PSI-3260 Aplicações de Álgebra Linear

Experiência 6

Autovalores e Autovetores – Parte computacional

1 Usando autovalores para resolver sistemas de equações diferenciais

Há várias maneiras de se resolver equações diferenciais, incluindo técnicas analíticas e numéricas. Por exemplo, a transformada de Laplace, que será vista em *Circuitos Elétricos*, é uma técnica analítica que pode ser usada para esse fim. Outra técnica analítica é a baseada em autovalores e autovetores. Além de possibilitar obter a solução de um sistema linear de equações diferenciais ordinárias e a coeficientes constantes, a decomposição em autovalores e autovetores também permite analisar a estabilidade do sistema[1].

A seguir, usamos a decomposição de autovalores e autovetores para resolver o sistema de equações diferenciais $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$. No Exemplo 1.1, abordamos o caso em que a matriz $\mathbf{A}$ é um escalar. Em seguida, no Exemplo 1.2, estendemos o resultado do caso escalar para o caso de um sistema desacoplado, em que $\mathbf{A}$ é diagonal. Apesar de não ser necessário conhecimento de *Álgebra Linear* para obter as soluções dos dois primeiros exemplos, eles são essenciais para o caso mais geral em que o sistema é acoplado, ou seja, $\mathbf{A}$ não é mais diagonal. Esse caso será tratado no Exemplo 1.3, onde a decomposição de autovalores e autovetores faz o papel de uma transformação que desacopla o sistema. Depois de obtermos a solução do sistema transformado, aplica-se a transformação inversa para se chegar à solução do sistema acoplado.

Exemplo 1.1 – Caso escalar. Suponha que você precisa resolver a seguinte equação diferencial[2]

$$\dot{x}(t) = -ax(t), \tag{1}$$

com condição inicial $x(t_0) = x_0$, sendo a é uma constante real diferente de zero. Note que a função incógnita $x(t)$, solução da Equação (1), deve ter derivada proporcional à ela própria. Dada essa observação e descartando a solução trivial $x(t) = 0$, cabe uma pergunta: "que

[1] Um sistema pode ser, por exemplo, um circuito elétrico, o controlador de velocidade de um carro, o aparelho circulatório do corpo humano, o mecanismo de amortecimento de um carro, o transmissor e o receptor do celular, etc. Esses exemplos de sistema podem ser descritos por um conjunto (sistema) de equações diferenciais.

[2] Como será visto nos cursos de Cálculo, essa equação diferencial é chamada de homogênea.

função não nula tem derivada proporcional a ela própria?” Uma possível candidata é a função exponencial. Portanto, vamos considerar que a solução de (1) é dada por

$$x(t) = Ae^{p(t-t_0)}, \tag{2}$$

cuja derivada vale

$$\dot{x}(t) = Ape^{p(t-t_0)}, \tag{3}$$

em que A e p são constantes. Substituindo (3) e (2) em (1), chega-se a

$$\underbrace{Ae^{p(t-t_0)}}_{\neq 0}(p+a) = 0 \Rightarrow p = -a.$$

Para finalizar, devemos encontrar o valor da constante A. Usando a informação da condição inicial, obtém-se

$$x(t_0) = x_0 = Ae^{-a(t-t_0)}\Big|_{t=t_0} = A.$$

Portanto a solução não trivial da Equação Diferencial (1) é dada por

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{-a(t-t_0)}.} \tag{4}$$

Note que a constante $-a$ que aparece multiplicando $x(t)$ no lado direito de (1), aparece na solução multiplicando $(t - t_0)$ no argumento da exponencial.

Exemplo 1.2 – Sistema desacoplado. Suponha agora que se deseja resolver o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = +3x_2(t) \end{cases}, \tag{5}$$

com condições iniciais $x_1(0) = 5$ e $x_2(0) = 9$. Esse sistema é dito desacoplado, pois $x_1(t)$ não depende de $x_2(t)$ e vice-versa. Assim, usando a solução dada por (4), chega-se à

$$\begin{cases} x_1(t) = 5e^{-2t} \\ x_2(t) = 9e^{3t} \end{cases}. \tag{6}$$

Na Figura 1, são mostrados gráficos da Solução (6). Note que $x_1(t)$ é uma exponencial decrescente que tende a zero a medida que t aumenta. Em contrapartida, $x_2(t)$ é uma exponencial crescente que aumenta com t. Um sistema que tem uma resposta não limitada como a mostrada na Figura 1-(b) é dito *instável*.

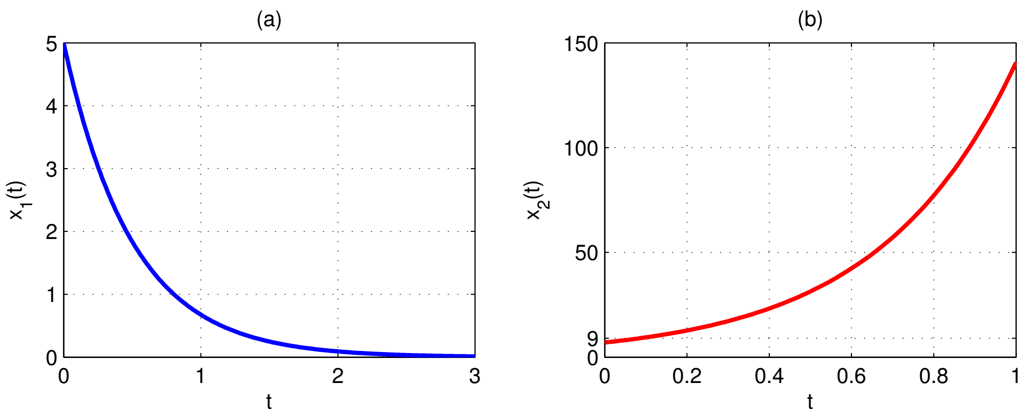

Figura 1: Solução do sistema desacoplado (5).

Até agora não utilizamos o conhecimento de teoria de matrizes. No entanto, (5) pode ser reescrita na seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Definindo os vetores $\mathbf{x}(t)$ e $\dot{\mathbf{x}}(t)$ como

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \tag{8}$$

obtém-se a forma compacta,

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t).} \tag{9}$$

Os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ valem $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$ e aparecem multiplicando t nos argumentos das exponenciais da Solução (6), de modo que uma primeira conclusão pode ser tirada desse exemplo:

Se pelo menos um dos autovalores da matriz **A** tiver parte real positiva, a solução do sistema pode crescer exponencialmente levando à instabilidade.

Exemplo 1.3 – Sistema acoplado. Vamos agora resolver o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -4x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) - x_2(t) \end{cases}, \tag{10}$$

com condições iniciais $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = -2$. Escrevendo na forma matricial, obtém-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)}. \tag{11}$$

Usando decomposição em autovalores e autovetores, a matriz $\mathbf{A}$ pode ser escrita como

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1} \tag{12}$$

em que $\mathbf{D}$ é a matriz diagonal de autovalores e $\mathbf{V}$ é a matriz cujas colunas são autovetores. Para o Sistema (10), essas matrizes valem (verifique!)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Substituindo (12) em (9), chega-se a

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(t). \tag{14}$$

Multiplicando ambos os lados dessa expressão à esquerda por $\mathbf{V}^{-1}$, chega-se a

$$\mathbf{V}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(t). \tag{15}$$

Definindo um vetor transformado $\mathbf{y}(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(t)$ com derivada $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{V}^{-1}\dot{\mathbf{x}}(t)$ e identificando esse vetor em (14), obtém-se

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{D}\mathbf{y}(t). \tag{16}$$

Como a matriz $\mathbf{D}$ é diagonal, o Sistema (16) é desacoplado como no Exemplo 1.2. Portanto, a solução de (16) é dada por

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} A_1 e^{-3t} \\ A_2 e^{-2t} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

com $A_1 = y_1(0)$ e $A_2 = y_2(0)$. Novamente, os autovalores da matriz $\mathbf{A}$, que neste caso valem $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -2$, aparecem multiplicando t no argumento das exponenciais da solução do sistema desacoplado.

Ainda precisamos determinar as constantes A_1 e A_2. Como temos apenas a informação das condições iniciais $x_1(0)$ e $x_2(0)$, vamos ter que aplicar a mesma transformação que relaciona $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$. Lembrando que $\mathbf{y}(0) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(0)$, basta resolver o seguinte sistema de equações

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \mathbf{V}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}, \tag{18}$$

o que leva a $A_1 = -4\sqrt{2}$ e $A_2 = 3\sqrt{5}$. Aplicando agora a transformação inversa $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}\mathbf{y}(t)$, chega-se a

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{V} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4\sqrt{2}e^{-3t} \\ +3\sqrt{5}e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{-3t} - 3e^{-2t} \\ 4e^{-3t} - 6e^{-2t} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Note que tanto $x_1(t)$ quanto $x_2(t)$ são combinações lineares de $y_1(t) = -4\sqrt{2}e^{-3t}$ e $y_2(t) = +3\sqrt{5}e^{-2t}$. Além disso, os autovalores de $\mathbf{A}$ têm um papel fundamental na solução, pois eles aparecem multiplicando t no argumento das exponenciais. Como os dois autovalores da matriz $\mathbf{A}$ deste exemplo têm parte real negativa, a solução do sistema tende a zero a medida que o tempo passa. Neste caso, o sistema é dito *assintoticamente estável*. Gráficos de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ dados por (19) são mostrados na Figura 2.

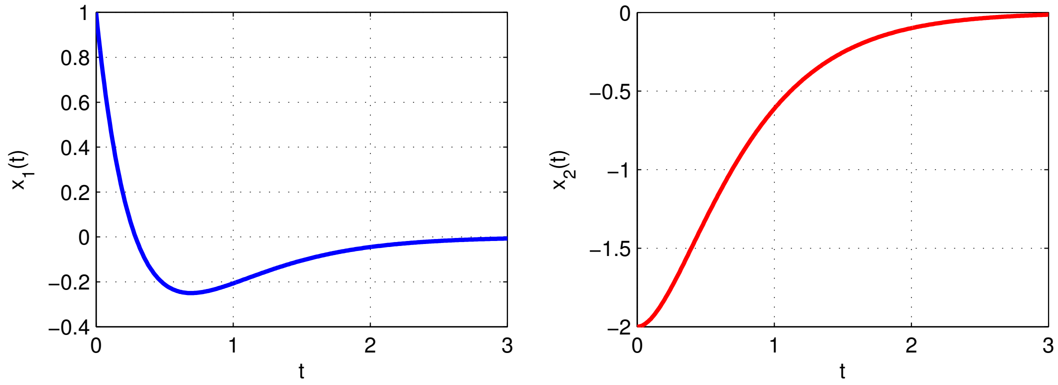

Figura 2: Solução do sistema acoplado (10).

Um outro gráfico muito usado em *Sistemas Lineares e Não Lineares* é o que mostra o conjunto de curvas obtidas pela evolução temporal do sistema a partir de diferentes condições iniciais. Trata-se de um gráfico de trajetórias no espaço dos estados x_1 e x_2 (também chamado de espaço de fases). Na Figura 3, são mostradas algumas trajetórias no plano $x_1(t) \times x_2(t)$, supondo condições iniciais uniformemente distribuídas no intervalo $[-10,\ 10]$. A condição inicial é indicada pelo símbolo $\bullet$ e o fim da trajetória pelo símbolo $\blacktriangle$. Como era de se esperar, independente da condição inicial, os estados tendem para a origem $(0, 0)$ do plano $x_1 \times x_2$.

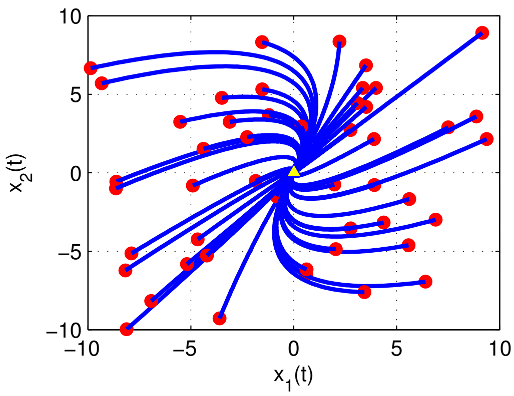

Figura 3: Trajetórias no espaço de estados do sistema (10), considerando 50 condições iniciais obtidas a partir de uma distribuição uniforme no intervalo $[-10,\ 10]$ e indicadas pelo símbolo $\bullet$. O fim de cada trajetória está indicado pelo símbolo $\blacktriangle$.

2 Parte computacional

A seguir vamos usar o procedimento baseado em decomposição de autovalores e autovetores do Exemplo 1.3 para analisar o comportamento livre de dois circuitos elétricos. Esses circuitos também podem ser analisados por meio da análise transitória de softwares de simulação de circuitos (por exemplo: PSpice, MultiSim e PartSim – www.partsim.com).

2.1 Circuito RLC paralelo

Considere o circuito RLC paralelo mostrado da Figura 4.

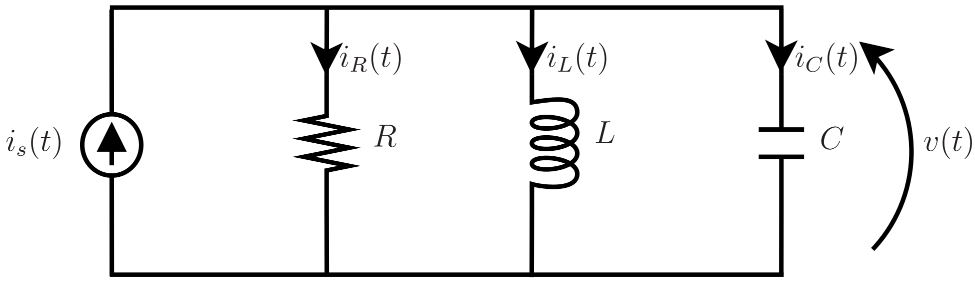

Figura 4: Circuito RLC paralelo.

Usando a primeira lei de Kirchhoff chega-se a

$$i_s(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t). \tag{20}$$

Das relações constitutivas do resistor, capacitor e indutor, sabe-se

$$i_R(t) = \frac{1}{R}v(t), \quad i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \quad \text{e} \quad v(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}. \tag{21}$$

Substituindo essas relações em (20), obtém-se

$$C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R}v(t) + i_L(t) = i_s(t) \tag{22a}$$

$$v(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}. \tag{22b}$$

Substituindo (22b) em (22a) e dividindo a equação resultante por LC, chega-se à seguinte equação diferencial com $i_L(t)$ sendo a função incógnita:

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i_L(t) = \frac{1}{LC}i_s(t). \tag{23}$$

Definindo o fator de amortecimento

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \tag{24a}$$

e a frequência própria não amortecida

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \tag{24b}$$

(23) pode ser reescrita como

$$\boxed{\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + 2\alpha\,\frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2\, i_L(t) = \omega_0^2\, i_s(t).} \tag{25}$$

Como será visto nos cursos de *Circuitos Elétricos*, um circuito de segunda ordem contém dois elementos armazenadores de energia e pode ser descrito por uma equação diferencial da forma (25). Dado um circuito de segunda ordem, a função incógnita que aparece em (25) pode ser diferente (poderia ser a tensão de um capacitor, por exemplo). Além disso, os parâmetros α e ω_0^2 dependem da topologia do circuito. Assim, para o circuito RLC série, por exemplo, $\alpha = R/(2L)$ e $\omega_0^2 = 1/(LC)$.

Adotando $x_1(t) = i_L(t)$ e $x_2(t) = di_L(t)/dt$ o comportamento do circuito da Figura 4 pode ser descrito pelas seguintes equações

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{26a}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\omega_0^2\, x_1(t) - 2\alpha\, x_2(t) + \omega_0^2\, i_s(t). \tag{26b}$$

Definindo os vetores $\dot{\mathbf{x}}(t)$ e $\mathbf{x}(t)$ como em (8), as equações (26a) e (26b) podem ser escritas na forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\alpha \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{i_s(t)}_{\mathbf{u}(t)}. \tag{27}$$

Essa equação é conhecida como equação de estado do circuito. Nesta experiência, vamos considerar que $i_s(t) = 0$, ou seja, vamos analisar o comportamento livre do circuito devido apenas às condições iniciais $i_L(0)$ e $v_C(0)$. A solução completa que leva em conta $i_s(t)$ será vista nos cursos de *Circuitos Elétricos*.

Exercício 2.1. *Obtenha uma expressão analítica para os autovalores da matriz* $\mathbf{A}$ *do circuito RLC paralelo em função dos parâmetros* α *e* ω_0.

Exercício 2.2. *Considere* $L = 6\mu\text{H}$, $C = 3\text{nF}$ *e três valores diferentes para R:*

1. $R = 20\Omega$,
2. $R = 150\Omega$ *e*
3. $R \to \infty$ *(para isso faça* R = Inf *no Matlab).*

Utilizando a função eig.m *aplicada à matriz* $\mathbf{A}$, *preencha a tabela abaixo. Esse circuito é estável? Explique.*

R	Comportamento do Circuito Livre	α^2/ω_0^2	Autovalores
20Ω	Superamortecido		
150Ω	Oscilatório		
$R \to \infty$	Oscilador LC		

Para $v(0) = 10\text{V}$ *e* $i_L(0) = 2\text{A}$, *utilize o procedimento para resolução de sistemas de equações diferenciais usando autovalores e autovetores do Exemplo 1.3 para obter a corrente* $i_L(t)$ *e a tensão* $v(t)$ *do circuito RLC livre [*$i_s(t) = 0$*] da Figura 4. Você vai precisar das condições* *iniciais* $x_1(0) = i_L(0)$ *e* $x_2(0) = \frac{di_L(t)}{dt}\big|_{t=0}$. *Qual a relação entre* $v(0)$ *e* $x_2(0)$*?*

Pede-se:

- *Para cada valor de R, obtenha gráficos de* $i_L(t)$ *e de* $v(t)$ *para* $0 \leq t \leq 8\mu\text{s}$*, utilizando um período de amostragem de* 1ns.

- *No caso de* $R \to \infty$*, estime o valor da frequência (em Hz) do sinal* $i_L(t)$ *a partir do gráfico. Qual a relação dessa frequência com* ω_0*? Explique porque o sinal não tende para zero como nos casos anteriores, baseando-se na conservação de energia.*

- *Para cada valor de R, varie as condições iniciais para obter 20 trajetórias no espaço de estados* $x_1 \times x_2$*. Considere que*

  $i_L(0)$ *é uniformemente distribuída no intervalo* $[-10\text{A},\ 10\text{A}]$ *e*

  $v(0)$ *é uniformemente distribuída no intervalo* $[-150\text{V},\ 150\text{V}]$.

  Dica: Use a função `rand.m` *do Matlab e faça um* `for` *para plotar uma trajetória para cada condição inicial, mantendo a trajetória obtida anteriormente por meio da função* `hold on`*. Use um símbolo para indicar a condição inicial (*$t = 0$*) e outro para o valor final (*$t = 8\mu\text{s}$*).*

2.2 Circuito RLC paralelo com gerador vinculado

Vamos agora analisar o comportamento livre (devido somente às condições iniciais) do circuito da Figura 5, em que o gerador independente de corrente $i_s(t)$ foi substituído por um gerador de corrente controlado pela tensão $v(t)$.

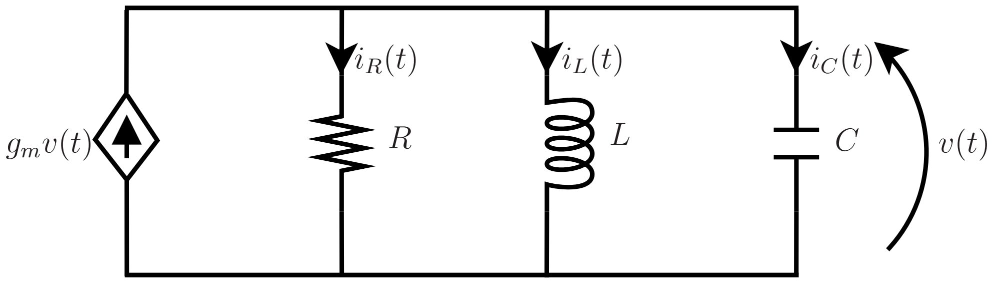

Figura 5: Circuito RLC paralelo livre com gerador vinculado de corrente controlado por tensão.

Exercício 2.3. *O circuito da Figura* (5) *também pode ser descrito pelo sistema de equações diferenciais* $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$*. Considerando novamente os estados* $x_1(t) = i_L(t)$ *e* $x_2(t) = di_L(t)/dt$*, é possível verificar que a matriz* $\mathbf{A}$ *continua sendo igual a que aparece em* (27)*, mas com outra definição para* α*.*
Pede-se:

a) *Determine a expressão analítica do fator de amortecimento* α *para o circuito da Figura* (5) *e verifique que a frequência própria não amortecida* ω_0 *continua sendo igual a* $1/\sqrt{LC}$.
Dica: Substitua $i_s(t)$ *por* $g_m v(t)$ *na Equação* (23) *e use a Equação* (22b).

b) *Considerando que os autovalores de* $\mathbf{A}$ *sejam complexos conjugados, determine o intervalo de* g_m *para que esses autovalores tenham real negativa em função dos parâmetros* R, L *e* C *do circuito.*

Exercício 2.4. *Utilize novamente o procedimento para resolução de sistemas de equações diferenciais usando autovalores e autovetores do Exemplo 1.3 para obter a corrente* $i_L(t)$ *e a tensão* $v(t)$ *do circuito da Figura 5. Considere* $L = 6\mu\text{H}$, $C = 3\text{nF}$, $R = 150\Omega$ *e três valores diferentes para* g_m:

1. $g_m = 1/R$,
2. $g_m = 4/R$ *e*
3. $g_m = 0{,}2/R$.

Pede-se:

- *Para cada valor de* g_m, *utilize a função* eig.m *do Matlab para preencher a tabela abaixo.*

g_m	Autovalores	Estabilidade
$1/R$		Marginalmente estável
$4/R$		
$0{,}2/R$		

- *Adote* $v(0) = 10\text{V}$, $i_L(0) = 2\text{A}$ *e obtenha gráficos para cada valor de* g_m *de* $i_L(t)$ *e de* $v(t)$ *para* $0 \le t \le 8\mu\text{s}$, *utilizando um período de amostragem de* 1ns.

- *Para cada valor de* g_m, *varie as condições iniciais para obter 20 trajetórias no espaço de estados* $x_1 \times x_2$. *Considere que*

  $i_L(0)$ *é uniformemente distribuída no intervalo* $[-10\text{A},\ 10\text{A}]$ *e*

  $v(0)$ *é uniformemente distribuída no intervalo* $[-150\text{V},\ 150\text{V}]$.

Referências

[1] LAY, D. C.: *Linear algebra and its applications*, 4. ed., Pearson Education, 2012.

[2] KIENITZ, K. H.: *Análise de circuitos: um enfoque de sistemas*, Editora Manole, 2002.

[3] ORSINI, L. Q.; CONSONNI, D.: *Curso de Circuitos Elétricos*, 2. ed. , vol. 2, Editora Edgard Blücher, 2004.

[4] MONTEIRO, L. H. A.: *Sistemas Dinâmicos*, 2. ed., Editora Livraria da Física, 2006.