprio receptor. Essa transferência pode ser feita através de fatores ambientais ou com auxílio de seres vivos. Nas plantas espermatófitas[1], as abelhas, borboletas, mariposas, aves e mamíferos colaboram nessa transferência. Dentre os diversos

[1]Espermatófitas são plantas cujas sementes são protegidas por uma estrutura denominada fruto (angiospermas).

agentes polinizadores dessas plantas, as borboletas merecem destaque. Cabe observar que as plantas também podem desempenhar um papel importante no ciclo reprodutivo das borboletas. Esse ciclo é descrito em quatro fases: ovo, larva, pupa e estagio adulto, marcadas por mudanças radicais. O percentual de larvas que chegam à fase de borboletas adultas depende do sucesso de cada fase. A seguir, descrevemos brevemente essas quatro fases:

- **Ovo:** após o acasalamento, a borboleta fêmea deposita os ovos em folhas de plantas, ou dependendo da espécie, simplesmente deixa cair durante o vôo.
- **Larva:** ao sair do ovo, o embrião se transforma em lagarta. Nessa etapa a função do inseto (lagarta) é comer para crescer e acumular energias para as etapas posteriores. Durante o crescimento ela muda várias vezes de pele e produz fios de seda ou semelhantes. Apesar de ainda não ser o casulo, esses fios servem de abrigo contra os predadores.
- **Pupa:** ao atingir maturidade a lagarta suspende a alimentação e busca um local adequado para se transformar em pupa. Nesse estágio, ela se fixa a uma superfície e usa os fios de seda para construir o verdadeiro casulo. No interior do casulo há uma profunda metamorfose na formação definitiva do inseto adulto. A lagarta fica em estado de total repouso por um período que vai de uma semana a um mês, dependendo da espécie, e os tecidos do seu corpo vão se modificando.
- **Estágio adulto:** quando a metamorfose termina, o casulo se fende e a borboleta emerge. A mobilidade que o voo dá ao inseto é importante para dispersar a espécie para outras áreas e principalmente para que fêmeas e machos se encontrem. Assim como na fase de larva o mais importante é a alimentação, e na de pupa é a transformação, a principal atividade na fase adulta é a reprodução.

O estudo da evolução da população de borboletas de uma determinada espécie é importante em Ecologia para entender, por exemplo, porque algumas espécies de plantas deixam de existir ou aumentam muito em uma dada região. De modo geral os insetos polinizadores possuem um papel de destaque na agricultura. Culturas bem sucedidas, em estufas, por exemplo, que competem no mercado mundial, resultam do uso de polinizadores. Os países desenvolvidos enfrentam a falta de polinizadores e procuram alternativas. Se eles não estiverem disponíveis nas proximidades, na natureza, devido aos padrões agrícolas intensivos que utilizam grandes áreas, eles são comprados de companhias de biotecnologia. O objetivo da investigação sobre o crescimento da população de insetos polinizadores é perceber onde eles estão e fornecer subsídios para potencializar o seu crescimento.

2 O modelo de Leslie

O modelo de Leslie é uma forma conhecida dos demógrafos para descrever aproximadamente o comportamento de população do sexo feminino de certas espécies. Esse modelo é descrito usando a seguinte equação de diferenças de primeira ordem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ \vdots \\ x_K(n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(n)} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{K-1} & a_K \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{K-1} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(n-1) \\ x_2(n-1) \\ x_3(n-1) \\ \vdots \\ x_K(n-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(n-1)}. \tag{1}$$

Nessa equação, K representa o número de faixas etárias. Supondo que a duração total da população seja de T unidades de tempo e que essa população possa ser representada em K faixas etárias, então, o intervalo de tempo de cada faixa etária é de T/K unidades de tempo. Assim, $\mathbf{x}(n)$ e $\mathbf{x}(n-1)$ representam o vetor de distribuição etária nos tempos n e $n-1$ respectivamente. Genericamente, a variável n pode representar por exemplo, décadas, meses ou dias. Os coeficientes $a_i \geq 0$ representam o número médio de filhas nascidas por fêmea durante o tempo que ela está na i-ésima faixa etária. Os coeficientes $0 < b_i \leq 1$ representam a fração de fêmeas na i-ésima faixa etária que se espera que vá sobreviver e passar para a $(i+1)$-ésima faixa etária.

Portanto, conhecendo a matriz de Leslie $\mathbf{L}$ de uma dada população e o vetor de distribuição de faixa etária inicial

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ \vdots \\ x_K(0) \end{bmatrix},$$

a distribuição etária das fêmeas em tempos sucessivos pode ser obtida a partir da Equação (1). Além disso, a distribuição etária da população em qualquer instante n pode ser obtida como

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{L}^n \mathbf{x}(0). \tag{2}$$

Porém, para obter uma previsão da dinâmica do processo de crescimento da população precisamos investigar os autovalores e autovetores da matriz de Leslie.

O polinômio característico de uma matriz $\mathbf{L}$ arbitrária é $p(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{L}|$. No caso em que $\lambda \neq 0$, podemos escrever

$$p(\lambda) = \lambda^K \left(1 - q(\lambda)\right), \tag{3}$$

em que

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} + \cdots + \frac{a_K b_1 b_2 \cdots b_{K-1}}{\lambda^K}.$$

Caber observar que:

- como todos os a_i e b_i são não negativos, $q(\lambda)$ é monotonamente decrescente para $\lambda > 0$;
- $q(\lambda)$ tem uma assíntota vertical em $\lambda = 0$; e
- $q(\lambda) \to 0$ quando $\lambda \to \infty$.

Assim, existe um único valor de $\lambda > 0$, denotado como λ_1 em que $q(\lambda_1) = 1$. Portanto, a matriz de Leslie possui um único autovalor positivo e com multiplicidade um.

A partir da forma particular da matriz $\mathbf{L}$, é possível verificar que o autovetor associado ao autovalor λ_1 é

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ b_1/\lambda_1 \\ b_1 b_2/\lambda_1^2 \\ \vdots \\ b_1 b_2 b_{K-1}/\lambda_1^{K-1} \end{bmatrix}$$

Como λ_1 possui multiplicidade um, o auto-espaço correspondente possui dimensão um e, portanto, qualquer autovetor associado a λ_1 é algum múltiplo de $\mathbf{v}_1$.

2.1 O modelo de Leslie aplicado a população de borboletas

Sabe-se que em uma determinada população de borboletas:

- a quantidade de larvas $L(n)$ representa a_3 das borboletas adultas $B(n-1)$,
- a quantidade de pupas $P(n)$ representa b_1 das larvas $L(n-1)$, e
- a quantidade de borboletas adultas $B(n)$ representa b_2 das pupas $P(n-1)$.

A relação entre as fases pode ser escrita em notação matricial como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} L(n) \\ P(n) \\ B(n) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(n)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} L(n-1) \\ P(n-1) \\ B(n-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(n-1)}. \tag{4}$$

2.2 Exercício teórico

Considere a relação entre as fases do ciclo reprodutivo das borboletas descrita pela Equação (4). Pede-se

(i) Determine as condições para a estabilidade assintótica do sistema.

(ii) Obtenha a expansão do vetor de estados $\mathbf{x}(n)$ em termos dos autovetores do sistema.

(iii) O que muda no item (i) se

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 Exercício com o Matlab

Considere três populações distintas de borboletas com as seguintes matrizes de transição de estados:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.5 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1/10 & 3/2 \\ 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pede-se:

1. Obtenha para cada matriz os autovalores e os autovetores associados. Classifique cada sistema quanto à estabilidade.

2. Calcule $\mathbf{x}(n)$ usando a Equação (6) da Revisão Teórica.

3. Obtenha também o valor aproximado de $\mathbf{x}(n)$ usando a Equação (17) da Revisão Teórica. Note que a função `eig.m` do Matlab não fornece a decomposição de modo que o primeiro autovalor seja o dominante. Para encontrar o autovalor dominante, você pode usar as funções `find.m` e `max.m` aplicadas à saída da função `eig.m`.

4. Faça os gráficos de $\mathbf{x}(n)$ e de sua aproximação para $n = 0, 1, \cdots, N-1$. Explique porque a aproximação não é adequada em alguns casos com base nos autovalores da matriz.

◇ Use $N = 100$ para todas as matrizes.

◇ Nos dois itens 2, 3 e 4 use uma condição inicial aleatória $\mathbf{x}(0)$, considerando uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$. Note que nos itens 2 e 3, as condições iniciais de $\mathbf{x}(n)$ e de sua aproximação devem ser as mesmas.

5. Obtenha 20 trajetórias distintas no espaço de estados com um conjunto de condições iniciais uniformemente distribuídas no intervalo $[0,\ 1]$.
   Dica: para esse gráfico use a função `plot3.m`.